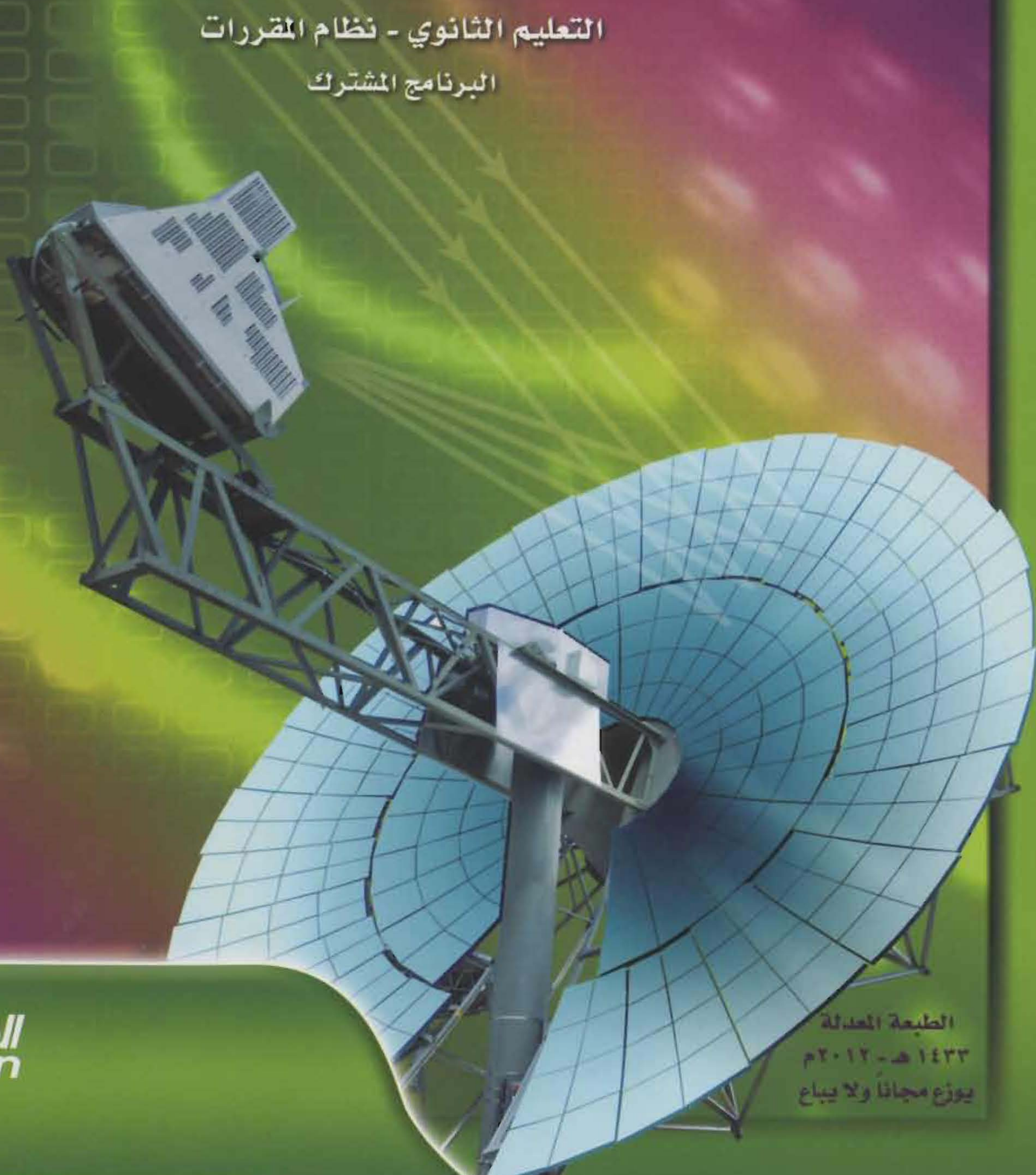
المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم

رياضيات ١

التعليم الثانوي - نظام المقررات

البرنامج المشترك



الطبعة المعدلة
١٤٣٣ هـ - ٢٠١٢م
يوزع مجاناً ولا يباع

العبيكان
Obeikan

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

رياضيات ١

التعليم الثانوي - نظام المقررات

(البرنامج المشترك)

العبيكان
Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة المعدّلة
١٤٣٣هـ - ٢٠١٢م

رياضيات ١

التعليم الثانوي- نظام المقررات (البرنامج المشترك)

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عمر محمد أبو غليون
عبدالحكيم عبدالله سليمان
صلاح بن عبدالله الزيد
د. عبدالله بن محمد الجوعي
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

Original Title:

Geometry © 2010

By:

John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D

Contributing Authors
Jerry Cummins
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph. D
Arthur K. Wayman, Ph. D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

College Readiness
Robert Lee Kimball, Jr.

Graphing Calculator
Ruth M. Casey

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro, Ph.D

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

حول الغلاف

تسقط أشعة الشمس المتوازية على الطبق الشمسي فترتد مكوِّنة زوايا متناظرة وأخرى متحالفة.
تدرس هذه الزوايا في هذا الصف.

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.

تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.

إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.

الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.

الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.

الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

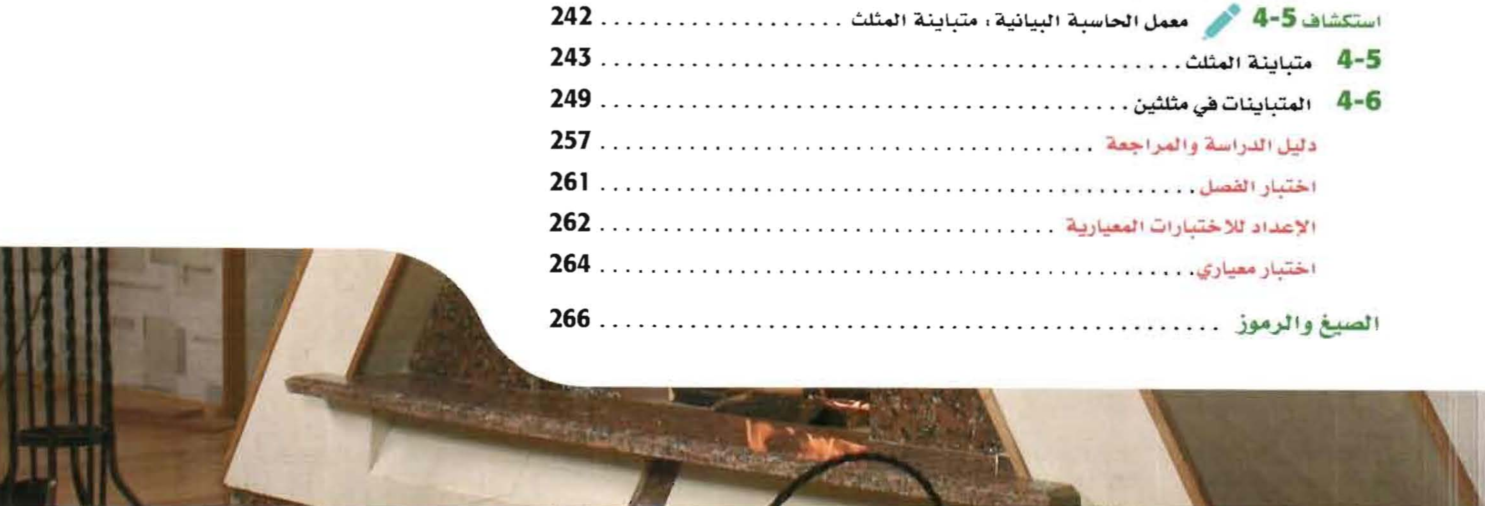
الفصل 1 التبرير والبرهان

الفصل 2 التوازي والتعامد

الفهرس

الفصل 3 المثلثات المتطابقة

الفصل 4 العلاقات في المثلث



الفصل **1**

التبرير والبرهان
Reasoning and Proof

فيما سبق:

درستُ القطع المستقيمة وعلاقات الزوايا.

والآن:

- أكتب تخمينات، وأجد أمثلة مضادة للعبارات.
- أستعمل التبرير الاستنتاجي للتوصل إلى نتيجة صحيحة.
- أكتب براهين تتضمَّن نظريات القطع المستقيمة والزوايا.

لماذا؟

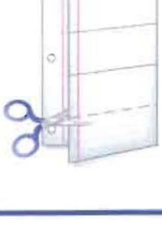
العلوم والطبيعة: يستعمل علماء الأحياء التبريرات الاستنتاجية والاستقرائية لاتخاذ القرارات ووضع الاستنتاجات المنطقية عن مملكة الحيوانات.

المطويات منظم أفكار

التبرير والبرهان: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 1، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1 **اطوِ** الورقة طوليًا، بحيث تكون حافتها بمحاذاة الثقوب الجانبية.

2 **قص** خمسة أشرطة كما يظهر في الشكل أدناه.



3 **عنوِن** الأشرطة كما في الشكل أدناه.

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي عند قيمة x المُعطاة.

1) $4x + 7 \,,\, x = 6$ **2)** $180\,(x - 2) \,,\, x = 8$

3) $5x^2 - 3x \,,\, x = 2$ **4)** $\frac{x(x-3)}{2} \,,\, x = 5$

5) $x + (x + 1) + (x + 2) \,,\, x = 3$

اكتب كل تعبير لفظي مما يأتي على صورة عبارة جبرية:

6) أقل من خمسة أمثال عدد بثمانية.

7) أكثر من مربع عدد بثلاثة.

حل كل معادلة فيما يأتي:

8) $8x - 10 = 6x$

9) $18 + 7x = 10x + 39$

10) $3(11x - 7) = 13x + 25$

11) $\frac{3}{2}x + 1 = 5 - 2x$

12) **قراءة:** اشترت عائشة 4 كتب بقيمة 52 ريالًا؛ لتقرأها في أثناء الإجازة الصيفية. إذا كانت الكتب متساوية السعر، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن الكتاب الواحد، ثم حُلَّها.

استعن بالشكل المجاور في مثال 3 للإجابة عما يأتي:

13) عين زاويتين منفرجتين متقابلتين بالرأس.

14) عيِّن زاويتين متتامتين.

15) عيِّن زاويتين متجاورتين على مستقيم.

16) إذا كان $m\angle DXB = 116°$ و $m\angle EXA = (3x + 2)°$، فأوجد قيمة x.

17) إذا كان $m\angle CXD = (6x - 13)°$ و $m\angle DXE = (10x + 7)°$، فأوجد قيمة x.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة $x^2 - 2x + 11$ إذا كانت $x = 6$.

$x^2 - 2x + 11$	العبارة المعطاة
$= (6)^2 - 2(6) + 11$	$x = 6$
$= 36 - 2(6) + 11$	بإيجاد قيم القوى
$= 36 - 12 + 11$	بالضرب
$= 35$	بالتبسيط

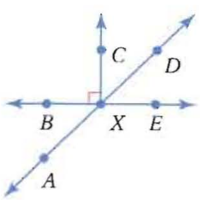
مثال 2

حل المعادلة $36x - 14 = 16x + 58$.

$36x - 14 = 16x + 58$	المعادلة المعطاة
$36x - 14 - 16x = 16x + 58 - 16x$	بطرح $16x$ من الطرفين
$20x - 14 = 58$	بالتبسيط
$20x - 14 + 14 = 58 + 14$	بإضافة 14 للطرفين
$20x = 72$	بالتبسيط
$\frac{20x}{20} = \frac{72}{20}$	بقسمة الطرفين على 20
$x = 3.6$	بالتبسيط

مثال 3

إذا كان $m\angle BXA = (3x + 5)°$ ، $m\angle DXE = 56°$، فأوجد قيمة x.



$m\angle BXA = m\angle DXE$	تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$3x + 5 = 56$	بالتعويض
$3x = 51$	بطرح 5 من الطرفين
$x = 17$	بقسمة الطرفين على 3

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين
Inductive Reasoning and Conjection

فيما سبق:
درستُ استعمال البيانات لإيجاد أنماط والتوصل إلى توقعات.

والآن:
- أكتب تخمينات مبنية على التبرير الاستقرائي.
- أجد أمثلة مضادة.

المفردات:
التبرير الاستقرائي
inductive reasoning
التخمين
conjecture
المثال المضاد
counterexample

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يتم في أبحاث التسويق تحليل إجابات مجموعة من الأشخاص عن أسئلة محددة حول المنتج، ثم يتم البحث عن نمطية معينة في الإجابات حتى الوصول إلى نتيجة. وتسمى هذه العملية التبرير الاستقرائي.

التخمين: **التبرير الاستقرائي** هو تبرير تستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة. وعندما تفترض استمرار نمط على نفس الوتيرة، فإنك تستعمل التبرير الاستقرائي، وتُسمّى العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبرير الاستقرائي **تخمينًا**.

مراجعة المفردات

المتتابعة هي مجموعة من الأعداد أو الأشياء منظمة بترتيب معين.

مثال 1 الأنماط والتخمين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها.

a) مواعيد وصول الحافلات إلى محطة الركوب هي: **8:30** صباحًا، **9:10** صباحًا، **9:50** صباحًا، **10:30** صباحًا، ......

الخطوة 1: ابحث عن نمط.

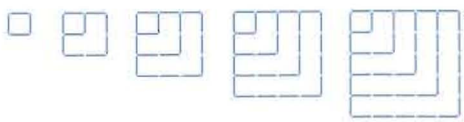
8:30 صباحًا، 9:10 صباحًا، 9:50 صباحًا، 10:30 صباحًا ......

40 دقيقة   40 دقيقة   40 دقيقة

الخطوة 2: ضع تخمينًا.

يزيد موعد وصول الحافلة 40 دقيقة عن موعد وصول الحافلة التي سبقتها. موعد وصول الحافلة التالية سوف يكون 10:30 صباحًا + 40 دقيقة أو 11:10 صباحًا.

b)



4   10   18   28   40   ......

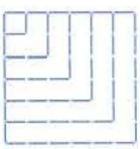
الخطوة 1:

$$4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+8} 18 \xrightarrow{+10} 28 \xrightarrow{+12} 40$$

تزداد الأعداد بمقدار 6, 8, 10, 12, ...

الخطوة 2: سوف يزيد عدد القطع المستقيمة في الشكل التالي على سابقه بمقدار 12 + 2 أو 14 قطعة مستقيمة؛ لذا سوف يحتوي الشكل التالي على 40 + 14 أو 54 قطعة مستقيمة.

تحقق: ارسم الشكل التالي؛ لكي تتحقق من صحة تخمينك. ✓



54

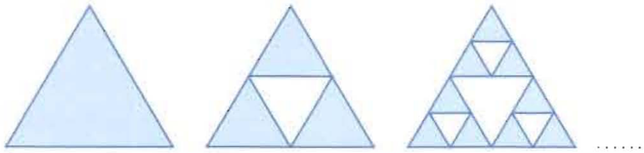
تحقق من فهمك

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها.

1A) زيارات المتابعة: صفر، رجب، ذو الحجة، جمادى الأولى، ......

1B) $10, 4, -2, -8, \ldots\ldots$

1C)



لوضع تخمينات جبرية أو هندسية يجب أن تقدم أمثلة.

مثال 2 التخمينات الجبرية والهندسية

اكتب تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي، وأعطِ أمثلة عددية أو ارسم أشكالًا تؤيد هذا التخمين.

a) **ناتج جمع عددين فرديين.**

الخطوة 1: اكتب أمثلة.

$$1+3=4\,,\ 1+5=6\,,\ 3+5=8\,,\ 7+9=16$$

الخطوة 2: ابحث عن نمط.

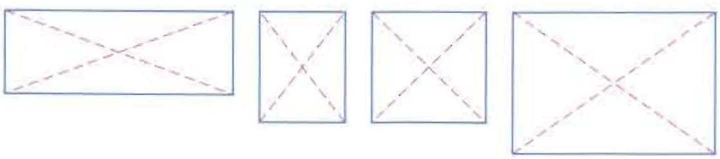
لاحظ أن الأعداد 16 ,8 ,6 ,4 جميعها زوجية.

الخطوة 3: ضع تخمينًا.

ناتج جمع عددين فرديين هو عدد زوجي.

b) **القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل.**

الخطوة 1:



الخطوة 2: لاحظ أن أطوال القطع المستقيمة الواصلة بين كل رأسين متقابلين في كل مستطيل تبدو متساوية. استعمل المسطرة أو الفرجار للتحقق من ذلك.

الخطوة 3: التخمين: القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل متطابقتان.

تحقق من فهمك

2A) ناتج جمع عددين زوجيين.

2B) العلاقة بين AB و EF ، إذا كانت $AB = CD$ و $CD = EF$

2C) مجموع مربعي عددين كليين متتاليين.

إرشادات للدراسة

الأمثلة المؤيدة والبراهين

الأمثلة المؤيدة للتخمين ليست كافية لإثبات صحته، ولإثبات صحة تخمين جبري أو هندسي، يجب تقديم حجج منطقية تسمى برهانًا. وسوف تتعلم المزيد عن البرهان في الدرس 5-1.

تعتمد التخمينات في المواقف الحياتية على بيانات يتم جمعها حول موضوع التخمين.

مثال 3 من واقع الحياة وضع تخمين من مجموعة بيانات

حلاقة: قام صاحب صالون حلاقة بجمع معلومات حول عدد الزبائن الذين يرتادون الصالون أيام الأربعاء والخميس والجمعة لستة أشهر؛ كي يقرر إن كان يجب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع.

الربط مع الحياة

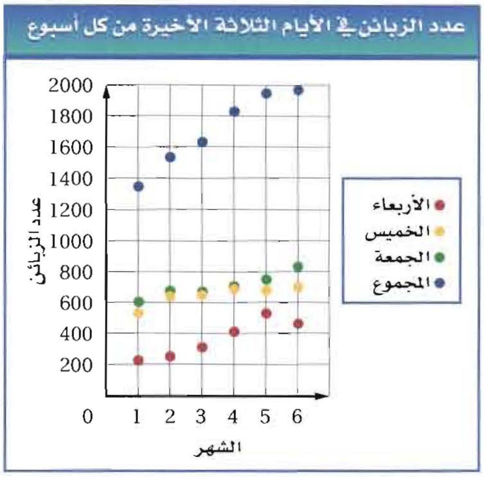
يتطلب العمل في صالونات الحلاقة مراعاة شروط صحية تضمن عدم انتقال الأمراض، ومنها غسل اليدين بعد كل عملية حلاقة، وعدم الاستعمال الخاطئ للأدوات والمستحضرات.

عدد الزبائن في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع

اليوم	شهر 1	شهر 2	شهر 3	شهر 4	شهر 5	شهر 6
الأربعاء	225	255	321	406	540	450
الخميس	552	635	642	692	685	705
الجمعة	603	658	652	712	746	832
المجموع	1380	1548	1615	1810	1971	1987

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

بما أنك تبحث عن نمط له علاقة بالزمن، استعمل شكل الانتشار لعرض هذه البيانات، بجعل المحور الأفقي يمثل الأشهر والمحور الرأسي يمثل عدد الزبائن. ارسم كل مجموعة من البيانات باستعمال لون مختلف، وضع مفتاحًا للتمثيل البياني.



b) ضع تخمينًا يعتمد على هذه البيانات، مفسرًا كيف يؤيد التمثيل البياني هذا التخمين.

ابحث عن نمط في هذه البيانات. لاحظ أن عدد الزبائن لكل من الأيام الثلاثة يبدو آخذًا بالازدياد بمرور الأشهر، كما أن المجموع الكلي يزداد كل شهر عن الشهر السابق.

تؤيد بيانات هذا المسح تخمين صاحب صالون الحلاقة بأن العمل في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع يزداد، مما يتطلب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في هذه الأيام.

تحقق من فهمك

3) **أسعار:** يبين الجدول المجاور سعر منتج للسنوات من 1402هـ إلى 1427هـ .

السنة	السعر (ريال)
1402	20
1407	22
1412	29
1417	32
1422	37
1427	41

A) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

B) تنبأ بالسعر سنة 1432 هـ معتمدًا على التمثيل البياني الذي أنشأته.

C) هل من المنطقي القول بأن هذا النمط سيستمر بمرور الزمن؟ وإذا لم يكن كذلك، فكيف سيتغير؟ فسر إجابتك .

ربط المفردات

المثال المضاد

المعنى اللغوي

المضاد هو المخالف.

المعنى الرياضي

المثال المضاد هو مثال معاكس لمثال مُعطى.

إيجاد أمثلة مضادة: يتطلب إثبات صحة تخمين معين لكل الحالات، تقديمَ برهان لذلك التخمين. ولإثبات عدم صحة التخمين يكفي تقديم مثال واحد خاطئ. وهذا المثال الخاطئ الذي يمكن أن يكون عددًا أو رسمًا أو عبارة يُسمى **المثال المضاد**.

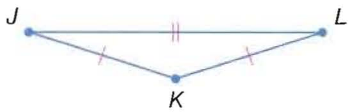
مثال 4 إيجاد أمثلة مضادة

أعط مثالًا مضادًا يبيّن أن كلًّا من التخمينات الآتية خاطئة.

a) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^2 > n$.

إذا كان n يساوي 1، فإن التخمين خاطئ؛ لأن $1^2 \ngtr 1$.

b) إذا كان $JK = KL$، فإن K منتصف $\overline{JL}$.



عندما لا تقع J, K, L على استقامة واحدة، يكون التخمين خاطئًا. ففي الشكل المجاور $JK = KL$، ولكن K ليست نقطة منتصف $\overline{JL}$.

تحقق من فهمك

4A) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $-n$ يكون سالبًا.

4B) إذا كان $\angle ABE \cong \angle DBC$ ، فإن $\angle ABE$ و $\angle DBC$ متقابلتان بالرأس.

تأكـد

المثال 1 **اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها:**

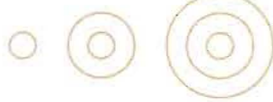
1) التكلفة: 4.50 ريالات، 6.75 ريالات، 9.00 ريالات، ......

2) مواعيد انطلاق الحافلات: 10:15 صباحًا، 11:00 صباحًا، 11:45 صباحًا، ......

3)

......

4)



......

5) $3, 3, 6, 9, 15, \ldots\ldots$

6) $2, 6, 14, 30, 62, \ldots\ldots$

المثال 2 **ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:**

7) ناتج ضرب عددين زوجيين.

8) العلاقة بين العددين a و b إذا كان $a + b = 0$.

9) العلاقة بين مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن النقطة A .

10) العلاقة بين $\overline{AP}$ و $\overline{PB}$ إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ والنقطة P نقطة منتصف $\overline{AM}$.

المثال 3 **11)** **هاتف محمول:** استعن بالجدول المجاور الذي يبين عدد اشتراكات الهواتف المحمولة في المملكة لبعض السنوات.

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

b) ضع تخمينًا لعدد الاشتراكات في سنة 2012م .

اشتراكات الهاتف المحمول في المملكة

السنة	الاشتراكات (بالملايين)
2002	5
2003	7.2
2004	9.2
2005	14.1
2006	19.7
2007	28.4

المصدر: الإصدار 6 - النشرة الإلكترونية - هيئة الاتصالات وتقنية المعلومات

المثال 4 **أعطِ مثالًا مضادًّا يبين أن كلًّا من التخمينات الآتية خاطئة.**

12) إذا كانت $\angle A$ و $\angle B$ متتامتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

13) إذا قطع نصف مستقيم قطعة مستقيمة عند منتصفها، فإنه يعامدها.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها.**

14) $0, 2, 4, 6, 8$ **15)** $3, 6, 9, 12, 15$ **16)** $4, 8, 12, 16, 20$

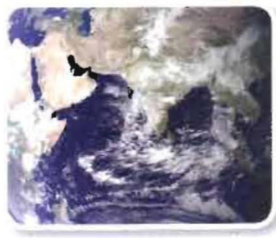
17) $2, 22, 222, 2222$ **18)** $1, 4, 9, 16$ **19)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

20) مواعيد الوصول: 10:00 صباحًا، 12:30 مساءً ، 3:00 مساءً، ......

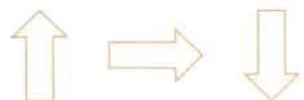
21) النسبة المئوية للرطوبة: 100% , 93% , 86% , ...

22) أيام العمل: الأحد، الثلاثاء، الخميس، ......

23) اجتماعات النادي: محرّم، ربيع أول، جمادى الأولى، ......

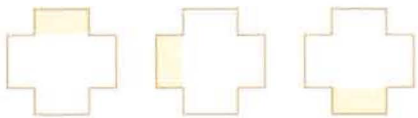


24)



......

25)



......

26)

......

27)

......

الربط مع الحياة

يغطي الماء ثلثي سطح الأرض تقريبًا، وتبلغ نسبة الماء المالح منه 97% ، و 2% منه على شكل جبال جليدية، وبذلك يبقى فقط 1% منه صالحًا للاستعمال البشري.

28) **رياضة:** بدأ ماجد التمرين على رياضة الجري السريع قبل خمسة أيام. فركض في اليوم الأول 0.5 km . وفي الأيام الثلاثة التالية 0.75 km, 1 km, 1.25 km . إذا استمر تمرينه على هذا النمط، فما المسافة التي يقطعها في اليوم السابع؟

29) **مياه:** تضع بعض البلدان قيودًا على استهلاك المياه. خمّن لماذا توضع مثل هذه القيود على استهلاك المياه في تلك البلدان؟

المثال 2 **ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:**

30) ناتج ضرب عددين فرديين.

31) ناتج ضرب عدد في اثنين، مضافًا إليه واحد.

32) العلاقة بين العددين a و b ، إذا كان $ab = 1$.

33) العلاقة بين $\overline{AB}$ ومجموعة النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A و B .

34) العلاقة بين حجم المنشور وحجم الهرم اللذين لهما القاعدة نفسها والارتفاع نفسه.

المثال 3 **35)** **مدارس:** استعن بالجدول المجاور الذي يبين عدد الطلاب في مدرسة لأربع سنوات متتالية.

السنة	عدد الطلاب
1425	190
1426	210
1427	240
1428	260

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

b) ضع تخمينًا معتمدًا على بيانات الجدول، واشرح كيف يؤيد تمثيلك البياني هذا التخمين.

المثال 4 **حدد ما إذا كان أي من التخمينات الآتية صحيحًا أو خاطئًا، فإذا كان التخمين خاطئًا، أعط مثالًا مضادًا.**

36) إذا كان n عددًا أوليًا، فإن $n+1$ ليس أوليًا.

37) إذا كان x عددًا صحيحًا، فإن $-x$ عدد موجب.

38) في المثلث ABC إذا كان $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ ، فإن $\triangle ABC$ قائم الزاوية.

39) إذا كانت مساحة مستطيل تساوي $20\ m^2$، فإن طوله يساوي $10\ m$ ، وعرضه $2\ m$.

الربط مع الحياة

منطقة مكة المكرمة هي أكثر مناطق المملكة تعدادًا للسكان، وتضم 12 محافظة هي مكة المكرمة وجدة والطائف والقنفذة والليث ورابغ والجموم وخليص والكامل والخرمة ورنية وتربه.

المصدر: مصلحة الإحصاءات العامة والمعلومات.

40) **سكان:** استعن بالجدول أدناه لتعطي مثالًا مضادًا لكل من العبارتين الآتيتين:

المنطقة الإدارية	العدد التقريبي للسكان بالمليون	النسبة المئوية من عدد سكان المملكة
الرياض	6.8	25.0%
مكة المكرمة	6.9	25.5%
المدينة المنورة	1.8	6.6%
الشرقية	4.1	15.1%

المصدر: مصلحة الإحصاءات العامة والمعلومات، التعداد السكاني لعام 1431هـ.

a) النسبة المئوية لمجموع عدد سكان المناطق الإدارية الأربعة الواردة في الجدول أقل من 25% من سكان المملكة العربية السعودية.

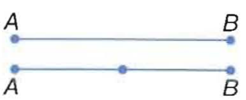
b) يزيد عدد سكان أي من المناطق الإدارية الأربعة على مليوني نسمة.

41) **تخمين جولدباخ:** ينص تخمين جولد باخ على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فعلى سبيل المثال: $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5$.

a) أثبت أن التخمين صحيح للأعداد الزوجية من 10 إلى 20.

b) إذا أُعطيت التخمين الآتي: يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فهل التخمين صحيح أم خاطئ؟ إذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًا.

42) **هندسة:** تشكل النقطتان الواقعتان على مستقيم قطعة مستقيمة، مثل $\overline{AB}$. إذا أُضيفت نقطة أخرى C على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، فإن النقاط الثلاث تشكّل ثلاث قطع مستقيمة.



a) ما عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من أربع نقاط على مستقيم؟ ومن خمس نقاط على مستقيم؟

b) ضع تخمينًا لعدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من n نقطة على مستقيم.

c) اختبر تخمينك بإيجاد عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من 6 نقاط.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** يتناقش أحمد وعلي في موضوع الأعداد الأولية. يقول أحمد: إن جميع الأعداد الأولية أعداد فردية. في حين يقول عليٌّ: ليست جميع الأعداد الأولية فردية. هل قول أي منهما صحيح؟ فسّر إجابتك.

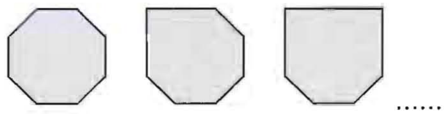
44) **مسألة مفتوحة:** اكتب متتابعة عددية تتبع حدودها نمطين مختلفين، ووضح النمطين.

45) **تبرير:** تأمّل التخمين "إذا كانت نقطتان تبعدان المسافة نفسها عن نقطة ثالثة معلومة فإن النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة". هل هذا التخمين صحيح أم خاطئ؟ وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًا.

46) **اكتب:** افترض أنك تُجري مسحًا. اختر موضوعًا واكتب ثلاثة أسئلة يتضمنها مسحك. كيف تستعمل التبرير الاستقرائي مع البيانات التي تحصل عليها من خلال هذا المسح؟

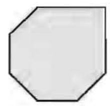
تدريب على الاختبار المعياري

47) انظر إلى النمط الآتي:

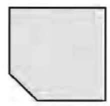


ما الشكل التالي في النمط؟

A

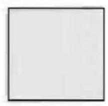


B



C

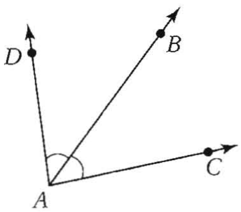
D



48) **إجابة شبكية:** إذا علمت أن $a = 10$, $b = 1$ ، فما قيمة العبارة الآتية؟

$$2b + ab \div (a + b)$$

49) في الشكل المجاور، $\overrightarrow{AB}$ منصف $\angle DAC$. أي الاستنتاجات الآتية ليس صحيحًا بالضرورة؟



A $\angle DAB \cong \angle BAC$

B $\angle DAC$ زاوية قائمة.

C A و D على استقامة واحدة.

D $2(m\angle BAC) = m\angle DAC$

مراجعة تراكمية

50) **أحواض السمك:** اشترى باسم حوضَ سمكٍ صغير على شكل أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها 25 cm ، وارتفاعها 35 cm. أوجد حجم الماء اللازم لِملءِ الحوض. (مهارة سابقة)

أوجد محيط $\triangle ABC$ إذا أُعطيت إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

51) $A(1, 6), B(1, 2), C(3, 2)$

52) $A(-3, 2), B(2, -9), C(0, -10)$

53) **جبر:** قياس زاويتين متتامتين يساوي $(16z - 9)°$ و $(4z + 3)°$. أوجد قياس كل منهما. (مهارة سابقة)

54) **جبر:** إذا علمت أن $x = 3$ و $y = -4$ و $z = -5$، فأوجد قيمة $5|x + y| - 3|2 - z|$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

جبر: عيّن القيم في مجموعة التعويض التي تجعل المتباينة صحيحة.

55) $x - 3 > 12$
$\{6, 10, 14, 18\}$

56) $6 + x > 9$
$\{8, 6, 4, 2\}$

57) $2x - 4 > 10$
$\{5, 6, 7, 8\}$

1-2 المنطق
Logic

لماذا؟

تعمل كثير من الدوائر الكهربائية من خلال تقييم سلسلة من الاختبارات التي تكون صحيحة أو خاطئة. فعلى سبيل المثال يمكن التحكم في المصباح الواحد باستعمال مفتاحين مختلفين موصولين بالدائرة الكهربائية نفسها. ويحدد اتجاه كلا المفتاحين معًا إلى أعلى أو أسفل ما إذا كان المصباح مضاءً أم لا.

فيما سبق:
درستُ إيجاد أمثلة مضادة لتخمينات خاطئة.

والآن:
- أُعيّن قيم الصواب لعبارة الوصل ولعبارة الفصل، وأمثّل ذلك بأشكال ڤن.

المفردات:
العبارة statement
قيمة الصواب truth value
نفي العبارة negation
العبارة المركبة compound statement
عبارة الوصل conjunction
عبارة الفصل disjunction
جدول الصواب truth table

www.obeikaneducation.com

تحديد قيم الصواب: **العبارة** هي جملة خبرية إما أن تكون صحيحة أو خاطئة فقط، ولا تحتمل أي حالة أخرى. وصحة العبارة (T) أو خطؤها (F) تسمى **قيمة الصواب** لها، ويرمز للعبارة برمز مثل p أو q.

p : المستطيل شكل رباعيّ   قيمة الصواب: T

يفيد **نفي العبارة** معنى مُضادًّا لمعنى العبارة. وقيمة الصواب له هو عكس قيمة الصواب للعبارة الأصلية، فمثلًا: نفي العبارة p أعلاه هو $\sim p$ ، أو "ليس p" ، حيث:

$\sim p$: المستطيل ليس شكلاً رباعيًّا   قيمة الصواب: F

يمكن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و) ، (أو) لتكوين **عبارة مركبة**. وتُسمى العبارة المركبة التي تحتوي (و) **عبارة وصل**. وتكون عبارة الوصل صحيحة فقط عندما تكون جميع العبارات المكونة لها صحيحة.

p: المستطيل شكل رباعيّ   قيمة الصواب: T

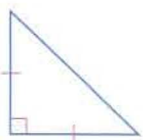
q: المستطيل مضلّع محدّب   قيمة الصواب: T

p و q: المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدّب.

بما أن كلتا العبارتين p و q صحيحتان، فإن عبارة الوصل p و q صحيحة.
تكتب عبارة الوصل p و q بالرموز على الصورة $p \wedge q$.

مثال 1 قيم الصواب لعبارات الوصل

استعمل العبارات p, q, r والشكل المجاور لكتابة عبارة الوصل في كل مما يأتي. ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:



p: الشكل مثلث.
q: في الشكل ضلعان متطابقان.
r: جميع زوايا الشكل حادة.

a) p و r
p و r: الشكل مثلث وجميع زوايا الشكل حادة.
العبارة p صحيحة، لكن العبارة r خاطئة. إذن، عبارة الوصل p و r خاطئة.

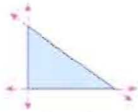
b) $q \wedge \sim r$
$q \wedge \sim r$: في الشكل ضلعان متطابقان، وليس جميع زوايا الشكل حادة.
بما أن كلا العبارتين q و $\sim r$ صحيحتان، فإن عبارة الوصل $q \wedge \sim r$ صحيحة.

تحقق من فهمك

1A) $p \wedge q$ **1B)** ليس p و ليس r

إرشادات للدراسة

المضلع المحدّب أو المقعر:
يكون المضلع محدبًا إذا لم يحتوِ امتداد أي من أضلاعه نقاطًا داخله، وبعكس ذلك يكون مقعرًا.


مضلع محدب


مضلع مقعر

تسمى العبارة المركبة التي تحتوي (أو) **عبارة فصل**.

p: درس مالك الهندسة.

q: درس مالك الكيمياء.

p أو q: درس مالك الهندسة أو درس مالك الكيمياء.

تكون عبارة الفَصْل صحيحة إذا كانت إحدى العبارات المكونة لها صحيحة، وتكون خاطئة إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة. فإذا درس مالك الهندسة أو الكيمياء أو كليهما، فإن عبارة الفصل p أو q صحيحة. وإذا لم يدرس مالك أيًا من الهندسة والكيمياء، فإن عبارة الفصل p أو q خاطئة.

تكتب عبارة الفصل p أو q بالرموز على الصورة $p \vee q$.

تنبيه !

نفي العبارة كما أن معكوس العدد الصحيح لا يكون دائمًا سالبًا، فإن نفي العبارة ليس بالضرورة أن يكون خاطئًا، وإنما له عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.

مثال 2 قيم الصواب لعبارات الفصل

استعمل العبارات p, q, r والصورة المجاورة لكتابة عبارة الفصل في كل مما يأتي. ثم أوجد قيمة الصواب لها. مفسِّرًا تبريرك:

p: يناير من أشهر **فصل** الربيع.

q: **عدد أيام** شهر يناير **30** يومًا فقط.

r: يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

a) q أو r

q أو r: **عدد أيام** شهر يناير 30 يومًا فقط أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

q أو r صحيحة لأن العبارة r صحيحة. ولا يؤثر كون العبارة q خاطئة.

b) $p \vee q$

$p \vee q$: يناير من أشهر **فصل** الربيع، أو **عدد أيام** شهر يناير 30 يومًا فقط.

بما أن كلًّا من العبارتين خاطئة، فإن $p \vee q$ خاطئة.

c) $\sim p \vee r$

$\sim p \vee r$: يناير ليس من أشهر **فصل** الربيع أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

$\sim p \vee r$ صحيحة، لأن $\sim p$ صحيحة و r صحيحة أيضًا.

تحقق من فهمك

2A) p أو r **2B)** $q \vee \sim r$ **2C)** $p \vee \sim q$

ملخص المفهوم نفي العبارة، عبارة الوصل، عبارة الفَصل

أضف إلى مطويتك

العبارة	التعبير اللفظي	الرموز
نفي العبارة	عبارة تفيد معنى مضادًا لمعنى العبارة الأصلية، وقيمة الصواب لها عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.	$\sim p$، وتُقرأ ليس p
عبارة الوصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).	$p \wedge q$، وتُقرأ p و q
عبارة الفَصْل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو).	$p \vee q$، وتقرأ p أو q

إرشادات للدراسة

جداول الصواب: كي يسهل عليك تذكر جداول الصواب لعبارتي الوصل والفصل، تذكر ما يأتي:

- عبارة الوصل تكون صحيحة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها صحيحة.
- عبارة الفصل تكون خاطئة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة.

يمكن تنظيم قيم الصواب للعبارات في جداول تسمى **جداول الصواب**. ويمكن استعمال جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارتي الوصل والفصل.

نفي العبارة

p	$\sim p$
T	F
F	T

عبارة الوصل

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارة الفصل

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وكذلك يمكنك استعمال جداول الصواب أعلاه لإنشاء جداول الصواب للعبارات المركبة الأكثر تعقيدًا.

مثال 3 إنشاء جداول الصواب

أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \vee q$.

1. أنشئ عمودًا لكل من $p, q, \sim p, \sim p \vee q$
2. ضع جميع حالات قيم صواب p, q
3. استعمل قيم صواب العبارة p لتحديد قيم صواب $\sim p$
4. استعمل قيم صواب $\sim p, q$ لتحديد قيم صواب $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

تحقق من فهمك

3) أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$.

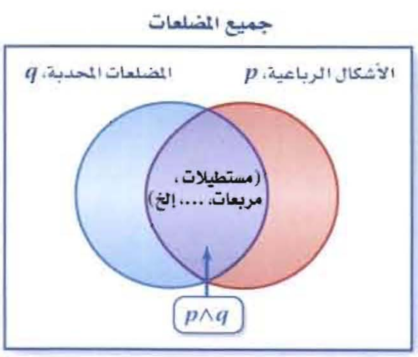
إرشادات للدراسة

تقاطع المجموعات
تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.

أشكال ڤن: يمكن تمثيل عبارة الوصل باستعمال أشكال ڤن. عُد إلى عبارة الوصل في بداية الدرس.

p و q: المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدب .

تعلم أن المستطيلات هي أشكال رباعية، وهي أيضًا مضلعات محدبة، يبين شكل ڤن أن المستطيلات تقع في منطقة تقاطع مجموعة الأشكال الرباعية ومجموعة المضلعات المحدّبة.



وبمعنى آخر: تقع المستطيلات ضمن مجموعة الأشكال الرباعية، وأيضًا ضمن مجموعة المضلعات المحدبة.

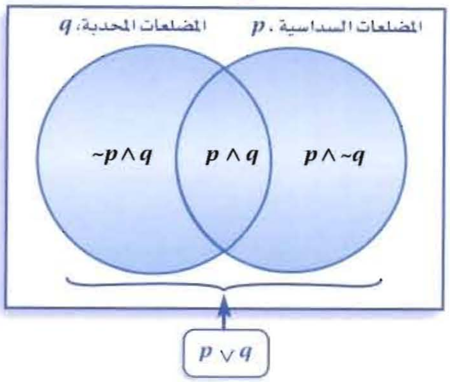
يمكن أيضًا تمثيل عبارة الفَصْل باستعمال أشكال ڤن. إليك العبارات الآتية:

p: الشكل سداسي.

q: الشكل مضلّع محدّب.

p أو q: الشكل سداسي أو مضلّع محدّب.

جميع المضلعات



في شكل ڤن المجاور تمثل عبارة الفَصل باتحاد المجموعتين، ويحوي الاتحاد جميع المضلعات التي هي إما سداسية أو محدبة أو كلاهما.

تتضمن عبارة الفَصْل المناطق الثلاث الآتية:

$p \wedge \sim q$ المضلعات السداسية غير المحدّبة.

$\sim p \wedge q$ المضلعات المحدبة غير السداسية.

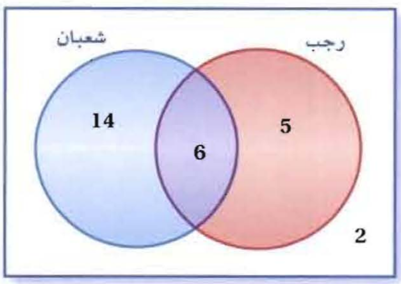
$p \wedge q$ المضلعات السداسية المحدبة.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **اتحاد المجموعات**
>
> **اتحاد مجموعتين هو مجموعة عناصرهما كلها.**

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال أشكال ڤن

بيئة: **يُظهر شكل ڤن أدناه عدد الأشخاص الذين شاركوا في حملة بيئية للتوعية بأهمية الاقتصاد في استعمال الورق أقيمت خلال شهري رجب وشعبان.**

حملة الاقتصاد في استعمال الورق



a) كم شخصًا شارك في الحملة لشهر رجب أو شعبان؟

يمثل اتحاد المجموعتين الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهري رجب أو شعبان.

فيكون 14 + 6 + 5 أو 25 شخصًا شاركوا في الحملة خلال الشهرين.

b) كم شخصًا شارك في الحملة خلال شهري رجب وشعبان؟

يمثل تقاطع المجموعتين عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين، لذلك هناك 6 أشخاص فقط شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين.

c) ماذا يمثل العدد 14 في الشكل؟

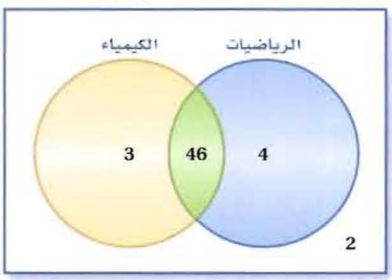
عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهر شعبان، ولم يشاركوا خلال شهر رجب.

> **الربط مع الحياة**
>
> **يمكن أن يحيط الورق الذي تستعمله الولايات المتحدة في يوم واحد الكرة الأرضية 20 مرة، ولك أن تتخيل عدد الأشجار التي تقطع لصنع هذه الكمية من الورق.**

تحقق من فهمك

4) اختبارات: يبين شكل ڤن المجاور عدد طلاب الصف الأول الثانوي الذين نجحوا والذين لم ينجحوا في اختباري الرياضيات أو الكيمياء.

اختباري الرياضيات والكيمياء



A) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء؟

B) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات واختبار الكيمياء؟

C) ما عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أي من الاختبارين؟

D) ما عدد طلاب الصف الأول الثانوي؟

تأكد

المثالان 1, 2 استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:

p: في الأسبوع الواحد سبعة أيام.

q: في اليوم الواحد 20 ساعة.

r: في الساعة الواحدة 60 دقيقة.

1) p و r **2)** $p \wedge q$ **3)** $q \vee r$

4) $\sim p$ أو q **5)** $p \vee r$ **6)** $\sim p \wedge \sim r$

المثال 3 **7)** أكمل جدول الصواب المجاور.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F		
F	T		
F	F		

أنشئ جدول صواب لكل من العبارتين المركبتين الآتيتين:

8) $p \wedge q$ **9)** $\sim p \vee \sim q$

المثال 4 **10)** **لغات:** استعن بشكل فن المجاور والذي يمثل عدد الطلاب الذين يدرسون اللغتين الفرنسية والإيطالية في معهد اللغات.

a) ما عدد الطلاب الذين يدرسون اللغة الإيطالية فقط؟

b) ما عدد الطلاب الذين يدرسون اللغتين الإيطالية والفرنسية معًا؟

c) ماذا يمثل العدد 11 في الشكل؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 استعمل العبارات p, q, r, s والخريطة المجاورة لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه. ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:

p: الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية.

q: تقع مكة المكرمة على الخليج العربي.

r: توجد حدود مشتركة للمملكة العربية السعودية مع العراق.

s: تقع المملكة العربية السعودية غربي البحر الأحمر.

11) p و r **12)** $p \wedge q$ **13)** $\sim r$ أو s

14) $q \vee r$ **15)** $\sim p$ و $\sim r$ **16)** $\sim p \vee \sim s$

المثال 3 أكمل جدولي الصواب الآتيين:

17)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T		F	
T		F	
F		T	
F		T	

18)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T			F	
T			T	
F			F	
F			T	

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية:

19) $p \wedge r$ 20) $r \wedge q$ 21) $p \vee r$

22) $q \vee r$ 23) $\sim p \wedge r$ 24) $\sim q \vee \sim r$

25) **كهرباء:** يوجد في أعلى وأسفل درج منزل محمد مفاتيح لإنارته . لاحظ محمد أنه عندما يكون مفتاح أعلى الدرج موجهًا إلى الأعلى، ومفتاح أسفل الدرج موجهًا إلى الأسفل يكون الدرج مضاءً.

أوضاع مفتاح الإنارة		الدرج مُضاء
أعلى الدرج	أسفل الدرج	
إلى الأعلى		
إلى الأعلى	إلى الأسفل	T

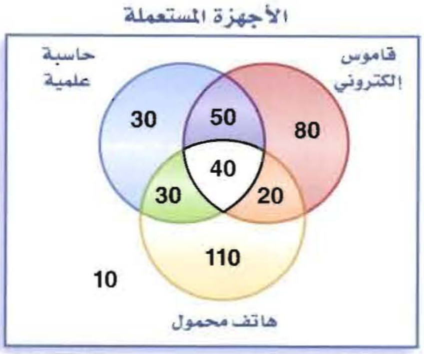
a) أكمل جدول الصواب المجاور.

b) إذا كان مفتاحا الإنارة أعلى وأسفل الدرج موجهين إلى الأعلى، فهل سيكون الدرج مضاءً؟ فسّر تبريرك.

c) إذا كان مفتاح أعلى الدرج موجهًا إلى الأسفل ومفتاح أسفل الدرج موجهًا إلى الأعلى، فهل سيكون الدرج مضاءً؟

d) بشكل عام، ما الوضع الذي يجب أن يكون عليه كلا المفتاحين كي يكون الدرج مضاءً؟

26) **إلكترونيات:** سُئل 330 شخصًا من الفئة العمرية بين 13–19 سنة عن الجهاز الذي يستعملونه من بين الهاتف المحمول والقاموس الإلكتروني والحاسبة العلمية، ومُثِّلت نتائج الاستطلاع بشكل ڤن المجاور.



a) ما عدد الذين يستعملون حاسبة علمية وقاموسًا إلكترونيًا فقط؟

b) ما عدد الذين يستعملون الأجهزة الثلاثة؟

c) ما عدد الذين يستعملون هاتفًا محمولًا فقط؟

d) ما عدد الذين يستعملون قاموسًا إلكترونيًا وهاتفًا محمولًا فقط؟

e) ماذا يمثل العدد 10 في الشكل؟

أنشئ جدول الصواب لكل من العبارات المركبة الآتية. ثم عيِّن قيمة الصواب لكل منها، إذا علمت أن العبارات المُعطاة بجانب كل عبارة مركبة صحيحة:

27) $p \wedge (q \wedge r); p, q$ 28) $p \wedge (\sim q \vee r); p, r$ 29) $(\sim p \vee q) \wedge r; q, r$

30) $p \vee (\sim q \wedge \sim r); p, q, r$ 31) $\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r); p, q, r$ 32) $(\sim p \vee q) \vee \sim r; p, q$

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: لنفي العبارة التي تحوي كلمة "جميع" أو "كل" يمكنك استعمال جملة "يوجد واحد على الأقل" أو "هناك واحد على الأقل". ولنفي العبارة التي تحوي كلمة "يوجد" يمكنك استعمال كلمة "جميع" أو "كل".

p: جميع المضلعات محدبة. $\sim p$: يوجد مضلع واحد على الأقل ليس محدبًا.

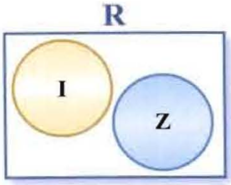
q: توجد مسألة ليس لها حل. $\sim q$: جميع المسائل لها حل.

انفِ كلًّا من العبارات الآتية:

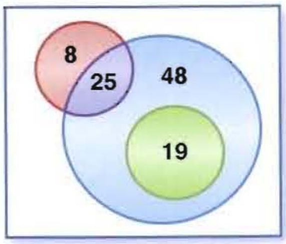
33) جميع المربعات مستطيلات. 34) يوجد على الأقل طالب واحد يدرس اللغة الفرنسية.

35) لكل عدد حقيقي جذر تربيعي حقيقي. 36) توجد قطعة مستقيمة ليس لها نقطة منتصف .

37) تبرير: تنتمي الأعداد غير النسبية (I)، والأعداد الصحيحة (Z) إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (R). معتمدًا على شكل ڤن المجاور، هل صحيح أحيانًا أم دائمًا، أن الأعداد الصحيحة هي أعداد غير نسبية أم ذلك غير صحيح أبدًا؟ فسّر تبريرك.



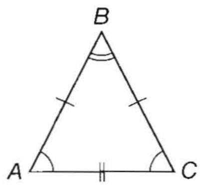
38) اكتب: صف موقفًا يمكن تمثيله بشكل ڤن الآتي.



39) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة مركبة صحيحة تحتوي « و » فقط.

تدريب على الاختبار المعياري

40) أي العبارات الآتية لها نفس قيمة صواب العبارة $AB = BC$؟



A $m\angle A = m\angle C$

B $m\angle A = m\angle B$

C $AC = BC$

D $AB = AC$

41) خمّن الحد التالي في النمط ... $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3$.

A $\frac{8}{3}$

B 4

C $\frac{11}{3}$

D $\frac{9}{3}$

مراجعة تراكمية

42) طعام: في كل يوم ثلاثاء من الأسابيع الأربعة الماضية، قدَّم مطعم سلطة فواكه هدية بعد كل وجبة. افترض جميل أنه سوف يتم تقديم سلطة فواكه يوم الثلاثاء القادم. ما نوع التبرير الذي استعمله جميل؟ فسر إجابتك. (الدرس 1-1)

خمّن الحد التالي في كل من المتتابعات الآتية. (مهارة سابقة)

43) $3, 5, 7, 9$

44) $1, 3, 9, 27$

45) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$

جبر: حل كلًّا من المعادلات الآتية: (مهارة سابقة)

46) $\frac{y}{2} - 7 = 5$

47) $3x + 9 = 6$

48) $4(m - 5) = 12$

49) $6(w + 7) = 0$

50) $2x - 7 = 11$

51) $\frac{y}{5} + 4 = 9$

استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة كل من التعابير الجبرية الآتية للقيم المعطاة.

52) $2y + 3x$ إذا كانت $x = -1, y = 3$

53) $4d - c$ إذا كانت $c = 2, d = 4$

54) $m^2 + 7n$ إذا كانت $n = -2, m = 4$

55) $ab - 2a$ إذا كانت $a = -2, b = -3$

1-3 العبارات الشرطية
Conditional Statements

فيما سبق:

درستُ استعمال المنطق وأشكال فن لتحديد قيم الصواب لعبارات النفي والوصل والفصل.

والآن:

- أحلل العبارة الشرطية (إذا كان... فإن...).
- أكتب العكس، والمعكوس، والمعاكس الإيجابي، لعبارات (إذا كان... فإن...).

المفردات:

العبارة الشرطية
conditional statement

الفَرض
hypothesis

النتيجة
conclusion

العبارات الشرطية المرتبطة
related conditionals

العكس
converse

المعكوس
inverse

المعاكس الإيجابي
contrapositive

التكافؤ المنطقي
logically equivalent

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

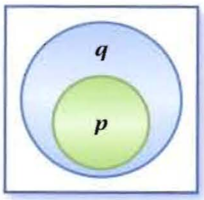
عند إجراء مكالمة هاتفية مع بعض المؤسسات، يحيلك جهاز الرد الآلي إلى قائمة من البدائل تختار منها القسم الذي تريد، ويُسمعك إرشادات بصيغة عبارات شرطية.

عبارة إذا كان... فإن... : **العبارة الشرطية** هي عبارة يمكن كتابتها على صورة (إذا كان ... فإن...). والإرشاد المبين في الصورة أعلاه مثال على العبارة الشرطية.

إذا كنت تريد التحدث إلى قسم خدمة العملاء، فاضغط الرقم 2 .

مفهوم أساسي — العبارة الشرطية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	النموذج
تكتب العبارة الشرطية (إذا كان ... فإن...) على الصورة (إذا كان p، فإن q)	$p \to q$ وتُقرأ إذا كان p فإن q، أو p تؤدي إلى q	 $p \to q$
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرةً **الفَرض**.	p	
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (فإن) مباشرة **النتيجة** .	q	

عندما تكتب العبارة الشرطية على صورة (إذا كان ... فإن ...)، يمكنك بسهولة تحديد الفَرض والنتيجة فيها.

مثال 1 تحديد الفَرض والنتيجة

حدد الفَرض والنتيجة في كل من العبارات الشرطية الآتية:

a) إذا كان الطقس ماطرًا ، فسوف أستعمل المظلة .

الفَرض: الطقس ماطر.

النتيجة: سوف أستعمل المظلة.

b) يقبل العدد القسمة على **10** إذا كان آحاده صفرًا.

الفَرض: آحاد العدد صفر.

النتيجة: يقبل العدد القسمة على 10.

تحقق من فهمك

1A) إذا كان لمضلع ستة أضلاع، فإنه سداسي.

1B) سيتم إنجاز طبعة ثانية من الكتاب، إذا بيعت جميع نسخ الطبعة الأولى.

تكتب كثير من العبارات الشرطية دون استعمال الكلمتين إذا و فإن. ولكتابة تلك العبارات على صورة (إذا كان ... فإن...) حدد الفَرض والنتيجة.

تحصل على خصم تشجيعي	عند شراء أي من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء
النتيجة	الفرض

إذا اشتريت أيًا من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء ، فإنك تحصل على خصم تشجيعي.

تذكر أن النتيجة تعتمد على الفرض.

قراءة الرياضيات

(إذا) و (فإن) كلمة (إذا) ليست جزءًا من الفَرض، كذلك كلمة (فإن) ليست جزءًا من النتيجة.

مثال 2 كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا كان... فإن...)

حدّد الفَرض والنتيجة في كل عبارة شرطية مما يأتي، ثم اكتبها على صورة (إذا كان... فإن...):

a) الثدييات هي حيوانات من ذوات الدم الحار.

الفَرض: الحيوان من الثدييات.

النتيجة: هو من ذوات الدم الحار.

إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه من ذوات الدم الحار.

b) المنشور الذي قاعدتاه مضلعان منتظمان، يكون منتظمًا.

الفَرض: قاعدتا المنشور مضلعان منتظمان.

النتيجة: يكون المنشور منتظمًا.

إذا كانت قاعدتا المنشور مضلعين منتظمين، فإنه يكون منتظمًا.

تحقق من فهمك

2A) يمكن تبديل 5 أوراق نقدية من فئة الريال بورقة نقد واحدة من فئة 5 ريالات.

2B) مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين يساوي $180°$.

تذكر أن الفرض والنتيجة والعبارة الشرطية نفسها جميعها عبارات منطقية قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة.

قال عمر لزملائه: إذا أنهيت واجبي المنزلي، فإني سوف ألعب الكرة معكم .

الفرض	النتيجة	العبارة الشرطية	
أنهى عمر الواجب المنزلي	يلعب عمر الكرة مع زملائه	إذا أنهيت واجبي المنزلي ، فإني سوف ألعب الكرة معكم.	
T	T	T	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي، ولعب الكرة مع زملائه، فإن العبارة الشرطية تكون صحيحة؛ لأنه أوفى بوعده.
T	F	F	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي ولم يلعب الكرة مع زملائه، تكون العبارة الشرطية خاطئة؛ لأنه لم يفِ بوعده.
F	T	T	إذا لم يُنه عمر واجبه، ولعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا ولكن النتيجة صحيحة. وبما أن العبارة الشرطية لا تقرر شيئًا في حالة عدم حل عمر واجبه، فإن الأمر راجع إلى عمر، إما أن يلعب الكرة مع زملائه أو لا، وتكون العبارة الشرطية صحيحة بغض النظر عما يفعله عمر.
F	F	T	إذا لم يُنه عمر واجبه، ولم يلعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا، والنتيجة خاطئة. ولنفس السبب في الحالة السابقة تكون العبارة الشرطية صحيحة.

قراءة الرياضيات

ليست خاطئة إذا كانت العبارة المنطقية ليست خاطئة؛ فإنها تكون صحيحة.

لاحظ أن العبارة الشرطية تكون صحيحة في جميع الحالات، إلا أن يكون الفرض صحيحًا والنتيجة خاطئة.

تنبيه!

تحليل العبارات الشرطية

عند تحليل العبارة الشرطية لا تحاول أن تحدد ما إذا كان للعبارة معنى أم لا، بل حلل شكل العبارة لتحدد إن كانت النتيجة تتبع الفرض منطقيًا.

يمكن استعمال النتائج السابقة لإنشاء جدول الصواب للعبارات الشرطية.

العبارات الشرطية		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون العبارة الشرطية خاطئة فقط عندما يكون الفرض صحيحًا والنتيجة خاطئة.

عندما يكون الفرض خاطئًا تكون العبارة الشرطية صحيحة بغض النظر عن النتيجة.

لإثبات صحة العبارة الشرطية، يجب عليك إثبات أنه عندما يكون الفرض صحيحًا، فإن النتيجة صحيحة أيضًا. ولإثبات أن العبارة الشرطية خاطئة يكفي أن تعطي مثالًا مضادًا .

مثال 3 قيم الصواب للعبارات الشرطية

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت صحيحة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًا:

a) عند قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر، يكون الناتج عددًا صحيحًا أيضًا.

مثال مضاد: عند قسمة 1 على 2، يكون الناتج 0.5.

بما أن 0.5 ليس عددًا صحيحًا، فإن النتيجة خاطئة. وبما أنك استطعت إيجاد مثال مضاد، فالعبارة الشرطية خاطئة.

b) إذا كان الشهر القادم رمضان، فإن هذا الشهر هو شهر شعبان.

رمضان هو الشهر الذي يلي شهر شعبان؛ إذن الفرض صحيح، والنتيجة صحيحة أيضًا، والعبارة الشرطية صحيحة.

c) إذا كان للمثلث أربعة أضلاع، فإنه مضلع مقعر.

لا يمكن أن يكون للمثلث أربعة أضلاع؛ إذن الفرض خاطئ، والعبارة الشرطية صحيحة دائمًا.

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$

3B) إذا كانت $\sqrt{x} = -1$ ، فإن $(-1)^2 = -1$.

العبارات الشرطية المرتبطة: يرتبط بالعبارة الشرطية المعطاة **عبارات** شرطية أخرى تسمى **العبارات الشرطية المرتبطة**.

مفهوم أساسي العبارات الشرطية المترابطة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	أمثلة
العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن كتابتها على صورة إذا كان p، فإن q .	$p \longrightarrow q$	إذا كان $m\angle A = 35°$، فإن $\angle A$ حادة.
ينتج **العكس** من تبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.	$q \longrightarrow p$	إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$.
ينتج **المعكوس** من نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	$\sim p \longrightarrow \sim q$	إذا كان $m\angle A \neq 35°$، فإن $\angle A$ ليست حادة.
ينتج **المعاكس الإيجابي** من نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \longrightarrow \sim p$	إذا لم تكن $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A \neq 35°$.

إذا كانت العبارة الشرطية صحيحة، فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صحيحين، بينما يكون المعاكس الإيجابي صحيحًا. ويكون المعاكس الإيجابي خاطئًا إذا كانت العبارة الشرطية خاطئة.

وبالمثل فإن عكس العبارة الشرطية ومعكوسها إما أن يكونا صحيحين معًا أو خاطئين معًا. وتسمى العبارات التي لها نفس قيم الصواب **عبارات متكافئة منطقيًّا**.

مفهوم أساسي — العبارات المتكافئة منطقيًا

أضف إلى مطويتك

- **العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئان منطقيًا.**
- **عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئان منطقيًا.**

يمكنك استعمال التكافؤ المنطقي للتحقق من قيمة الصواب لعبارة ما. لاحظ في المثال 4 أدناه، أن كلًّا من العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي صحيحان. وأن كلًّا من العكس والمعكوس خاطئان.

الربط مع الحياة

تُعد الأسود والنمور من فصيلة القطط، وهي القطط الوحيدة التي تزأر، ولا تموء.

مثال 4 من واقع الحياة — العبارات الشرطية المرتبطة

طبيعة: **اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد ما إذا كان أي منها صحيحًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.**

الأسود هي قطط تستطيع أن تزأر.

العبارة الشرطية: أعد كتابة العبارة على صورة (إذا كان... فإن...) .
إذا كان الحيوان أسدًا، فإنه قط يستطيع أن يزأر.
اعتمادًا على المعلومات إلى اليمين، تكون العبارة صحيحة.

العكس: إذا كان الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه يكون أسدًا.
مثال مضاد: النمر قط يستطيع أن يزأر، لكنه ليس أسدًا.
إذن فالعكس خاطيء.

المعكوس: إذا لم يكن الحيوان أسدًا، فإنه لا يكون قطًّا يستطيع أن يزأر.
مثال مضاد: النمر ليس أسدًا، ولكنه قط يستطيع أن يزأر.
إذن المعكوس خاطيء.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه لا يكون أسدًا.
اعتمادًا على المعلومات في الهامش تكون العبارة صحيحة .

تحقق: تحقق أن للعبارات المتكافئة منطقيًّا قيم الصواب نفسها.
العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي كلاهما صحيح. ✓
العكس والمعكوس كلاهما خاطيء. ✓

✓ تحقق من فهمك

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل من العبارتين الشرطيتين الآتيتين، ثم حدد ما إذا كان أي منها صحيحًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا فأعط مثالًا مضادًّا.

4A) الزاويتان اللتان لهما القياس نفسه متطابقتان.

4B) الفأر من القوارض.

تأكد

المثال 1 **حدد الفرض والنتيجة في كل من العبارات الشرطية الآتية:**

1) إذا كان اليوم هو الجمعة، فإن يوم غد هو السبت.

2) إذا كان $2x + 5 > 7$، فإن $x > 1$.

3) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن مجموع قياسيهما $180°$.

4) إذا نتج عن تقاطع مستقيمين زوايا قائمة، فإنهما متعامدان.

المثال 2 **اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا كان... فإن...).**

5) الشخص الذي تجاوز عمره 18 عامًا يمكنه استخراج رخصة قيادة.

6) يحتوي الجبن على عنصر الكالسيوم.

7) قياس الزاوية الحادة بين $0°$ و $90°$.

8) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا.

9) **مطر:** هناك أنواع مختلفة من هطل المطر، تتشكل في ظروف مختلفة. اكتب العبارات الشرطية الثلاث الآتية على صورة (إذا كان... فإن...).

a) يتكاثف بخار الماء في الغلاف الجوي فيسقط على شكل مطر.

b) يتجمد بخار الماء الشديد البرودة في الغيوم الركامية فيسقط على شكل بَرَد.

c) يكون الهطل على شكل ثلج عندما تكون درجة الحرارة متدنية جدًّا إلى حدِّ التجمد في الغلاف الجوي.

المثال 3 **حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت العبارة صحيحة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.**

10) إذا كان $x^2 = 16$، فإن $x = 4$.

11) إذا كنت تعيش في الرياض، فإنك تعيش في الكويت.

12) إذا كان يوم غد هو الجمعة، فإن اليوم هو الخميس.

13) إذا كان للحيوان قرنان، فإنه كبش.

14) إذا كان قياس الزاوية القائمة $95°$، فإن النحلة تكون سحلية.

15) إذا استطاع الفيل أن يطير، فإن $2 + 5 = 7$.

المثال 4 **اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. ثم حدد ما إذا كان أي منها صحيحًا أم خاطئًا، وإذا كان خاطئًا فأعط مثالًا مضادًّا.**

16) إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 ، فإنه يقبل القسمة على 4.

17) جميع الأعداد الكلية أعداد صحيحة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **حدِّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:**

18) إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

19) إذا كنت قائد مجموعتنا، فإنني سأتبعك.

20) إذا كان $3x - 4 = 11$، فإن $x = 5$

21) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.

المثال 2 **اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا كان ... فإن ...).**

22) احصل على قارورة ماء مجانًا عند شرائك خمس قوارير.

23) كل من حضر الحفل حصل على هدية.

24) يمثل تقاطع مستويين مستقيمًا.

25) مساحة الدائرة تساوي πr^2.

26) قياس الزاوية القائمة $90°$.

27) **كيمياء:** اكتب العبارة الآتية على صورة (إذا كان... فإن...).

ينصهر الفسفور عند درجة $44°$ سيليزية.

28) **أحياء:** يتغير الماء على الأرض باستمرار عبر عملية تُسمّى دورة الماء. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدنى الشكل على صورة (إذا كان... فإن...).

a) جريان الماء السطحي يصب في المسطحات المائية.

b) تعيد النباتات الماء إلى الهواء من خلال عملية النتح.

c) تعيد المسطحات المائية الماء إلى الهواء عن طريق التبخر.

المثال 3 **حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي. وإذا كانت صحيحة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا:**

29) إذا كان العدد فرديًا، فإنه يقبل القسمة على 5.

30) إذا كان الأرنب حيوانًا برمائيًا، فإن هذا الفصل هو فصل الصيف.

31) إذا كانت جدة في اليمن، فإن صنعاء هي عاصمة المملكة العربية السعودية.

32) إذا نتج اللون الأبيض من مزج اللونين الأزرق والأحمر، فإن $0 = 2 - 3$.

33) إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.

34) إذا كان الحيوان طائرًا، فإنه يكون نسرًا.

35) إذا كان الموز أزرق، فإن التفاح من الخضراوات.

الربط مع الحياة

موطن ظباء الدكدك هو أفريقيا، وهي ظباء صغيرة الحجم، يبلغ متوسط طولها من قدم واحد إلى ما يزيد عن قدمين قليلًا، وتتميز أجسامها بخطوط تشبه خطوط الحُمر الوحشية.

طبيعة: **استعمل العبارة أدناه لكتابة كل من العبارات الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد قيمة الصواب لكل منها، وإذا كانت أي منها خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.**

"الحيوان الذي تظهر على جسمه خطوط هو الحمار الوحشي".

36) عبارة شرطية

37) عكس العبارة الشرطية

38) معكوس العبارة الشرطية

39) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية

المثال 4 اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل من العبارات الشرطية الآتية، ثم حدد ما إذا كان أي منها صحيحًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا .

40) إذا كنت تعيش في الدمام، فإنك تعيش في المملكة العربية السعودية.

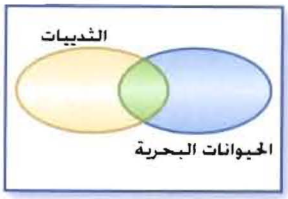
41) إذا كان الطائر نعامة، فإنه لا يستطيع أن يطير.

42) جميع المربعات مستطيلات.

43) جميع القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.

44) المثلث القائم الزاوية يحوي زاوية قياسها $90°$.

استعمل أشكال ڤن أدناه لتحديد قيمة الصواب لكل من العبارات الشرطية الآتية. وفسّر تبريرك.



45) إذا كانت الدالة غير خطية، فإنها تكون دالة تربيعية.

46) إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه لا يكون حيوانًا بحريًّا.

47) إذا كانت الشجرة متساقطة الأوراق، فإنها لا تكون دائمة الخضرة.

48) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي أحد قوانين المنطق باستعمال العبارات الشرطية.

a) **منطقيًا:** اكتب ثلاث عبارات شرطية صحيحة، بحيث تكون نتيجة كل عبارة فرضًا للعبارة التي تليها.

b) **بيانيًا:** ارسم شكل ڤن يوضح هذه السلسلة من العبارات الشرطية .

c) **منطقيًا:** اكتب عبارة شرطية مستعملًا فرض العبارة الأولى، ونتيجة العبارة الثالثة. إذا كان فرض العبارة الأولى صحيحًا. فهل تكون العبارة الشرطية الناتجة صحيحة؟

d) **لفظيًا:** إذا أُعطيت العبارتين الشرطيتين: إذا كان a ، فإن b ، وإذا كان b، فإن c، فاكتب تخمينًا حول قيمة الصواب للعبارة c عندما تكون العبارة a صحيحة. فسّر تبريرك.

إرشادات للدراسة

أشكال ڤن المستطيل الذي يحيط أشكال ڤن يمثل المجموعة الكلية. يُقسّم شكل ڤن الذي يحوي دائرتين المجموعة الكلية إلى أربع مناطق على الأكثر. أما الشكل الذي يحتوي ثلاث دوائر فيقسّم المجموعة الكلية إلى 8 مناطق على الأكثر. ويمكن إثبات أن شكل ڤن الذي يحتوي n من الدوائر يقسم المجموعة الكلية إلى $2n$ من المناطق على الأكثر.

مسائل مهارات التفكير العليا

49) **اكتشف الخطأ:** حدد كل من أحمد وماجد قيمة الصواب للعبارة الشرطية "إذا كان العدد 15 أوليًّا، فإن العدد 20 يقبل القسمة على 4" . كلاهما يعتقد أن هذه العبارة صحيحة، ولكنهما برّرا ذلك بتبريرين مختلفين. هل كان أي منهما مصيبًا؟ فسر تبريرك.

أحمد	ماجد
النتيجة صحيحة؛ لأن العدد 20 يقبل القسمة على 4؛ إذن العبارة الشرطية صحيحة.	الفَرض خاطئ؛ لأن 15 ليس عددًا أوليًّا؛ إذن العبارة الشرطية صحيحة.

50) **تحدٍّ:** لقد تعلمت أن العبارات التي لها قيم الصواب نفسها هي عبارات متكافئة منطقيًّا. استعمل التكافؤ المنطقي لبناء جدول صواب يلخص قيم الصواب للعبارة الشرطية $p \rightarrow q$، وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي.

51) **تبرير:** عبارة شرطية فرضها صحيح، ونتيجتها خاطئة. هل يكون معكوسها صحيحًا؟

52) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة شرطية بحيث يكون العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لها جميعها صحيحة. فسّر تبريرك.

53) **تحدٍّ:** تجد أدناه معكوس العبارة الشرطية A. اكتب العبارة الشرطية A وعكسها ومعاكسها الإيجابي. فسّر تبريرك.

إذا لم تدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام، فإنك ذهبت إلى المسجد متأخرًا.

54) **اكتب:** صف العلاقة بين العبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي.

تدريب على الاختبار المعياري

55) إذا كان مجموع قياسي زاويتين $90°$ فإنهما متتامتان.
أي العبارات الآتية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه؟

A إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما $90°$.

B إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما $90°$.

C إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي $90°$.

D إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي $90°$.

56) **جبر:** ما أبسط صورة للعبارة $\dfrac{10a^2 - 15ab}{4a^2 - 9b^2}$ ؟

A $\dfrac{5a}{2a - 3b}$ **C** $\dfrac{a}{2a + 3b}$

B $\dfrac{5a}{2a + 3b}$ **D** $\dfrac{a}{2a - 3b}$

مراجعة تراكمية

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية. (الدرس 2-1)

57) p و q 58) p أو $\sim q$ 59) $\sim p \wedge q$ 60) $\sim p \wedge \sim q$

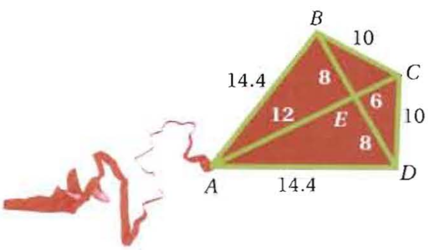
اكتب تخمينًا معتمدًا على المعلومات المعطاة في كل مما يأتي. وارسم شكلاً يوضح تخمينك (الدرس 1-1)

61) تقع النقاط J, H, K على أضلاع مختلفة لمثلث.

62) $R(3, -4), S(-2, -4), T(0, -4)$.

63) $A(-1, -7), B(4, -7), C(4, -3), D(-1, -3)$

64) **طائرة ورقية:** تصنع الطائرات الورقية بشكل يشبه الماسة؛ لذلك تسمى الطائرة الماسية. سمّ جميع القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

جبر: حدد العملية التي استعملتها لتحويل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) في كل مما يأتي.

65) $8(y - 11) = 32$ (1)
$y - 11 = 4$ (2)

66) $x + 9 = 4 - 3x$ (1)
$4x + 9 = 4$ (2)

67) $\frac{1}{3}m = 2$ (1)
$m = 6$ (2)

1-3 العبارات الشرطية الثنائية
Biconditinal Statments

يُعدُّ سعد أفضل طلاب المدرسة في لعبة كرة القدم. وإذا انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية. فإذا مثّل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه يكون قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

p: انتُخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

q: مثَّل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$p \to q$: إذا انتُخب سعد من قبل فريق كرة القدم المدرسي فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$q \to p$: إذا مثَّل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

في هذه الحالة، العبارة الشرطية $p \to q$ وعكسها $q \to p$ كلاهما صحيح. وتسمى العبارة المركبة الناتجة من وصل هاتين العبارتين باستعمال (و) **عبارة شرطية ثنائية**.

مفهوم أساسي — العبارات الشرطية الثنائية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العبارة الشرطية الثنائية هي عبارة وصل مكونة من العبارة الشرطية وعكسها.

الرموز: $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ، ويُرمز لها اختصارًا $(p \leftrightarrow q)$، وتُقرأ p إذا وفقط إذا كان q.

إذن تُكتب العبارة الشرطية الثنائية السابقة على النحو:

$p \leftrightarrow q$: يُنتخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي إذا وفقط إذا مثّل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

مثال

اكتب كلًّا من العبارتين الشرطيتين الثنائيتين الآتيتين على صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًا.

a) تكون الزاوية قائمة إذا وفقط إذا كان قياسها $90°$.

العبارة الشرطية: إذا كان قياس الزاوية $90°$، فإنها زاوية قائمة.

العكس: إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها $90°$.

كل من العبارة الشرطية وعكسها صحيحان؛ إذن العبارة الشرطية الثنائية صحيحة.

b) $x > -2$ إذا وفقط إذا كان x موجبًا.

العبارة الشرطية: إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $x > -2$. العبارة الشرطية صحيحة.

العكس: إذا كان $x > -2$، فإن x عدد موجب. افترض أن $x = -1$ ؛ إذن $-1 > -2$، لكن -1 ليس عددًا موجبًا؛ إذن عكس العبارة الشرطية خاطئ، والعبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

تمارين:

اكتب كل عبارة شرطية ثنائية مما يأتي على صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًا.

1) تكون الزاويتان متتامتين إذا وفقط إذا كان مجموع قياسيهما $90°$.

2) لا دوام في المدارس إذا وفقط إذا كان اليوم هو الجمعة.

3) يتقاطع المستقيمان إذا وفقط إذا كانا غير أفقيين.

4) $|2x| = 4$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$.

1-4 التبرير الاستنتاجي
Deductive Reasoning

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.

والآن:

- أستعمل قانون الفصل المنطقي.
- أستعمل قانون القياس المنطقي.

المفردات:

التبرير الاستنتاجي
deductive reasoning

قانون الفَصْل المنطقي
Law of Detachment

قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما يقوم المحققون بتحليل قضية جنائية، فإنهم يجمعون الأدلة مثل بصمات الأصابع، ويستعملونها لتقليص قائمة الاتهام، باستبعاد المتهمين وتحديد الجاني في نهاية الأمر.

قانون الفَصْل المنطقي: تُسمى الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني **التبرير الاستنتاجي** .

وكما ترى فإن التبرير الاستنتاجي يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة، على خلاف التبرير الاستقرائي الذي تستعمل فيه أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.

مثال 1 من واقع الحياة **التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي**

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كل مما يأتي:

a) في كل مرة يلعب ماجد كرة القدم وهو يرتدي حذاءه المفضل، يسجل هدفًا واحدًا على الأقل. ولقد ارتدى حذاءه المفضل، وذهب ليلعب في مباراة هذه الليلة، وقد استنتج أنه سيسجل هدفًا واحدًا على الأقل في هذه المباراة .

اعتمد ماجد على نمط من المشاهدات للتوصل إلى النتيجة، فهو بذلك استعمل التبرير الاستقرائي.

b) إذا تأخر مشاري عن دفع قسط سيارته، فإنه سيقوم بدفع غرامة تأخير مقدارها 150 ريالًا. تأخر مشاري عن دفع قسط هذا الشهر، فاستنتج أن عليه دفع غرامة مقدارها 150 ريالًا.

اعتمد مشاري على حقائق ينص عليها عقد البيع في الحصول على النتيجة؛ لذا فقد استعمل التبرير الاستنتاجي.

تحقق من فهمك

1A) يشتهر مطعم بتقديم أطعمة حارة المذاق، ويظهر بجانب هذه الأطعمة رمز خاص في قائمة الطعام. طلب علي صنفًا من القائمة موجود بجانبه هذا الرمز. فاستنتج أن الصنف الذي طلبه حار المذاق.

1B) دُعي خالدٌ إلى حفل عشاء، وقد حضر جميع المدعوين الحفل؛ إذن فقد حضر خالد الحفل.

يستعمل المثال المضاد لإثبات عدم صحة التخمين الذي يتم التوصل إليه عن طريق التبرير الاستقرائي، ولا يعد المثال طريقة صحيحة لإثبات صحة التخمين. فلإثبات صحة التخمين يجب استعمال التبرير الاستنتاجي، وأحد أشكاله **قانون الفَصْل المنطقي**.

مفهوم أساسي

قانون الفَصْل المنطقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صحيحة، والفرض p صحيحًا، فإن النتيجة q تكون صحيحة أيضًا.

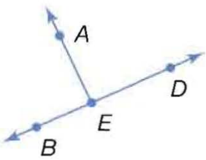
مثال: المعطيات : إذا لم يكن في السيارة وقود ، فإنها لن تعمل .
لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.

نتيجة صحيحة: لن تعمل سيارة عبدالله .

عندما تكون العبارات المعطاة صحيحة، فإن النتائج التي تتوصل إليها بتطبيق التبرير الاستنتاجي حتمًا تكون صحيحة.

مثال 2 استعمال قانون الفَصْل المنطقي

حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة في كل مما يأتي أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسّر تبريرك.



a) **المعطيات:**
- إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن ضلعيهما غير المشتركين يكوّنان نصفي مستقيم متعاكسين.
- $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم.

النتيجة: $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان.

الخطوة 1: حدّد الفرض p والنتيجة q للعبارة الشرطية الصحيحة.

p: زاويتان متجاورتان على مستقيم.

q: ضلعاهما غير المشتركين يكونان نصفي مستقيم متعاكسين.

الخطوة 2: حلل النتيجة.

العبارة المعطاة $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم تحقق الفرض.

إذن p عبارة صحيحة. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان، التي تمثل q نتيجة صحيحة.

b) **المعطيات:**
- عندما يذهب مالك إلى النادي الرياضي، فإنه يرتدي ملابس رياضية.
- ارتدى مالك ملابس رياضية.

النتيجة: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

الخطوة 1: p: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

q: ارتدى مالك ملابس رياضية.

الخطوة 2: العبارة المعطاة "ارتدى مالك ملابس رياضية" تحقق النتيجة q للعبارة الشرطية الصحيحة. لكن كون العبارة الشرطية صحيحة، ونتيجتها صحيحة أيضًا، لا يعني صحة الفرض، فقد يرتدي مالك ملابس رياضية، ولا يذهب إلى النادي الرياضي؛ وبذلك تكون النتيجة خاطئة.

✓ تحقق من فهمك

2A) **المعطيات:**
- إذا كانت ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.
- النقاط A, B, C تقع في المستوى G.

النتيجة: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

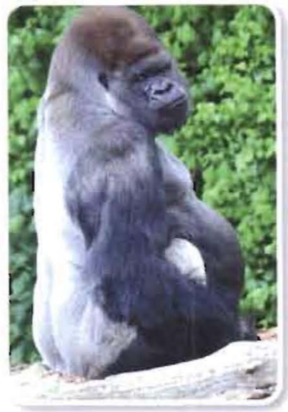
2B) **المعطيات:**
- إذا أحضر الطالب موافقة من ولي أمره، يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.
- أحضر سلمان موافقة من ولي أمره.

النتيجة: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.

إرشادات للدراسة

المعلومات المعطاة
من الآن فصاعدًا اعتبر جميع المعطيات في الكتاب صحيحة.

يمكنك استعمال أشكال ڤن لاختبار صحة الاستنتاج.

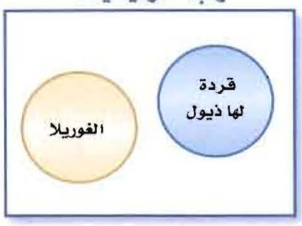


مثال 3 الحكم على النتيجة باستعمال أشكال ڤن

طبيعة: حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.

المعطيات:
- إذا كان الحيوان غوريلا فليس له ذيل.
- في الحديقة حيوان من رتبة الرئيسيات ليس له ذيل.

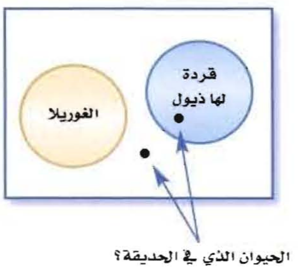
النتيجة: الحيوان الذي في الحديقة غوريلا.



افهم: ارسم شكل ڤن بناءً على المعطيات، لا يوجد للغوريلا ذيل، لذا ارسم دائرة تمثل الغوريلا لا تتقاطع مع دائرة القردة التي لها ذيول.

خطط: وبما أن الحيوان الذي في الحديقة **ليس** له ذيل؛ لذا فإنه لا ينتمي لمجموعة القردة التي لها ذيول.

حل: وهذا يضعه ضمن الدائرة التي تمثل الغوريلا أو خارجها، وعليه فالاستنتاج غير صحيح.



تحقق: نعرف من المعطيات أن الغوريلا وأنواع القرود الأخرى تقع ضمن رتبة الرئيسيات، لكن **ليس** للغوريلا ذيل، ونعرف أن الحيوان الذي في الحديقة **ليس** له ذيل، ويمكن أن يكون قردًا لا ذيل له وليس غوريلا؛ لذا فالاستنتاج غير صحيح. ✔

الربط مع الحياة

إحدى طرائق تمييز الغوريلا عن الأنواع الأخرى في رتبة الرئيسيات، النظر إلى الذيل، فليس للغوريلا ذيل، بينما يوجد لمعظم أنواع القردة ذيول.

✔ تحقق من فهمك

3) **المعطيات:**
- إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.
- الشكل A مربع.

النتيجة: الشكل A مضلع.

قانون القياس المنطقي: **قانون القياس المنطقي** هو طريقة أخرى للتبرير الاستنتاجي، ويمكنك باستعمال هذا القانون الحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صحيحتين، عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

إرشادات للدراسة

الدليل المنطقي يكون مدعومًا بقوانين المنطق، ويختلف عن الدليل الإحصائي المدعوم بالأمثلة أو البيانات.

مفهوم أساسي قانون القياس المنطقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q$, $q \to r$ صحيحتين، فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صحيحة أيضًا.**

مثال: **المعطيات:** **إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقودًا،**
إذا كسبت نقودًا، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

نتيجة صحيحة: **إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.**

من المهم أن تتذكر أنه إذا لم تكن نتيجة العبارة الأولى فرض العبارة الثانية، فلا يمكنك استعمال قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صحيحة.

مثال 4 من الاختبار المعياري

أي العبارات الآتية تنتج منطقيًا من العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.

(2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.

A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.

B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.

C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.

D لا توجد نتيجة صحيحة.

اقرأ فقرة الاختبار

افترض أن p, q, r تمثل أجزاء العبارتين الشرطيتين المعلومتين.

p: أمطرت اليوم

q: تأجلت المباراة

r: اعتذر أحد الفريقين

حُل فقرة الاختبار

حلّل منطقيًا العبارتين الشرطيتين باستعمال الرموز.

العبارة (1): $p \longrightarrow q$ العبارة (2): $r \longrightarrow q$

يمكن اعتبار كل من العبارتين الشرطيتين صحيحة. ومع ذلك لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن نتيجة العبارة الشرطية الأولى ليست فرضًا للعبارة الشرطية الثانية. وعلى الرغم من أنه يحتمل أن تكون العبارات A, B, C صحيحة إلا أن المنطق الذي استعمل فيها غير صحيح؛ لذلك تكون D هي الإجابة الصحيحة.

تحقق من فهمك

4) أي العبارات الآتية تنتج منطقيًا من العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فسوف تكون مرهقًا.

(2) إذا كنت مرهقًا، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

F إذا كنت مرهقًا، فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

G إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

H إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيدًا، فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

J لا توجد نتيجة صحيحة.

مثال 5 تطبيق قوانين التبرير الاستنتاجي

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة"، وفسّر تبريرك.

المعطيات:
- **إذا كان عمرك 18 عامًا، يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.**
- **عُمر سلمان 18 عامًا.**

p: عمرك 18 عامًا.

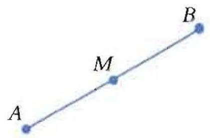
q: يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

بما أن عمر سلمان 18 عامًا، فذلك يحقق الفرض p . وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة "يمكن أن يتقدم سلمان للحصول على رخصة القيادة" نتيجة صحيحة.

تحقق من فهمك

5) المعطيات: تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساويان. M نقطة منتصف $\overline{AB}$.



تأكد

المثال 1 **حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كل مما يأتي:**

1) جميع الطلاب الذين تم تكريمهم معدلهم العام يزيد على 95% . محمد من الطلاب الذين تم تكريمهم؛ إذن معدل محمد العام يزيد على 95%.

2) لاحظ خالد أن جاره يسقي أشجار حديقته كل يوم جمعة. واليوم هو الجمعة، فاستنتج أن جاره سوف يسقي أشجار حديقته اليوم.

المثال 2 **حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.**

3) **المعطيات:** إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2. العدد 12 يقبل القسمة على 4.

النتيجة: العدد 12 يقبل القسمة على 2.

4) **المعطيات:** إذا ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا، فسوف يكون مرهقًا في اليوم التالي. فيصل مرهق.

النتيجة: ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا.

المثال 3 **حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.**

5) **المعطيات:** إذا كان الشاطئ عامًّا، فإنه لا يوجد فيه منقذون.
الشاطئ الجنوبي لا يوجد فيه منقذون.

النتيجة: الشاطئ الجنوبي عام.

6) **المعطيات:** إذا اجتاز الطلاب اختبار القبول، فسوف يُقبَلون في الكلية.
اجتاز عبدالله اختبار القبول.

النتيجة: سوف يُقبَل عبدالله في الكلية.

المثال 4 **7)** **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية تنتج منطقيًّا من العبارتين (1)، (2)؟

(1) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن قياس إحدى زواياه °90.

(2) إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث °90، فإن زاويتيه الحادتين تكونان متتامتين.

A إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإنه يحوي زاوية قياسها °90.

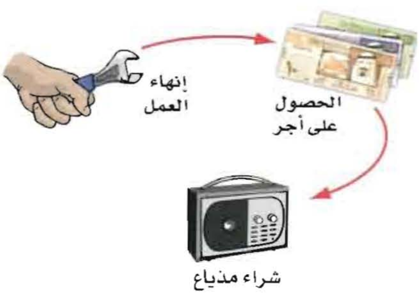
B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث °90، فإن زاويتيه الحادتين لا تكونان متتامتين.

C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زاويتيه الحادتين متتامتان.

D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث °90، فإنه لا يكون مثلثًا قائم الزاوية.

المثال 5 **استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة، فاكتب "لا نتيجة صحيحة". فسِّر تبريرك.**

8) **المعطيات:** إذا أنهى كمال عمله، فإنه سيحصل على أجر. إذا حصل كمال على أجر، فإنه سيشتري مذياعًا.



9) **المعطيات:** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.
$\angle 1 \cong \angle 2$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كل مما يأتي:**

10) تنص التعليمات المدرسية على أنه إذا تأخرت الطالبة عن المدرسة خمس مرات، فسوف تُعطى تنبيهًا. تأخرت فاطمة خمس مرات عن المدرسة؛ لذلك سوف تُعطى تنبيهًا.

11) لاحظ طبيب الأسنان أن فهدًا يأتي في موعده المحدد، فاستنتج أن فهدًا سوف يأتي في الموعد المحدد للزيارة القادمة.

12) إذا قرّر سعد الذهاب إلى الحفل، فلن يحضر تدريب كرة القدم هذه الليلة. ذهب سعد إلى الحفل. ولم يحضر تدريب كرة القدم.

13) لاحظت علياء أنه عندما تأخذ دروس تقوية، فإن درجاتها تتحسن. أخذت علياء درس تقوية، واستنتجت أن درجاتها سوف تتحسن.

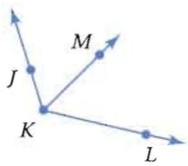
المثال 2 **حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة في كل مما يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفسّر تبريرك.**

14) **المعطيات:** الزوايا القائمة متطابقة. $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان.

النتيجة: $\angle 1 \cong \angle 2$.

15) **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا فإن له أربع زوايا قائمة.
الشكل $ABCD$ له أربع زوايا قائمة .

النتيجة: الشكل $ABCD$ مربع.



16) **المعطيات:** منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين.
$\overrightarrow{KM}$ منصف لـ $\angle JKL$.

النتيجة: $\angle JKM \cong \angle MKL$.

17) **المعطيات:** إذا بيعت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء، فسوف يُقام في قاعة المدينة.
بيعت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء.

النتيجة: سوف يُقام الحفل في قاعة المدينة.

المثال 3 **حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفسّر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.**

18) **المعطيات:** إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من الصفر السيليزية، فمن المحتمل أن يسقط الثلج.
لم تنخفض درجة الحرارة عن الصفر السيليزية في يوم الإثنين.

النتيجة: لم يسقط الثلج يوم الإثنين.

19) **المعطيات:** إذا كان الشخص يسكن مدينة الرياض، فإنه لا يسكن بجوار الشاطئ.
لا يسكن حمود بجوار الشاطئ.

النتيجة: يسكن حمود في مدينة الرياض.

20) **المعطيات:** يرتدي بعض الممرضين زيًّا موحَّدًا أزرق اللون. يعمل أحمد ممرضًا .

النتيجة: يرتدي أحمد الزي الموحَّد الأزرق اللون.

المثال 4, 5

21) **الألعاب الأولمبية:** حقق العداء السعودي هادي صوعان إنجازًا سعوديًّا كبيرًا في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000م في سباق 400m حواجز. حيث أنهى السباق في زمن قدره 47.53 ثانية.

(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحل في المركز الثاني.

(2) إذا حلّ العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل العبارتين (1)، (2) للحصول على نتيجة صحيحة.

الربط مع الحياة

يعتبر هادي صوعان أول رياضي سعودي يحرز ميدالية أولمبية.

استعمل قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية. وإذا تعذّر ذلك، فاكتب "لا نتيجة صحيحة". فسّر تبريرك.

22) إذا حصلت شيماء على معدل 98 فأكثر، فإن اسمها سوف يُكتب في لوحة الشرف لهذا العام.

سوف يتم تكريم الطالبات اللاتي تُكتبُ أسماؤهن في لوحة الشرف لهذا العام.

23) إذا تعامد مستقيمان في مستوى، فإنهما سيتقاطعان ويكوّنان زوايا قائمة.

المستقيمان r و s في نفس المستوى ويكوّنان زوايا قائمة.

24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان.

إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة، فاكتب "لا نتيجة صحيحة"، وفسر تبريرك.

25) **المعطيات:** إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$.
$\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان.

26) **المعطيات:** المثقفون يحبون المطالعة.
إذا كنت تحب المطالعة، فأنت من زوار المكتبة العامة.

27) **المعطيات:** إذا كنت رياضيًّا، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.
إذا كنت تحب المنافسة، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتب:** فسر لماذا لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي لاستنتاج نتيجة من العبارتين الشرطيتين الآتيتين:

إذا ارتديت قفازات الشتاء، فإنك ستشعر بدفء في يديك.

إذا لم تكن يداك دافئتين، فإن قفازاتك رقيقة.

29) **تحدٍّ:** استعمل الرموز $\wedge, \vee, \longleftrightarrow$ لتمثيل كل من قانون **الفصل** المنطقي وقانون القياس المنطقي بالرموز. لتكن p هي الفرض، و q هي النتيجة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين يمكن تطبيق قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صحيحة منهما، موضحًا تلك النتيجة.

31) **تحدٍّ:** افترض أن كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تُحقق نظرية فيثاغورس، فهل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة؟ علّل إجابتك.
إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يحقق الخاصية B.

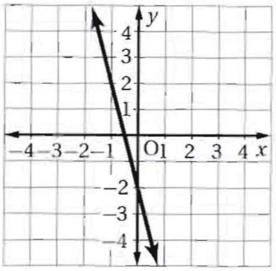
32) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة.

تدريب على الاختبار المعياري

33) بين أيًا من العبارات الآتية تنتج منطقيًا من العبارتين التاليتين.
إذا اشتريت وجبتين، فإنك ستحصل على علبة عصير مجانًا.
اشترى خليل وجبتين.

A اشترى خليل وجبة واحدة فقط.
B سيحصل خليل على وجبة مجانية.
C سيحصل خليل على علبتي عصير مجانًا
D حصل خليل على علبة عصير مجانًا.

34) إجابة شبكية : ما ميل المستقيم الممثل بيانيًا؟



A $\frac{1}{4}$
B $-\frac{1}{4}$
C 4
D -4

مراجعة تراكمية

تسويق: استعمل المعلومات الآتية في حل السؤالين 35, 36. (الدرس 3-1)

يستعمل مديرو التسويق عبارات مكتوبة على صورة (إذا كان ... فإن ...) لترويج سلعهم وخدماتهم. يوجد إعلان في إحدى محلات صيانة الحواسيب جاء فيه: "إذا كنت تبحث عن السرعة والأمان في حاسوبك، فعليك بمحل النجوم لصيانة الحواسيب".

35) اكتب عكس العبارة الشرطية.

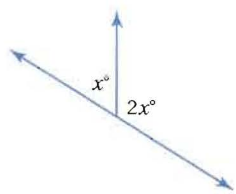
36) ما الرسالة التي يريد الإعلان إيصالها إلى الناس حول محل النجوم؟

أنشئ جدول صواب لكل من العبارات المركبة الآتية: (الدرس 2-1)

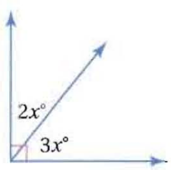
37) a و b
38) $\sim p$ أو $\sim q$
39) k و $\sim m$
40) $\sim y$ أو z

جبر: أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية: (مهارة سابقة)

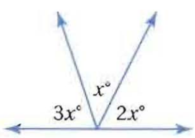
41)



42)

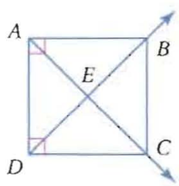


43)



استعد للدرس اللاحق

هل يمكن افتراض صحة أيٍّ من العبارات الآتية اعتمادًا على الشكل المجاور؟ فسّر إجابتك:



44) $\angle DAB$ زاوية قائمة.

45) $\angle AEB \cong \angle DEC$

46) $\angle DAE \cong \angle ADE$

47) $AB \perp BC$

1-5 المسلمات والبراهين الحرة
Postulates and Paragraph Proofs

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستنتاجي بتطبيق قانون الفَصْل المنطقي وقانون القياس المنطقي.

والآن:

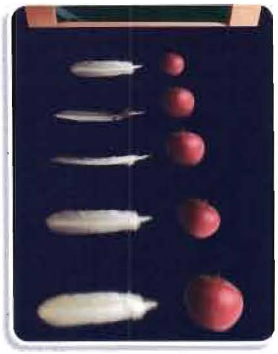
- أتعرف المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات وأستعملها.
- أكتب برهانًا حرًّا.

المفردات:

المسلّمة
axiom or postulate
البرهان
proof
النظرية
theorem
البرهان الحر
paragraph proof

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

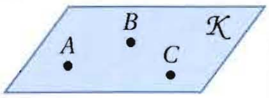
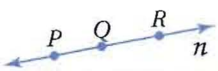
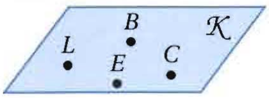
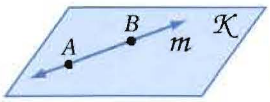


تُظهِر التجربة في الصورة المجاورة سقوط الريشة والتفاحة بنفس السرعة في حجرة مفرَّغة من الهواء، وتوضح هذه التجربة قوانين نيوتن في الجاذبية الأرضية والقصور الذاتي التي تُقبل على أنها حقائق أساسية في الفيزياء. وفي الهندسة أيضًا توجد قوانين تقبل على أنها صحيحة دون برهان.

النقاط والمستقيمات والمستويات: **المسلّمة** أو البدهية هي عبارة تُقبل على أنها صحيحة دون برهان. درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، ويمكن اعتبار هذه المبادئ الأساسية مسلّمات.

مسلمات — النقاط والمستقيمات والمستويات

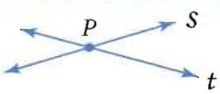
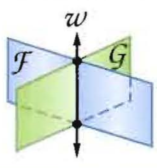
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي		مثال
1.1 أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.		المستقيم n هو المستقيم الوحيد المار بالنقطتين P و R.
1.2 أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.		المستوى $\mathcal{K}$ هو المستوى الوحيد الذي يحتوي النقاط A و B و C والتي لا تقع على استقامة واحدة.
1.3 كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل.		المستقيم n يحتوي النقاط P و Q و R.
1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.		يحتوي المستوى $\mathcal{K}$ النقاط L و B و C و E، وهي ليست على استقامة واحدة.
1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.		تقع النقطتان A و B في المستوى $\mathcal{K}$، ويمر بهما المستقيم m؛ إذن المستقيم m يقع كليًا في المستوى $\mathcal{K}$.

تتعلق المسلّمات الآتية بتقاطع المستقيمات والمستويات.

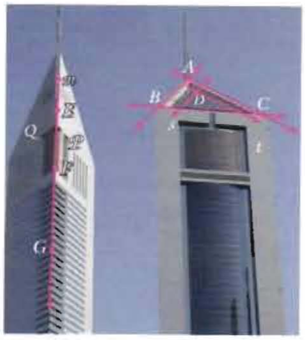
مسلمتان — تقاطع المستقيمات والمستويات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي		مثال
1.6 إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.		المستقيمان s و t يتقاطعان في النقطة P.
1.7 إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.		يتقاطع المستويان $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ في المستقيم w.

تُعد المسلّمات أساسًا للبراهين والتبريرات المتعلقة بالنقاط والمستقيمات والمستويات.

مثال 1 من واقع الحياة تحديد المسلّمات



هندسة معمارية: **اشرح كيف توضح الصورة صحة كل من العبارات الآتية، ثم اذكر المسلّمة التي استعملتها لبيان صحة كل عبارة.**

a) يحتوي المستقيم m على النقطتين F و G. ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m.

حافة البناية عبارة عن المستقيم m. والنقاط E, F, G واقعة على هذه الحافة؛ لذا فهي تقع على المستقيم m. وبتطبيق المسلمة 1.3، التي تنص على أن كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل، يتضح أن العبارة صحيحة.

b) يتقاطع المستقيمان s و t في النقطة D.

الشبكة المثلثة أعلى واجهة البناية تتشكل من مستقيمات متقاطعة، والمستقيمان s و t **يتقاطعان** في نقطة واحدة فقط هي D، وبتطبيق المسلّمة 1.6 التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، يتضح أن العبارة صحيحة.

تحقق من فهمك

1A) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

1B) يتقاطع المستويان $\mathcal{P}$ و Q في المستقيم m.

يمكنك استعمال المسلّمات لتفسير تبريرك في أثناء تحليل بعض العبارات.

مثال 2 تحليل العبارات باستعمال المسلّمات

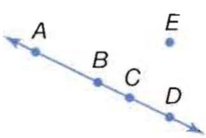
حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.

a) إذا تقاطع مستقيمان واقعان في مستوى واحد، فإن نقطة تقاطعهما تقع أيضًا في المستوى الذي يحويهما.

صحيحة دائمًا؛ تنص المسلّمة 1.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع بكامله في ذلك المستوى. بما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه، فإن أي نقطة واقعة عليهما بما فيها نقطة التقاطع تقع في المستوى نفسه.

b) أي أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

صحيحة أحيانًا: تنص المسلّمة 1.3 على أن كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل، وهذا يعني أنه يمكن أن يحتوي المستقيم نقطتين أو أكثر؛ إذن **يمكن** أن تكون أربع نقاط ليست على استقامة واحدة مثل A, E, C, D في الشكل المجاور، أو تكون على استقامة واحدة مثل A, B, C, D.



تحقق من فهمك

2A) المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى.

2B) تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين.

البرهان الحر: عند إثباتك نتيجة تخمين ما، فإنك تستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرض إلى النتيجة التي تريد إثبات صحتها بكتابة **برهان**. وهو دليل منطقي فيه كل عبارة تكتبها تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها.

إرشادات للدراسة

المفاهيم غير المعرفة النقطة والمستقيم والمستوى هي مفاهيم غير معرفة. وتصف المسلّمات التي تعلمتها في هذا الدرس بعض العلاقات الخاصة بين هذه المفاهيم.

إرشادات للدراسة

نظام المسلمات هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.

في حال إثبات صحة عبارة (أو تخمين) فإنها تُسمى **نظرية**، ويمكن بعد ذلك استعمالها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى .

مفهوم أساسي

خطوات كتابة البرهان

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.

الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: برِّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المعطيات (الفرض)
↓
العبارات والمبررات
↓
المطلوب (النتيجة)

أحد أنواع البراهين هو **البرهان الحر**، وفيه تُكتب فقرة تُفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطى.

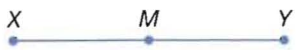
مثال 3 كتابة البرهان الحر

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $XM \cong MY$.

الخطوتان 1 و 2

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$.

المطلوب: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$



الخطوتان 3 و 4

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، فإنه بحسب تعريف نقطة منتصف القطعة المستقيمة تكون $\overline{XM}$ و $\overline{MY}$ لهما الطول نفسه. ومن تعريف التطابق، إذا كانت القطعتان المستقيمتان لهما الطول نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين.

الخطوة 5

لذا $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

تحقق من فهمك

3) إذا علمت أن C تقع بين A و B ، حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

إرشادات حل المسألة

العمل عكسيًا إحدى استراتيجيات كتابة البرهان هي العمل عكسيًا، وذلك بأن تبدأ من المطلوب وتعمل عكسيًا خطوة بخطوة حتى تصل إلى المعطيات.

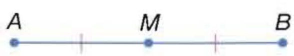
عند إثبات صحة التخمين يصبح نظرية، ويمكن استعماله في براهين أخرى. ويعرف التخمين في مثال 3 بنظرية نقطة المنتصف.

نظرية 1.1

نظرية نقطة المنتصف

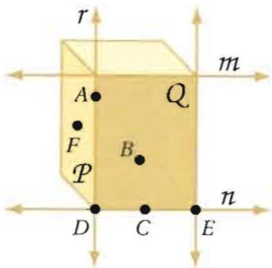
أضف إلى مطويتك

إذا كانت M نقطة منتصف AB ، فإن $AM \cong MB$.



تأكـد

المثال 1 **اشرح كيف توضح الصورة صحة كل من العبارات الآتية، ثم اذكر المسلّمة التي استعملتها لبيان صحة كل عبارة.**



1) يتقاطع المستويان $\mathcal{P}$ و Q في المستقيم r.

2) يتقاطع المستقيمان r و n في النقطة D.

3) يحتوي المستقيم n النقاط C, D, E .

4) يحتوي المستوى $\mathcal{P}$ النقاط A, F, D .

5) يقع المستقيم n في المستوى Q.

6) المستقيم r هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطتين A و D.

المثال 2 **حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر تبريرك.**

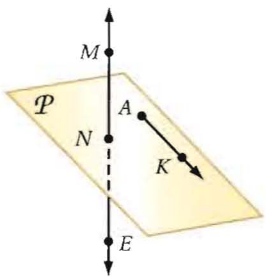
7) تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم.

8) يحتوي المستقيم r النقطة P فقط.

9) يمر مستقيم واحد فقط بنقطتين معلومتين.

في الشكل المجاور: يقع $\overrightarrow{AK}$ في المستوى $\mathcal{P}$ وتقع النقطة M على $\overleftrightarrow{NE}$.

اذكر المسلّمة التي تثبت صحة كل من العبارات الآتية:



10) M, K, N تقع في مستوى واحد.

11) يحتوي $\overleftrightarrow{NE}$ النقطتين N ، M.

12) النقطتان N, K واقعتان على استقامة واحدة.

13) النقاط N, K, A تقع في نفس المستوى.

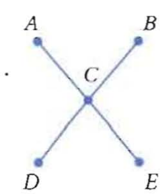
14) **رياضة:** أُقيمت بطولة شاركت فيها ثماني فرق كرة قدم للناشئين.

a) ما عدد المباريات التي ستجرى في الدور الأول؟

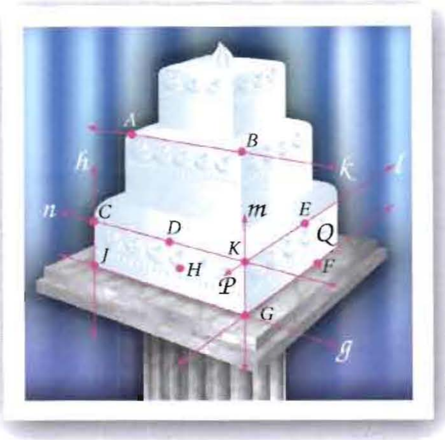
b) ارسم شكلًا يوضح عدد مباريات الدور الأول. أي مسلّمة يمكنك استعمالها لتبرير هذا الشكل؟

c) أوجد طريقة حسابية لإيجاد عدد المباريات التي ستجرى في الدور الأول، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في البطولة؟

المثال 3 15) **برهان:** في الشكل المجاور $\overline{AE} \cong \overline{DB}$، والنقطة C نقطة منتصف كل من $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$ اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overline{AC} = \overline{CB}$.



تدرب وحل المسائل



المثال 1 **كعك:** **اشرح كيف توضح الصورة صحة كل من العبارات الآتية، ثم اذكر المسلّمة التي استعملتها لبيان صحة كل عبارة.**

16) المستقيمان n و ℓ يتقاطعان في النقطة K.

17) المستويان Q , $\mathcal{P}$ يتقاطعان في المستقيم m.

18) النقاط D, K, H تحدد مستوى.

19) تقع النقطة D أيضًا على المستقيم n المار بالنقطتين C , K.

20) النقطتان H , D تقعان على استقامة واحدة.

21) النقاط E, F, G تقع في نفس المستوى.

22) يقع $\overleftrightarrow{EF}$ في المستوى Q.

23) يتقاطع المستقيمان h , g في النقطة J .

المثال 2 **حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.**

24) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C التي لا تقع على استقامة واحدة.

25) تمر ثلاثة مستقيمات على الأقل بالنقطتين J و K.

26) إذا وقعت النقاط M, N, P في المستوى χ، فإنها تقع على استقامة واحدة.

27) تقع النقطتان X و Y في المستوى z. وأي نقطة على استقامة واحدة مع X و Y تقع أيضًا في المستوى z.

28) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

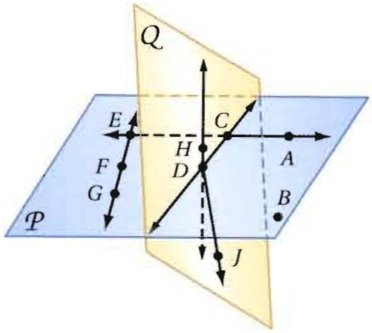
المثال 3 **29)** **برهان:** إذا علمت أن Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ، وأن Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$، فأثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$.

30) **برهان:** النقطة L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$، ويتقاطع $\overline{JK}$ مع $\overline{MK}$ في النقطة K . إذا كان $\overline{MK} \cong \overline{JL}$ ، فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.

31) **خرائط:** أمام خالد طريقان للانتقال من الموقع A إلى الموقع B كما يظهر في الخريطة المجاورة. إذا كان الحد الأعلى للسرعة المسموح بها على الطريق (1) هو 90 km/h، وعلى الطريق (2) هو 110 km/h .

a) أي الطريقين يبدو أقصر طولًا؟ فسّر تبريرك.

b) إذا كانت المسافة من A إلى B عبر الطريق (1) تساوي 16.8 km، والمسافة بينهما عبر الطريق (2) تساوي 17.6 km، فأي الطريقين أسرع وصولًا إذا قاد خالد سيارته بالحد الأعلى للسرعة المسموح بها؟



في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ واقعان في المستوى $\mathcal{P}$،

$\overleftrightarrow{DH}$ و $\overleftrightarrow{DJ}$ واقعان في المستوى Q. اذكر المسلّمة التي يمكن

استعمالها لإثبات صحة كل عبارة فيما يأتي :

32) النقطتان C و B على استقامة واحدة.

33) يحتوي $\overleftrightarrow{EG}$ النقاط E, F, G .

34) النقطتان D و F تقعان على استقامة واحدة.

35) النقاط C, D, B تقع في نفس المستوى.

36) يحتوي المستوى Q النقاط C, H, D, J .

37) يتقاطع المستوى $\mathcal{P}$ مع المستوى Q في $\overleftrightarrow{CD}$.

38) **هندسة عمارة :** تُصمم أسطح المنازل بطرائق هندسية مختلفة لمنع تسرب الماء. من هذه الطرائق استعمال مواد عازلة لا تسمح بنفاذ الماء، أو أن تُبنى مائلة؛ لتسهيل انحدار الماء عنها بتأثير الجاذبية الأرضية. ويقاس ميل السطح بقسمة الارتفاع مقيسًا بالبوصة على المسافة الأفقية مقيسة بالقدم. استعمل العبارات أدناه لتكتب برهانًا حرًّا للعبارة الآتية: ميل السطح في تصميم أحمد غير كافٍ.

- عند استعمال مواد عازلة للماء يجب أن يكون الميل على الأقل $\frac{1}{4}$ بوصة لكل قدم.
- حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.
- صمم أحمد منزلًا بحيث لا تستعمل فيه مواد عازلة.
- الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.

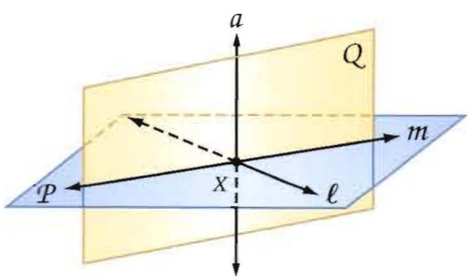
الربط مع الحياة

يمكنك استعمال العبارة في السؤال 40 عند تجميع قطع الأثاث، إذ يعامد الرف ظهر خزانة الكتب إذا كان حرف واحد فقط منه عموديًا على ظهر الخزانة.

مسائل مهارات التفكير العليا

39) **مسألة مفتوحة :** ارسم شكلًا يحقق خمسًا من المسلمات السبعة التي تعلمتها في هذا الدرس. اشرح كيف تحققت كل منها في الشكل.

40) **تحدٍّ :** استعمل العبارة الصحيحة الآتية مع التعريفات والمسلّمات التي تعلمتها للإجابة عن السؤالين الآتيين:



يكون المستويان متعامدين إذا وفقط إذا احتوى أحدهما مستقيمًا عموديًا على المستوى الآخر.

a) يمر مستوى واحد فقط في نقطة معلومة، بحيث يكون عموديًا على مستقيم مُعطى يمر بالنقطة أيضًا.
إذا كان المستوى Q عموديًّا على المستقيم ℓ عند النقطة X ، ووقع ℓ في المستوى $\mathcal{P}$، فماذا تستنتج؟

b) يمر مستقيم واحد فقط في نقطة معلومة، بحيث يكون عموديًا على مستوى معطى يحتوي النقطة. إذا كان المستوى Q عموديًا على المستوى $\mathcal{P}$ عند النقطة X ، والمستقيم a يقع في المستوى Q، فماذا تستنتج؟

41) **اكتشف الخطأ:** قام كل من عمر وسعيد بكتابة برهان لإثبات أنه إذا كانت $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ ، وكانت A, B, D على استقامة واحدة، فإن B نقطة منتصف $\overline{AD}$. وقد بدأ كل منهما برهانه بطريقة مختلفة. هل أي منهما بدأ برهانه بطريقة صحيحة؟ فسر إجابتك.

عمر	سعيد
إذا كانت B نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن B تقسم $\overline{AD}$ إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.	$\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ والنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسِّر تبريرك أو أعط مثالًا مضادًا:

42) أي ثلاثة نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.

43) لأي ثلاث مستقيمات في المستوى نفسه نقطتا تقاطع فقط.

44) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين كل مما يأتي: المفاهيم غير المعرفة، المفردات المعرفة، المسلّمات، النظريات.

تدريب على الاختبار المعياري

45) أي العبارات الآتية ليست صحيحة؟

F تحدد أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة مستوى واحد فقط.

G يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

H يوجد على الأقل مستقيمان يحويان النقطتين نفسيهما.

J تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

46) ما أكبر عدد من المناطق التي تتشكل عندما تقطع ثلاثة مستقيمات مختلفة دائرة؟

A 4   **C** 6

B 5   **D** 7

مراجعة تراكمية

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة". فسر تبريرك. (الدرس 4-1)

47) (1) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فإنهما لا تكونان متجاورتين على مستقيم.

(2) إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فهما غير متطابقتين.

48) (1) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$.

(2) $\angle EFG$ حادة.

اكتب العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا كان ... فإن ...). (الدرس 3-1)

49) يُكتب اسم الطالب المتفوق في لوحة الشرف.

50) يخشى البطل أن يخسر.

استعد للدرس اللاحق

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

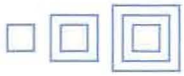
51) $4x - 3 = 19$

52) $\frac{1}{3}x + 6 = 14$

53) $5(x^2 + 2) = 30$

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها . (الدرس 1-1)

1) $5, 5, 10, 15, 25, ...$

2) ...... 

أعط مثالًا مضادًّا يبين أن كلًّا من التخمينين الآتيين خاطئ: (الدرس 1-1)

3) إذا كان $AB = BC$ ، فإن B نقطة منتصف $\overline{AC}$.

4) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^3 > n$.

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك. (الدرس 1-2)

p: في الأسبوع الواحد 7 أيام.

q: في اليوم الواحد 24 ساعة.

r: صَفَر هو الشهر الذي يأتي قبل شهر محرم.

5) $p \wedge r$

6) p و q

7) $p \wedge \sim r$

8) أكمل الجدول الآتي. (الدرس 1-2)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	F		
F	T		
F	F		
T	T		

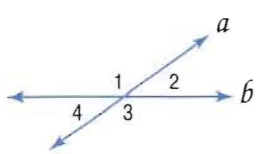
حدد الفرض والنتيجة في كل من العبارات الشرطية الآتية: (الدرس 1-3)

9) إذا كان للمضلع خمسة أضلاع، فإنه خماسي.

10) إذا كان $4x - 6 = 10$ ، فإن $x = 4$.

11) الزاوية التي قياسها أقل من $90°$ تكون حادة.

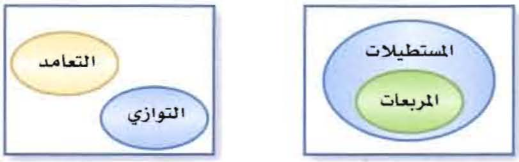
حدد قيمة الصواب لكل من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. وإذا كانت أيهما صحيحة، ففسِّر تبريرك، وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا. (الدرس 1-3)



12) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

13) $\angle 1$ و $\angle 4$ متطابقتان.

استعمل أشكال فن أدناه لتحديد قيمة الصواب لكل من العبارات الشرطية الآتية. وفسر تبريرك . (الدرس 1-3)



14) إذا كان المضلع مربعًا، فإنه يكون مستطيلًا.

15) إذا كان المستقيمان متعامدين، فإنهما لا يمكن أن يكونا متوازيين.

16) **كرة القدم:** تقابل فريقا الفرسان والفهود في المباراة النهائية. معتمدًا على المعطيات، حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا في كل مما يأتي. وفسِّر تبريرك. (الدرس 1-4)

المعطيات: الفريق الفائز بالكأس هو الفريق الذي يحرز أهدافًا أكثر في نهاية المباراة.
أحرز فريق الفرسان 3 أهداف، بينما أحرز فريق الفهود هدفين.

النتيجة: فاز فريق الفرسان بالكأس.

17) **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية تنتج منطقيًا من العبارتين (1) و (2)؟ (الدرس 1-4)

(1) إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك 16 سنة على الأقل.

(2) إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإن عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة.

A إذا كان عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

B إذا كان عمرك لا يؤهِّلك لقيادة السيارة، فأنت في المرحلة المتوسطة.

C إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة .

D لا يمكن التوصل إلى استنتاج .

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسر تبريرك. (الدرس 1-5)

18) النقاط J, K, L, N ليست على استقامة واحدة، وتقع جميعها في المستوى $\mathcal{M}$.

19) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين R , S.

20) المستقيم a يحتوي النقطة Q فقط.

1-6 البرهان الجبري
Algebraic Proof

فيما سبق:
درستُ استعمال المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات لكتابة برهان حر.

والآن:
- أستعمل الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.
- أستعمل خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

المفردات:
البرهان الجبري
algebraic proof
البرهان ذو العمودين
two-column proof

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
تحتوي بعض السيارات شاشة لعرض درجة الحرارة الخارجية بالمقياس الفهرنهايتي أو المقياس السيليزي. ويحدد المقياس الفهرنهايتي درجة تجمد الماء عند $32°$ ، ودرجة غليانه عند $212°$، أما المقياس السيليزي فيحدد درجة تجمد الماء عند $0°$ ، وغليانه عند $100°$.

يمكنك استعمال البرهان الجبري لإثبات أنه إذا كانت العلاقة التي تربط هذين المقياسين معطاة بالصيغة. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، فإنها تعطى أيضًا بالصيغة $F = \frac{9}{5}C + 32$.

البرهان الجبري: الجبر نظام مكون من مجموعات من الأعداد، وعمليات عليها وخصائص تمكنك من إجراء هذه العمليات. والجدول الآتي يلخص عدة خصائص للأعداد الحقيقية التي ستدرسها في الجبر.

مفهوم أساسي — **خصائص الأعداد الحقيقية** — أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصية الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
خاصية الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
خاصية الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a \cdot c = b \cdot c$.
خاصية القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن، $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$ ، يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي a
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

البرهان الجبري هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية. وتبرر خصائص المساواة أعلاه كثيرًا من العبارات المستعملة في البراهين الجبرية.

مثال 1 تبرير كل خطوة عند حل المعادلة

أثبت أنه إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

$-5(x + 4) = 70$	المعادلة الأصلية، أو المعطيات
$-5 \cdot x + (-5) \cdot 4 = 70$	خاصية التوزيع
$-5x - 20 = 70$	بالتبسيط
$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$	خاصية الجمع للمساواة
$-5x = 90$	بالتبسيط
$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$	خاصية القسمة للمساواة
$x = -18$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1A) إذا كان $4 + (-5) = -1$، فإن $x + 4 + (-5) = x - 1$

1B) إذا كانت $5 = y$ ، فإن $y = 5$

1C) أثبت أنه إذا كان $2x - 13 = -5$، فإن $x = 4$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

يوضح المثال 1 برهان العبارة الشرطية "إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$". لاحظ في هذا البرهان أن العمود الأيمن يحتوي تفصيل الطريقة التي تقود إلى الحل خطوة بخطوة، أما العمود الأيسر فيحتوي مبرر كل خطوة.

وتكتب براهين النظريات والتخمينات الهندسية عادةً على هذا النحو فيما يسمى **البرهان ذا العمودين** ، حيث العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازٍ.

إرشادات للدراسة

الخوارزميات

الخوارزمية هي سلسلة من الخطوات المتبعة لإجراء عملية أو حل مسألة ما. يمكن اعتبار البرهان من أنواع الخوارزميات لأنه يتم خطوة بخطوة.

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة البرهان الجبري

علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايتية إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايتية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

اكتب أولًا المعطيات والمطلوب إثباته.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$	1) معطيات
2) $\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32)$	2) خاصية الضرب للمساواة
3) $\frac{9}{5}C = F - 32$	3) بالتبسيط
4) $\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $\frac{9}{5}C + 32 = F$	5) بالتبسيط
6) $F = \frac{9}{5}C + 32$	6) خاصية التماثل للمساواة

إرشادات للدراسة

رياضيات ذهنية

إذا سمح معلمك، يمكنك حذف بعض الخطوات، وذلك لأن بعض الحسابات يمكن إجراؤها ذهنيًا؛ ففي المثال 2 يمكن حذف العبارتين 2 و 4 ليصبح مبرر العبارة 3 "خاصية الضرب للمساواة"، والعبارة 5 "خاصية الجمع للمساواة".

تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

2A) إذا كان $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$، فإن $x = 3$.

2B) **فيزياء:** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بسرعة ابتدائية u وسرعة نهائية v في زمن t تعطى بالعلاقة $d = t \cdot \frac{u + v}{2}$ ، فإن $u = \frac{2d}{t} - v$.

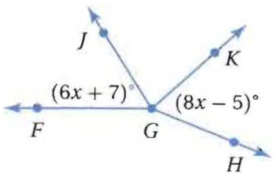
البرهان الهندسي: بما أن في الهندسة أيضًا متغيرات، وأعدادًا وعمليات، فإن معظم خصائص المساواة المستعملة في الجبر صحيحة أيضًا في الهندسة. فأطوال القطع المستقيمة وقياس الزوايا هي أعداد حقيقية؛ لذا يمكن استعمال خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كانت $AB = CD$، و $CD = EF$، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

يمكن استعمال هذه الخصائص لكتابة براهين هندسية .

مثال 3 كتابة البرهان الهندسي

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كانت $\angle FGJ \cong \angle JGK , \angle JGK \cong \angle KGH$، فإن $x = 6$.



المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH,$
$m\angle FGJ = (6x + 7)°, m\angle KGH = (8x - 5)°$

المطلوب: $x = 6$

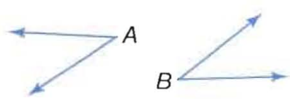
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle FGJ \cong \angle JGK; \angle JGK \cong \angle KGH$	1) معطيات
2) $m\angle FGJ = m\angle JGK; m\angle JGK = m\angle KGH$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle FGJ = m\angle KGH$	3) خاصية التعدي للمساواة
4) $6x + 7 = 8x - 5$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5$	5) خاصية الجمع للمساواة
6) $6x + 12 = 8x$	6) بالتبسيط
7) $6x + 12 - 6x = 8x - 6x$	7) خاصية الطرح للمساواة
8) $12 = 2x$	8) بالتبسيط
9) $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$	9) خاصية القسمة للمساواة
10) $6 = x$	10) بالتبسيط
11) $x = 6$	11) خاصية التماثل للمساواة

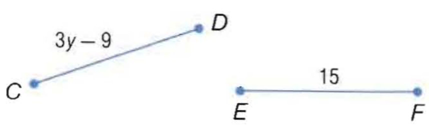
تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

3A) إذا كان $\angle A \cong \angle B, m\angle A = 37°$، فإن $m\angle B = 37°$.



3B) إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$، فإن $y = 8$.



إرشادات للدراسة

خاصيتا الإبدال والتجميع

الخصائص الآتية صحيحة لأي أعداد حقيقية a, b, c :

خاصية الإبدال للجمع
$a + b = b + a$

خاصية الإبدال للضرب
$a \cdot b = b \cdot a$

خاصية التجميع للجمع
$(a+b)+c=a+(b+c)$

خاصية التجميع للضرب
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

تأكـد

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

1) إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

2) $XY = XY$

3) إذا كان $5 = x$، فإن $x = 5$

4) إذا كان $2x + 5 = 11$، فإن $2x = 6$

المثال 2 5) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{y+2}{3} = 3$

المطلوب: $y = 7$

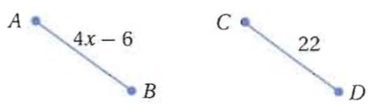
البرهان:

العبارات	المبررات
a) ______؟	a) معطيات
b) $3\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3(3)$	b) ______؟
c) ______؟	c) ______؟
d) $y = 7$	d) خاصية الطرح للمساواة

المثالان 2, 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

6) إذا كان $-4(x - 3) + 5x = 24$، فإن $x = 12$.

7) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $x = 7$.



8) **صحة:** يراقب بدر معدل نبضات قلبه في الدقيقة الواحدة مستعملًا جهاز قياس النبض؛ ليتحقق من أنه يقع ضمن المدى الطبيعي. ويمكن تقدير هذا المعدل باستعمال الصيغة: $T = 0.75(220 - a)$، حيث T معدل نبضات القلب، a عمر الشخص.

a) أثبت أنه إذا علمت معدل نبضات قلب شخص، فإنه يمكنك حساب عمره مستعملًا الصيغة: $a = 220 - \frac{T}{0.75}$.

b) إذا كان معدل نبضات قلب بدر يساوي 153، فكم يكون عمره؟ ما الخاصية التي تؤكد صحة حساباتك؟

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

9) إذا كان $a + 10 = 20$، فإن $a = 10$.

10) إذا كان $\frac{x}{3} = -15$، فإن $x = -45$.

11) إذا كان $4x - 5 = x + 12$، فإن $4x = x + 17$.

12) إذا كان $\frac{1}{5}BC = \frac{1}{5}DE$، فإن $BC = DE$.

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

13) إذا كان $5(x+7)=-3$، فإن $5x+35=-3$.

14) إذا كان $m\angle 1 = 25°\ ,\ m\angle 2 = 25°$، فإن $m\angle 1 = m\angle 2$.

15) إذا كان $AB = BC\ ,\ BC = CD$، فإن $AB = CD$.

16) إذا كان $3\left(x-\frac{2}{3}\right)=4$، فإن $3x-2=4$.

المثالان 3 , 2 أكمل البرهانين الآتيين:

17) **المعطيات:** $\frac{8-3x}{4}=32$

المطلوب: $x=-40$

البرهان:

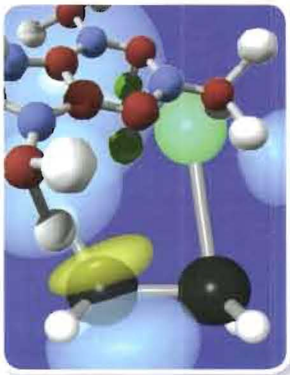
العبارات	المبررات
a) $\frac{8-3x}{4}=32$	a) معطيات
b) $4\left(\frac{8-3x}{4}\right)=4(32)$	b) ؟
c) $8-3x=128$	c) ؟
d) ؟	d) خاصية الطرح للمساواة
e) $x=-40$	e) ؟

18) **المعطيات:** $\frac{1}{5}x+3=2x-24$

المطلوب: $x=15$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟	a) معطيات
b) ؟	b) خاصية الضرب للمساواة
c) $x+15=10x-120$	c) ؟
d) ؟	d) خاصية الطرح للمساواة
e) $135=9x$	e) ؟
f) ؟	f) خاصية القسمة للمساواة
g) ؟	g) خاصية التماثل للمساواة



الربط مع الحياة

ينص قانون أفوقادرو على أن الأحجام المتساوية من غازات مختلفة تحتوي عددًا متساويًا من الجزيئات عند نفس الضغط ودرجة الحرارة.

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

19) إذا كان $-\frac{1}{3}n=12$، فإن $n=-36$.

20) إذا كان $-3r+\frac{1}{2}=4$، فإن $r=-\frac{7}{6}$.

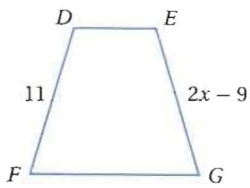
21) **علوم:** يُعطى قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV=nRT$، حيث P : الضغط بوحدة الضغط الجوي(atm)، V : الحجم باللترات، n : عدد مولات الغاز، R : ثابت الغاز المثالي ويساوي $R=0.0821$، T : درجة الحرارة بالكلفن.

a) أثبت أنه إذا كان ضغط الغاز وحجمه وعدد مولاته جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب درجة حرارته باستعمال الصيغة $T=\frac{PV}{nR}$.

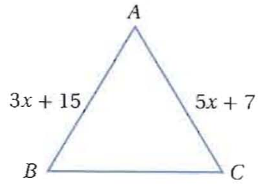
b) ما درجة حرارة 1 مول من الأكسجين موجود في إناء سعته 25 L، وتحت ضغط مقداره 1 atm ؟ ما الخاصية التي تبرر حساباتك؟

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينات الآتية:

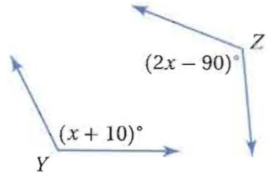
22) إذا كانت $\overline{DF} \cong \overline{EG}$ ، فإن $x = 10$.



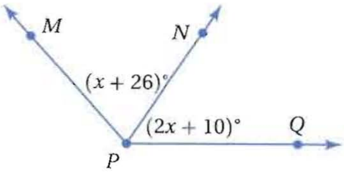
23) إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فإن $x = 4$.



24) إذا كانت $\angle Z \cong \angle Y$، فإن $x = 100$.



25) إذا كانت $\angle QPN \cong \angle MPN$، فإن $x = 16$.



26) **كهرباء:** يمكن حساب فرق الجهد V للدائرة الكهربائية باستعمال القانون $V = \frac{P}{I}$، حيث: P القدرة الكهربائية، I شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة.

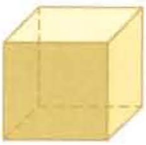
a) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون القدرة الكهربائية ثابتة، فإن فرق الجهد يصبح نصف ما كان عليه عندما تتضاعف شدة التيار الكهربائي.

b) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون شدة التيار الكهربائي ثابتة، فإن فرق الجهد يتضاعف عندما تتضاعف القدرة الكهربائية.

الربط مع الحياة

يحدث البرق عند تفريغ الشحنات بين السحب المشحونة كهربائيًا. وتستمر هذه العملية لمدة تقل عن ثانية واحدة، وينتج عنها من 100 مليون إلى 1 بليون فولت. قارن هذه الكمية مع فرق الجهد في المنازل الذي يبلغ 120 فولت أو 220 فولت فقط.

27) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مكعبًا طول ضلعه s وحدة.



s وحدة

a) **حسيًا:** ارسم أو اعمل نماذج لمكعبات أطوال أضلاعها 2, 4, 8, 16 وحدة.

b) **جدوليًا:** أوجد حجم كل مكعب.
نظّم نتائجك في جدول مثل المجاور.

طول الضلع (s)	الحجم (V)
2	
4	
8	
16	

c) **لفظيًا:** استعمل الجدول لعمل تخمين حول تغير حجم المكعب عندما يتضاعف طول ضلعه. عبّر عن تخمينك لفظيًا.

d) **جبريًا:** اكتب تخمينك على صورة معادلة جبرية.

e) **منطقيًا:** اكتب برهانًا لتخمينك. تأكد من كتابة المعطيات والمطلوب في بداية البرهان.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** تقع النقطة P على $\overline{AB}$. إذا علمت أن طول $\overline{AP}$ يساوي $2x + 3$، وطول $\overline{PB}$ يساوي $\frac{3x + 1}{2}$ ، وطول $\overline{AB}$ يساوي 10.5 وحدات ، فارسم شكلًا يوضح المسألة، وأثبت أن طول $\overline{AP}$ يساوي ثلثي طول $\overline{AB}$.

تبرير: صنّف العبارات الآتية إلى صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

29) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a + b = 0$، فإن $a = -b$.

30) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a^2 = b$، فإن $a = \sqrt{b}$.

31) **تحدٍّ:** وضعت آمنة تخمينًا ينص على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

a) أعط أمثلة تؤيد هذا التخمين، ثم فسر لماذا لا تثبت هذه الأمثلة صحة التخمين.

b) يمكن كتابة العدد الفردي على الصورة $2n - 1$. أعط أمثلة تؤيد ذلك.

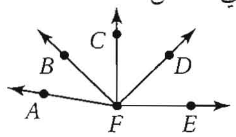
c) ما العدد الذي جميع الأعداد الزوجية مضاعفات له؟ فسّر لفظيًّا كيف يمكن استعمال إجابتك عن الفرعين a, b، لإثبات صحة تخمين آمنة.

d) اكتب برهانًا جبريًّا لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

32) **اكتب:** ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين البرهان الحر والبرهان ذي العمودين. أي البرهانين تجده أسهل للكتابة؟ برر إجابتك.

تدريب على الاختبار المعياري

33) في الشكل أدناه، $m\angle CFE = 90°$ و $\angle AFB \cong \angle CFD$.



أيٌّ مما يأتي ليس صحيحًا بالضرورة؟

A $m\angle BFD = m\angle BFD$ **C** $m\angle CFD = m\angle AFB$

B $\overline{BF}$ تنصف $\angle BFD$ **D** $\angle CFE$ قائمة.

34) **مراجعة:** أي علاقة يمكن أن تُستعمل لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول التالي؟

n	-8	-4	-1	0	1
$s(n)$	1	2	2.75	3	3.25

F $s(n) = -n + 7$ **H** $s(n) = \frac{1}{2}n + 5$

G $s(n) = -2n + 3$ **J** $s(n) = \frac{1}{4}n + 3$

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر إجابتك. (الدرس 1-5)

35) أي أربع نقاط تقع في المستوى نفسه.

36) الزاويتان المنفرجتان متكاملتان.

37) يتقاطع المستويان $\mathcal{P}$ و Q في المستقيم m. ويقع المستقيم m في كلا المستويين $\mathcal{P}$ و Q.

حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا في كل مما يأتي اعتمادًا على المعطيات مبررًا إجابتك.

"يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان يقبل القسمة على 6". (الدرس 1-4)

38) **المعطيات:** 24 يقبل القسمة على 6. **النتيجة:** 24 يقبل القسمة على 3.

39) **المعطيات:** 27 يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 27 يقبل القسمة على 6.

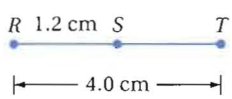
40) **المعطيات:** 85 لا يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 85 لا يقبل القسمة على 6.

41) **مبانٍ:** توجد أربع بنايات في مدرسةٍ، ليس أي ثلاث منها على استقامة واحدة. ما عدد ممرات المشاة اللازمة لربط كل بنايتين بممر مشاة واحد؟ (الدرس 1-5)

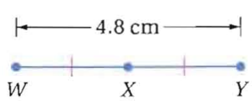
استعد للدرس اللاحق

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي مستعينًا بالشكل.

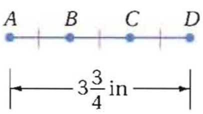
42) $\overline{ST}$



43) $\overline{WX}$



44) $\overline{BC}$



1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

Proving Segments Relationships

فيما سبق:

درستُ كتابة البرهان الجبري والبرهان ذي العمودين.

والآن:

- أكتب براهين تتضمن جمع القطع المستقيمة.
- أكتب براهين تتضمن تطابق قطع مستقيمة.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يعمل عبدالله في محل لبيع الأقمشة، ويقيس القماش بوضع حافته عند حافة تدريج المسطرة التي طولها متر واحد. ولكي يقيس أطوالًا مثل $125\,cm$، يقيس مترًا من القماش ويضع علامة عليه، ثم يقيس من تلك العلامة $25\,cm$ أخرى.
فيصبح الطول $100\,cm + 25\,cm = 125\,cm$.

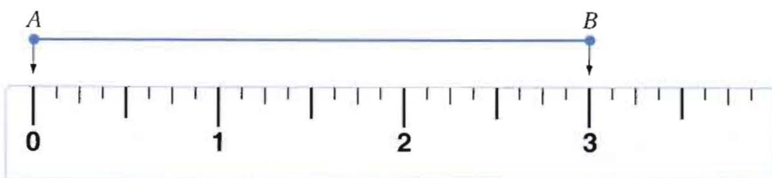
مسلّمة المسطرة: علمت كيف تقيس القطع المستقيمة باستعمال المسطرة، وذلك بوضع صفر المسطرة على أحد طرفي القطعة المستقيمة وقراءة التدريج المقابل للطرف الآخر من القطعة المستقيمة، فيمثل هذا التدريج طول القطعة المستقيمة. وهذا يوضح مسلمة المسطرة.

مسلمة 1.8 — مسلّمة المسطرة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية.

مثال: إذا أعطيت نقطتين A و B على مستقيم، وكانت A تقابل الصفر، فإن B تقابل عددًا موجبًا.



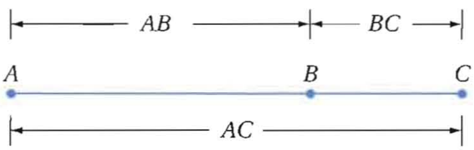
يمكن التعبير عن معنى وقوع نقطة بين نقطتين أخريين بمسلّمة جمع القطع المستقيمة.

مسلمة 1.9 — مسلّمة جمع القطع المستقيمة

أضف إلى مطويتك

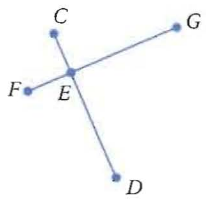
التعبير اللفظي: إذا كانت النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا وفقط إذا كان $AB + BC = AC$.

النموذج:



وتستعمل مسلّمة جميع القطع المستقيمة كتبرير في العديد من البراهين الهندسية.

مثال 1 استعمال مسلّمة جمع القطع المستقيمة



أثبت أنه إذا كان $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.

المعطيات: $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

البرهان:

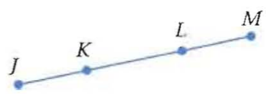
العبارات	المبررات
1) $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$	1) معطيات
2) $CE = FE$; $ED = EG$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $CE + ED = CD$	3) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $FE + EG = CD$	4) بالتعويض (الخطوتان 2 و 3)
5) $FE + EG = FG$	5) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
6) $CD = FG$	6) بالتعويض (الخطوتان 4 و 5)
7) $\overline{CD} \cong \overline{FG}$	7) تعريف تطابق القطع المستقيمة

قراءة الرياضيات

خاصية التعويض للمساواة يكتب بدل خاصية التعويض للمساواة "بالتعويض" اختصارًا عند استعمالها في البراهين.

تحقق من فهمك

1) أكمل البرهان الآتي:



المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$

المطلوب: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\overline{JL} \cong \overline{KM}$	a) معطيات
b) $JL = KM$	b) ____؟____
c) $JK + KL =$ ____؟____ , $KL + LM =$ ____؟____	c) مسلمة جمع القطع المستقيمة
d) $JK + KL = KL + LM$	d) ____؟____
e) $JK + KL - KL = KL + LM - KL$	e) خاصية الطرح للمساواة
f) ____؟____	f) بالتعويض
g) $\overline{JK} \cong \overline{LM}$	g) تعريف تطابق القطع المستقيمة

تطابق القطع المستقيمة: درستَ سابقًا أن أطوال القطع المستقيمة تحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدي. وبما أن القطع المستقيمة المتساوية الطول متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقق أيضًا خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي.

نظرية 1.2 خصائص تطابق القطع المستقيمة

أضف إلى مطويتك

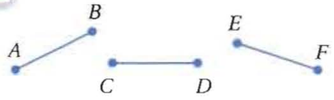
خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل للتطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$
خاصية التعدي للتطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

سوف تبرهن خاصيتي الانعكاس والتماثل في السؤالين 6 و 7

برهان

أضف إلى مطويتك

خاصية التعدي للتطابق



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

برهان حر:

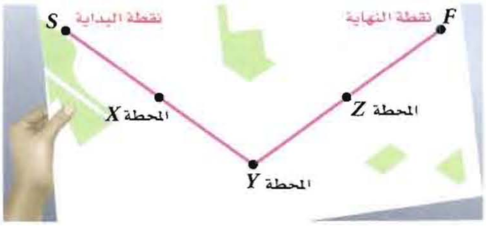
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $AB = CD, CD = EF$ ، وذلك من تعريف تطابق القطع المستقيمة. وباستعمال خاصية التعدي للمساواة ينتج أن $AB = EF$ ؛ لذا $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ من تعريف التطابق.

الربط مع الحياة

تقام مسابقات الماراثون في العديد من محافظات المملكة، ويخصص ريع بعضها لدعم أنشطة خيرية.

مثال 2 من واقع الحياة — البرهان باستعمال تطابق القطع المستقيمة

ماراثون: تبين الخريطة أدناه المسار الذي سيسلكه المشاركون في سباق ماراثون. تقع المحطتان X و Z عند نقطتي المنتصف بين نقطة البداية والمحطة Y ونقطة النهاية والمحطة Y. على التوالي. إذا كان بعدا المحطة Y عن النقطتين X و Z، متساويين، فأثبت أن الطريق من المحطة Z إلى نقطة النهاية يتطابق مع الطريق من المحطة X إلى نقطة البداية.



المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، Z نقطة منتصف $\overline{YF}$، $XY = YZ$

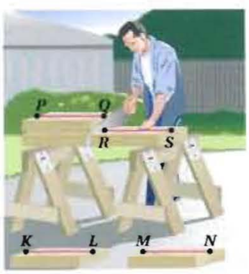
المطلوب: $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، Z نقطة منتصف $\overline{YF}$، $XY = YZ$	1) معطيات
2) $\overline{SX} \cong \overline{XY}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ZF}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$	3) تعريف تطابق القطع المستقيمة
4) $\overline{SX} \cong \overline{YZ}$	4) خاصية التعدي للتطابق
5) $\overline{SX} \cong \overline{ZF}$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$	6) خاصية التماثل للتطابق

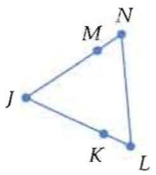
تحقق من فهمك

2) **نجارة:** قص نجار قطعة خشبية طولها 22 in . ثم استعملها نموذجًا ليقص قطعة أخرى مطابقة لها. وهكذا استعمل القطعة الثانية ليقص قطعة ثالثة. ثم استعمل القطعة الثالثة ليقص قطعة رابعة. أثبت أن طول القطعة الرابعة يساوي طول القطعة الأولى.



تأكــد

المثال 1



1) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$

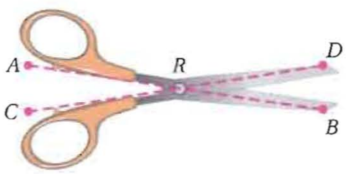
المطلوب: $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\overline{LK} \cong \overline{NM}, \overline{KJ} \cong \overline{MJ}$	a) ؟
b) ؟	b) تعريف تطابق القطع المستقيمة
c) $LK + KJ = NM + MJ$	c) ؟
d) ؟	d) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
e) $LJ = NJ$	e) ؟
f) $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$	f) ؟

المثال 2

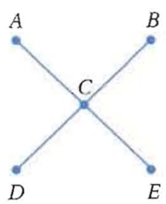
2) **برهان:** إذا علمت أن $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$،
فأثبت أن $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$.



3) **مقص:** في الشكل المجاور،
أثبت أن $\overline{AR} \cong \overline{CR}$, $\overline{DR} \cong \overline{BR}$ أن
$AR + DR = CR + BR$.

تدرب وحل المسائل

المثال 1



4) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: C نقطة منتصف $\overline{AE}$.
C نقطة منتصف $\overline{BD}$.
$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

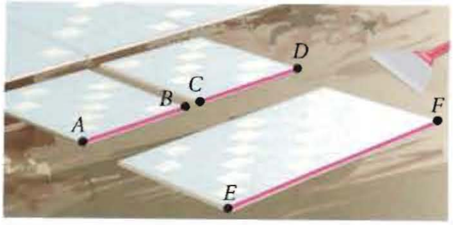
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟	a) معطيات
b) $AC = CE, BC = CD$	b) ؟
c) $AE = BD$	c) ؟
d) ؟	d) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
e) $AC + CE = BC + CD$	e) ؟
f) $AC + AC = CD + CD$	f) ؟
g) ؟	g) بالتبسيط
h) ؟	h) خاصية القسمة للمساواة
i) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	i) ؟

المثال 2

5) تبليط: قص مبلّط قطعة بلاط بطول معين. ثم استعملها نموذجًا ليقص بلاطة ثانية تطابق الأولى. ثم استعمل هاتين البلاطتين لقص بلاطة ثالثة طولها يساوي مجموع طولي البلاطتين. أثبت أن طول البلاطة الثالثة يساوي مثلي طول البلاطة الأولى.



أثبت الخاصيتين الآتيتين في النظرية (1.2).

6) خاصية التماثل للتطابق.

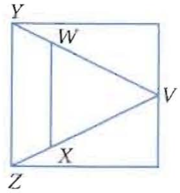
7) خاصية الانعكاس للتطابق.

الربط مع الحياة

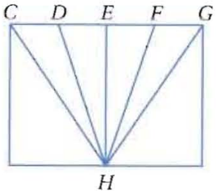
المبلّط: هو الشخص الذي يقوم بتركيب بلاط الأرضيات أو الجدران. ويستعمل في أثناء عمله أدوات قياس الطول والميل من أجل وضع البلاط بشكل دقيق وترتيبه بأنماط جميلة. وعادة يلتحق المبلّط بمركز تدريب مهني ليتلقى تدريبًا خاصًا.

برهان: أثبت كلًّا مما يأتي:

8) إذا كان $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$, $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ ، فإن $\overline{VW} \cong \overline{VX}$.



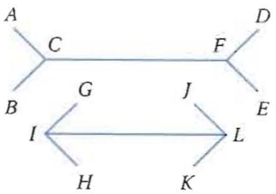
9) إذا كانت E نقطة منتصف $\overline{DF}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{FG}$ ، فإن $\overline{CE} \cong \overline{EG}$.



10) خداع بصري: إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{GI}$ ، $\overline{FE} \cong \overline{LK}$ ، $AC + CF + FE = GI + IL + LK$.

a) فأثبت أن $\overline{CF} \cong \overline{IL}$.

b) برر برهانك بقياس أطوال القطع المستقيمة. فسّر إجابتك.



11) تمثيلات متعددة: A نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، و B نقطة منتصف $\overline{PA}$ ، و C نقطة منتصف $\overline{PB}$.

a) هندسيًا: ارسم شكلًا يوضح هذه المعطيات.

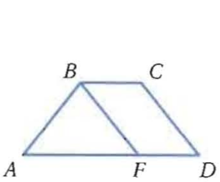
b) جبريًا: ضع تخمينًا للعلاقة الجبرية بين PC و PQ.

c) حسيًا: استعمل مسطرة لرسم قطعة مستقيمة تطابق $\overline{PQ}$ ولتعيين النقطتين B و C على $\overline{PQ}$. استعمل هذا الرسم لتؤيد التخمين الذي وضعته.

d) منطقيًا: أثبت صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

12) اكتشف الخطأ: في الشكل المجاور $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، اختبر النتائج التي حصل عليها أحمد وسعد. هل وصل أي منهما إلى نتيجة صحيحة؟



سعد	أحمد
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ وذلك بتطبيق خاصية الانعكاس للتطابق.	بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ وذلك بتطبيق خاصية التعدي للتطابق.

13) **تحدٍ:** $ABCD$ مربع. أثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

14) **اكتب:** هل توجد خاصية في التطابق تشبه خاصية الجمع في المساواة؟ فسّر إجابتك.

15) **تبرير:** صنِّف العبارة الآتية إلى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا .

إذا كانت النقاط A, B, C, D, E تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع B بين A و C ، وتقع C بين B و D ، وتقع D بين C و E ، وكان $AC = BD = CE$ ، فإن $AB = BC = DE$.

16) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا يمثل مسلّمة جمع القطع المستقيمة، بحيث يكون طول القطعة المستقيمة $2\,\text{in}$، وليس أي من القطع المستقيمة الناتجة عن أربع نقاط عليها متطابقة.

تدريب على الاختبار المعياري

17) تقع النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة بحيث تقع النقطة B بين A و C والنقطة C بين B و D. أي عبارة مما يلي ليست بالضرورة صحيحة؟

A $AB + BD = AD$

B $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

C $\overline{BC} \cong \overline{BC}$

D $BC + CD = BD$

18) **أي العبارات الآتية يعطي وصفًا أفضل للمسلمة؟**

A تخمين ينشأ عن أمثلة.

B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص.

C عبارة تقبل على أنها صحيحة.

D عبارة تم إثبات صحتها.

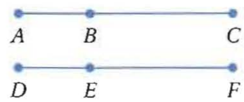
مراجعة تراكمية

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 6-1)

المعطيات: $AC = DF$

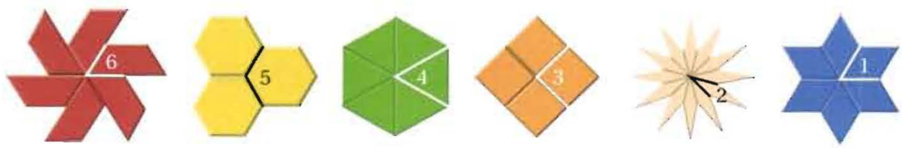
$AB = DE$

المطلوب: $BC = EF$



20) **نماذج:** استعمل حاتم ستة مربعات من الورق المقوى لعمل منشور رباعي. ما الشكل الهندسي الذي تمثله أي من هذه الأوراق، وكم مستقيمًا ينتج من تقاطعها؟ (الدرس 5-1)

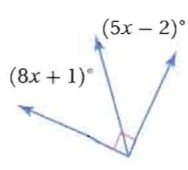
21) **أنماط:** يمكن ترتيب مجموعة من قطع النماذج لتكوين نمط دوراني دون ترك فراغات بين هذه القطع، وكما تعلم أن قياس الدورة الكاملة يساوي $360°$. أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من الأشكال الآتية بالدرجات.



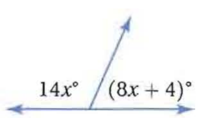
استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 5-1)

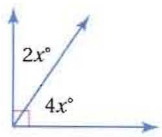
22)



23)



24)



1-8 إثبات علاقات بين الزوايا
Proving Angles Relationships

فيما سبق:

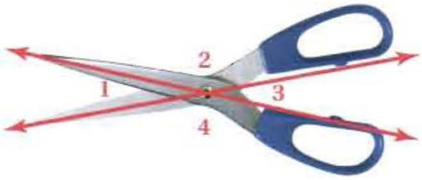
درستُ تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعملتها.

والآن:

- أكتب براهين تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.
- أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



تلاحظ أن $\angle 1$ بين شفرتي المقص، و $\angle 2$ بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم. وبالمثل فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ بين مقبضي المقص تشكلان أيضا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.

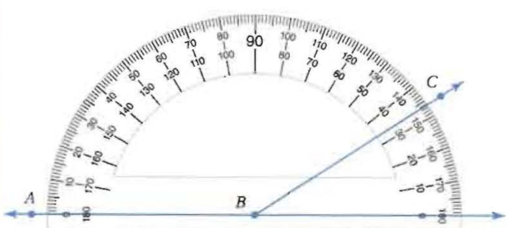
الزوايا المتتامة والمتكاملة: توضّح مسلّمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقية.

مسلمة 1.10 مسلّمة المنقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يرتبط قياس أي زاوية بعدد حقيقي واحد يقع بين $0°$ و $180°$.

مثال: إذا انطبق $\overrightarrow{BA}$ على صفر المنقلة، فإن قياس $\angle ABC$ يقابل عددًا حقيقيًا موجبًا.



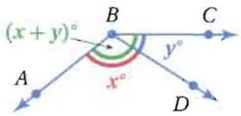
درست سابقًا مسلّمة جمع القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

مسلمة 1.11 مسلّمة جمع الزوايا

أضف إلى مطويتك

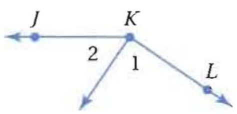
تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$



مثال 1 استعمال مسلّمة جمع الزوايا

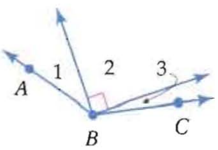
إذا كان $m\angle JKL = 145°$, $m\angle 2 = 56°$ فأوجد $m\angle 1$. برّر خطوات حلّك.



$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$	مسلّمة جمع الزوايا
$m\angle 1 + 56° = 145°$	$m\angle 2 = 56°$, $m\angle JKL = 145°$
$m\angle 1 + 56° - 56° = 145° - 56°$	خاصية الطرح للمساواة
$m\angle 1 = 89°$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

1) إذا كان $m\angle ABC = 131°$, $m\angle 1 = 23°$، فأوجد $m\angle 3$. برر خطوات حلّك.

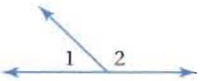


يمكن استعمال مسلّمة جمع الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا لإثبات نظريات تتعلق بالزوايا.

نظريتان

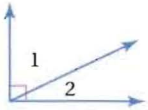
أضف إلى مطويتك

1.3 **نظرية الزاويتين المتكاملتين:** إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما متكاملتان.



مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

1.4 **نظرية الزاويتين المتتامتين:** إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامتين.



مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

سوف تبرهن النظريتين 1.3 و 1.4 في السؤالين 14 و 15

مراجعة المفردات

الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي $180°$.

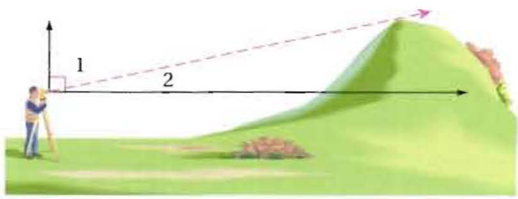
الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي $90°$.

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم هما زاويتان متجاورتان بحيث يكون ضلعاهما غير المشتركين نصفي مستقيمين متعاكسين.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال خصائص الزوايا المتكاملة أو المتتامة

مَسْح الأراضي: قام مسّاح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسي فكانت $73°$ تقريبًا. ما قياس الزاوية بين خط نظره والأفق؟ برّر خطوات الحل.

افهم: ارسم شكلًا يوضح المسألة. قاس المسّاح الزاوية بين خط نظره والخط الرأسي؛ لذا ارسم نصف المستقيم الرأسي والأفقي من النقطة التي يشاهد منها المسّاح التلة، ثم سمّ الزوايا الناتجة. وكما تعلم فإن نصفي المستقيمين الأفقي والرأسي يكوّنان زاوية قائمة.



خطط: بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة فإنهما متتامتان.

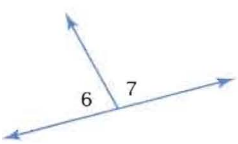
حُل:

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	نظرية الزاويتين المتتامتين
$73° + m\angle 2 = 90°$	$m\angle 1 = 73°$
$73° + m\angle 2 - 73° = 90° - 73°$	خاصية الطرح للمساواة
$m\angle 2 = 17°$	بالتبسيط

قياس الزاوية بين خط نظر المساح والأفق $17°$.

تحقق: تعلم أنه يجب أن يكون ناتج جمع قياسي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$.
$17° + 73° = 90°$. ✓

تحقق من فهمك

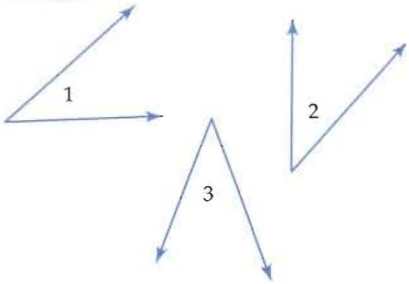


2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان $m\angle 6 = (3x + 32)°$ و $m\angle 7 = (5x + 12)°$، فأوجد قيمة x , $m\angle 6$, $m\angle 7$. برّر خطوات الحل.

تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظرية 1.5 خصائص تطابق الزوايا

أضف إلى مطويتك



خاصية الانعكاس للتطابق

$\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

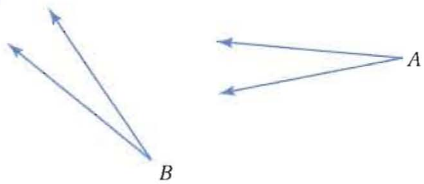
خاصية التعدي للتطابق

إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ ، وكانت $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

سوف تُبرهن خاصيتي الانعكاس والتعدي للتطابق في السؤالين 16 و 17

برهان خاصية التماثل للتطابق

أضف إلى مطويتك



المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\angle B \cong \angle A$

برهان حر:

تعلم من المعطيات أن $\angle A \cong \angle B$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$. وباستعمال خاصية التماثل للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$. وهكذا فإن $\angle B \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

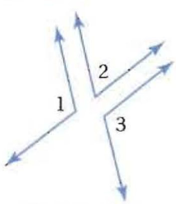
يمكن تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.

نظريتان

أضف إلى مطويتك

1.6 نظرية تطابق المكمّلات:

الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

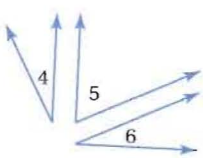


مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$،

وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

1.7 نظرية تطابق المتممات:

الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.



مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90°$

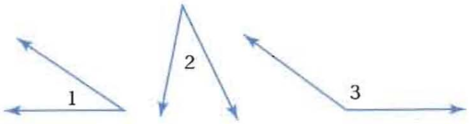
و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90°$ ، فإن $\angle 6 \cong \angle 4$.

سوف تبرهن حالة من النظرية 1.7 في السؤال 4

برهان

أضف إلى مطويتك

إحدى حالات نظرية تطابق المكملات



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

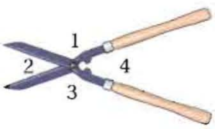
المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.	1) معطيات
2) $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°, m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2) تعريف الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3) بالتعويض
4) $m\angle 1 = m\angle 2$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $\angle 1 \cong \angle 2$	5) تعريف تطابق الزوايا

مثال 3 براهين تستعمل فيها نظريتا تطابق المكملات أو المتممات

أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.



المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

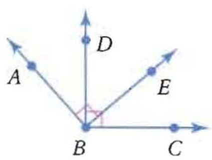
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.	1) معطيات
2) $\angle 2$ و $\angle 4$ غير متجاورتين تكونتا من تقاطع مستقيمين.	2) تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم.	3) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
4) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	4) نظرية الزاويتين المتكاملتين
5) $\angle 2 \cong \angle 4$	5) نظرية تطابق المكملات

مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس هما زاويتان غير متجاورتين تتكونان من تقاطع مستقيمين.

تحقق من فهمك



3) في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.
أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$.

لاحظ في المثال 3 أن $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس. ونتيجة هذا المثال تؤيد نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس الآتية:

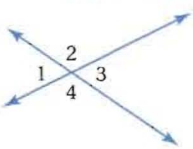
نظرية 1.8

أضف إلى مطويتك

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

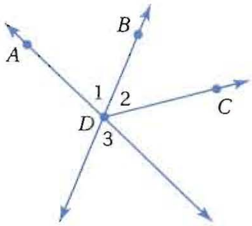
الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
$\angle 2 \cong \angle 4$



سوف تبرهن النظرية 1.8 في السؤال 20

مثال 4 استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس



أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$.

المعطيات: $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$.	**1)** معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	**2)** تعريف منصف الزاوية
3) $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.	**3)** تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\angle 3 \cong \angle 1$	**4)** نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
5) $\angle 3 \cong \angle 2$	**5)** خاصية التعدي للتطابق
6) $\angle 2 \cong \angle 3$	**6)** خاصية التماثل للتطابق

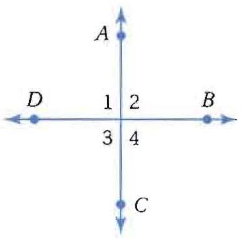
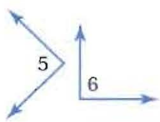
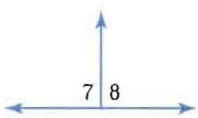
تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)°$ و $m\angle 4 = (8x - 14)°$، فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. برر خطوات حلّك.

يمكن استعمال النظريات الواردة في هذا الدرس لإثبات نظريات الزاوية القائمة الآتية:

نظريات — نظريات الزاوية القائمة

أضف إلى مطويتك

النظرية	مثال
1.9 يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	
1.10 جميع الزوايا القائمة متطابقة. **مثال:** إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$، جميعها قائمة، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.	
1.11 المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 1 \cong \angle 2$.	
1.12 إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 5 \cong \angle 6$ ، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	
1.13 إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان.	

سوف تبرهن هذه النظريات في الأسئلة 25–21

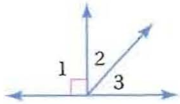
قراءة الرياضيات

رمز التعامد تذكر أن الرمز $\perp$ يعني يعامد.

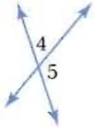
تأكد

المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

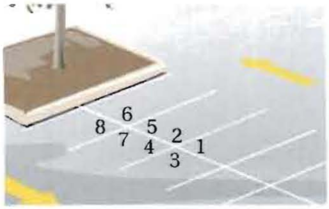
1) $m\angle 2 = x°, m\angle 3 = (x-16)°$



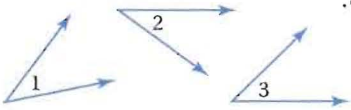
2) $m\angle 4 = (3(x-1))°, m\angle 5 = (x+7)°$



المثال 2 **3) موقف:** استعن بمخطط موقف السيارات المجاور.
إذا علمت أن $\angle 6 \cong \angle 2$ ، فأثبت أن $\angle 8 \cong \angle 4$.



المثال 3 **4) برهان:** أكمل فيما يأتي برهان إحدى حالات نظرية تطابق المتممات.



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

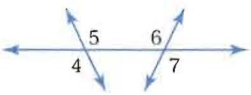
البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.	a) ؟
b) $m\angle 1 + m\angle 3 = 90°$ $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$	b) ؟
c) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	c) ؟
d) $m\angle 1 = m\angle 2$	d) ؟
e) $\angle 1 \cong \angle 2$	e) ؟

المثال 4 **5) برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي:

المعطيات: $\angle 4 \cong \angle 7$

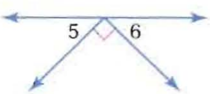
المطلوب: $\angle 5 \cong \angle 6$



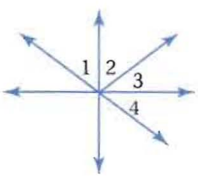
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 أوجد قياس الزوايا المرقَّمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

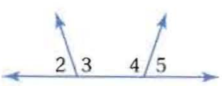
6) $m\angle 5 = m\angle 6$



7) $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان،
$\angle 1 \cong \angle 4$ ،
$m\angle 2 = 28°$



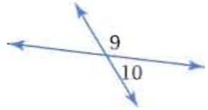
8) $\angle 2$ و $\angle 4$ متكاملتان،
$\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان،
$m\angle 4 = 105°$



أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

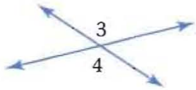
9) $m\angle 9 = (3x + 12)^\circ$

$m\angle 10 = (x - 24)^\circ$



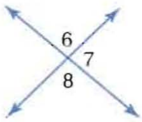
10) $m\angle 3 = (2x + 23)^\circ$

$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$



11) $m\angle 6 = (2x - 21)^\circ$

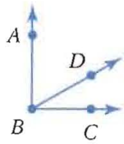
$m\angle 7 = (3x - 34)^\circ$



المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

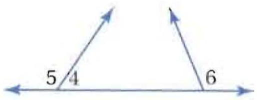
12) **المعطيات:** $\angle ABC$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle ABD, \angle CBD$ متتامتان.



13) **المعطيات:** $\angle 5 \cong \angle 6$

المطلوب: $\angle 4, \angle 6$ متكاملتان.



اكتب برهانًا لكل من النظريات الآتية:

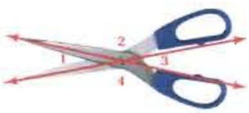
14) نظرية الزاويتين المتكاملتين.

15) نظرية الزاويتين المتتامتين.

16) خاصية الانعكاس للتطابق.

17) خاصية التعدي للتطابق.

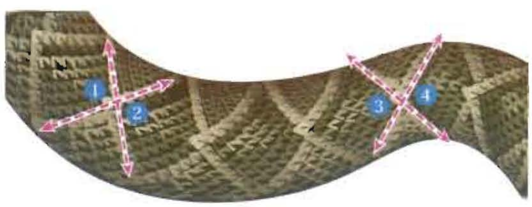
18) **برهان:** أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الأربعة الناتجة عند فتح المقص يساوي 360°.



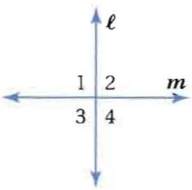
الربط مع الحياة

يصل طول أنياب الأفعى المجلجلة إلى 6 in، ويمكنها طيُّ أنيابها داخل فمها لتكون موازية لسقف الفم عندما يكون مغلقًا.

19) **طبيعة:** الأفعى المجلجلة أفعى سامّة، ويوجد على جلدها زركشة تأخذ أشكالًا نمطية. انظر الشكل في الأسفل، والذي يمثّل صورة مكبرة لجلد الأفعى المبينة إلى اليمين. إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 1$، فأثبت أن $\angle 3 \cong \angle 2$.



برهان: استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكل من النظريات الآتية.



20) نظرية 1.8

21) نظرية 1.9

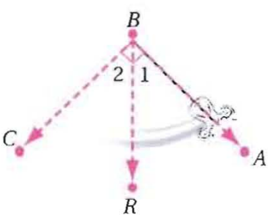
22) نظرية 1.10

23) نظرية 1.11

24) نظرية 1.12

25) نظرية 1.13

26) **بندول:** يظهر في الشكل المجاور وضع بندول ساعة تقليدية. إذا علمت أن $\angle ABC$ قائمة. وأن $m\angle 1 = 45^\circ$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overrightarrow{BR}$ ينصف $\angle ABC$.



27) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة علاقات الزوايا.

a) **هندسيًا:** استعمل المنقلة لرسم زاوية قائمة ABC. حدد نقطة داخلها، وسمّها D. ارسم $\overrightarrow{BD}$. ثم ارسم $\overrightarrow{KL}$، وارسم $\angle JKL$ التي تطابق $\angle ABD$.

b) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين $\angle JKL$ و $\angle DBC$.

c) **منطقيًا:** أثبت صحة التخمين الذي وضعته.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍ:** لقد تم إثبات حالة واحدة من نظرية تطابق المكملات. وفي السؤال 4 برهنت الحالة المشابهة من نظرية تطابق المتممات. فسّر لماذا توجد حالتان لكل من هاتين النظريتين، واكتب برهانًا للحالة الثانية لكل منهما.

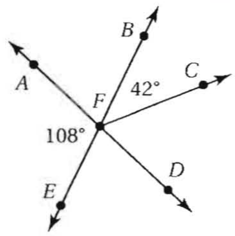
29) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائما أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.

إذا كانت إحدى الزوايا المتكونة من مستقيمين متقاطعين حادة، فإن الزوايا الثلاث الأخرى المتكونة من هذا التقاطع حادة أيضًا.

30) **اكتب:** فسّر كيف يمكن استعمال المنقلة لإيجاد قياس الزاوية المتممة لزاويةٍ أخرى بطريقةٍ سريعة.

تدريب على الاختبار المعياري

31) أوجد قياس $\angle CFD$ في الشكل المجاور.



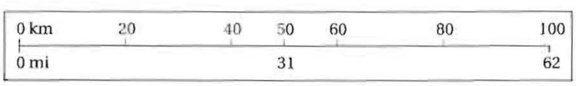
A 66° **B** 72° **C** 108° **D** 138°

32) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي 4:1 فما قياس الزاوية الصغرى؟

A 15° **B** 18° **C** 24° **D** 36°

مراجعة تراكمية

33) **خرائط:** يُظهر مقياس رسم خريطة تدريجين أحدهما بالكيلومترات، والآخر بالأميال. إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطعتين مستقيمتين على الخريطة، حيث $AB = 100\,\text{km}$، و $CD = 62\,\text{mi}$.
فهل $\overline{AB} \cong \overline{CD}$؟ فسّر إجابتك. (الدرس 1-7)



اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-6)

34) إذا كان $y + 7 = 5$، فإن $y = -2$

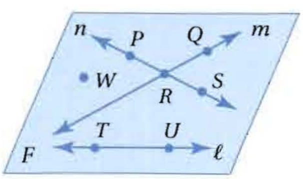
35) إذا كان $MN = PQ$، فإن $PQ = MN$

36) إذا كان $a - b = x$ و $b = 3$، فإن $a - 3 = x$

37) إذا كان $x(y + z) = 4$، فإن $xy + xz = 4$

استعد للدرس اللاحق

استعن بالشكل المجاور للإجابة عما يأتي:



38) سمّ مستقيمًا يحتوي النقطة P.

39) سمّ تقاطع المستقيمين n و m.

40) سمّ نقطة لا تقع على أيّ من المستقيمات ℓ, m, n.

41) اذكر اسمًا آخر للمستقيم n.

42) هل يتقاطع المستقيم ℓ مع المستقيم m أو المستقيم n؟ فسر إجابتك.

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

التبرير الاستقرائي والمنطق (الدرسان 1-1 و 1-2)

- التبرير الاستقرائي: تبرير تستعمل فيه أمثلة وأنماط محددة للوصول إلى نتيجة.
- المثال المضاد: هو المثال الذي يثبت عدم صحة التخمين.
- نفي العبارة p: ليس p أو $\sim p$.
- عبارة الوصل: عبارة مركبة تحتوي (و) .
- عبارة الفَصْل: عبارة مركبة تحتوي (أو) .

العبارات الشرطية (الدرس 1-3)

- يمكن كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا كان... فإن...) أو على الصورة إذا كان p، فإن q، حيث p الفرض، و q النتيجة.

العبارة الشرطية	$p \rightarrow q$
العكس	$q \rightarrow p$
المعكوس	$\sim p \rightarrow \sim q$
المعاكس الإيجابي	$\sim q \rightarrow \sim p$

التبرير الاستنتاجي (الدرس 1-4)

- قانون الفَصْل المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة، وكانت p صحيحة أيضًا ، فإن q صحيحة.
- قانون القياس المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة وكانت $q \rightarrow r$ صحيحة، فإن $p \rightarrow r$ صحيحة أيضًا.

البرهان (الدروس من 1-5 إلى 1-8)

- الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.
- الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.
- الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.
- الخطوة 4: برر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.
- الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

مفردات أساسية

- **التخمين** (ص. 10)
- **التبرير الاستقرائي** (ص. 10)
- **المثال المضاد** (ص. 13)
- **قيمة الصواب** (ص. 17)
- **العبارة المركبة** (ص. 17)
- **نفي العبارة** (ص. 17)
- **العبارة** (ص. 17)
- **عبارة الوصل** (ص. 17)
- **عبارة الفَصْل** (ص. 18)
- **جدول الصواب** (ص. 19)
- **النتيجة** (ص. 24)
- **العبارة الشرطية** (ص. 24)
- **الفَرض** (ص. 24)
- **المعاكس الإيجابي** (ص. 26)
- **العكس** (ص. 26)
- **المعكوس** (ص. 26)
- **العبارات الشرطية المرتبطة** (ص. 26)
- **التكافؤ المنطقي** (ص. 27)
- **التبرير الاستنتاجي** (ص. 33)
- **قانون الفصل المنطقي** (ص.33)
- **قانون القياس المنطقي** (ص.35)
- **المسلّمة** (ص.41)
- **البرهان** (ص. 42)
- **البرهان الحر** (ص. 43)
- **النظرية** (ص. 43)
- **البرهان الجبري** (ص. 49)
- **البرهان ذو العمودين** (ص. 50)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) المسلّمة هي العبارة التي تحتاج إلى برهان .
2) الجزء الأول في العبارة الشرطية يسمى تخمينًا.
3) يستعمل التبرير الاستنتاجي قوانين ونظريات للوصول إلى نتائج منطقية من العبارات المعطاة.
4) ينتج المعاكس الإيجابي من نفي الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.
5) تتكون عبارة الوصل المنطقي من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).
6) النظرية يُسلّم بصحتها دائمًا.
7) ينتج العكس بتبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.
8) لإثبات أن التخمين خاطئ، يجب أن يُعطي برهان.
9) يمكن أن يكتب معكوس العبارة p ، على صورة ليس p.
10) في البرهان ذي العمودين الخصائص التي تبرر كل خطوة تسمى المبررات.

مراجعة الدروس

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين (ص 16-10)

حدد ما إذا كان أي من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا. فإذا كان التخمين خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًا.

11) إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتين، فإنهما متجاورتان على مستقيم.

12) إذا أعطيت النقاط $W(-3, 2), X(-3, 7), Y(6, 7), Z(6, 2)$، فإن الشكل الرباعي $WXYZ$ مستطيل.

13) **منازل:** تكون معظم أسطح المنازل في البلدان القريبة من القطب الشمالي مائلة، بينما تكون مستوية في المناطق الحارة. أعط تخمينًا عن سبب اختلاف الأسطح.

مثال 1

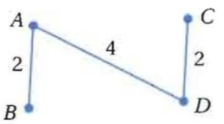
حدد ما إذا كان أي من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا. فإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًا.

a) $c = d, d = c$ هو مثال على خاصية من خصاص الأعداد الحقيقية.

$c = d, d = c$ هو مثال على خاصية التماثل في الأعداد الحقيقية. وهذا التخمين صحيح.

b) إذا كان $AB + CD = AD$، فإن B و C تقعان بين A و D.

هذا التخمين خاطئ. في الشكل أدناه
$AB + CD = AD$، ولكن B و C لا تقعان بين A و D.



1-2 المنطق (ص 23-17)

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك.

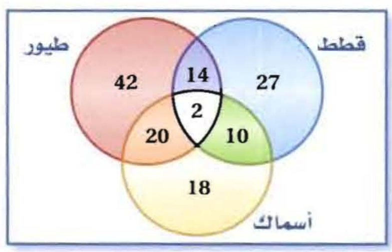
p: يحوي المستوى ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

q: الياردة المربعة تكافئ ثلاث أقدام مربعة.

r: مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي $180°$.

14) $\sim q \vee r$ **15)** $p \wedge \sim r$ **16)** $\sim p \vee q$

17) **حيوانات أليفة:** يُظهر شكل ڤن الآتي عدد الأشخاص الذين لديهم حيوانات أليفة في منازلهم.



a) ما عدد الأشخاص الذين لديهم أسماك فقط؟

b) ما عدد الأشخاص الذين لديهم قطط وطيور فقط؟

c) ما عدد الأشخاص الذين لديهم طيور وأسماك؟

مثال 2

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك.

p: x^2 عدد غير سالب.

q: الزوايا المتجاورة تقع في المستوى نفسه.

r: العدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

a) $\sim q \wedge r$

$\sim q \wedge r$: الزوايا المتجاورة **لا** تقع في المستوى نفسه، والعدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

بما أن كلًّا من $\sim q$ و r خاطئتان، فإن $\sim q \wedge r$ خاطئة أيضًا.

b) p أو r

p أو r: x^2 عدد غير سالب، أو العدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

p أو r صحيحة؛ لأن p صحيحة، وليس لكون r خاطئة تأثير.

دليل الدراسة والمراجعة

1-3 العبارات الشرطية (ص 31-24)

حدد قيمة الصواب للعبارتين الشرطيتين الآتيتين، وإذا كانت العبارة صحيحة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًّا.

18) إذا ربَّعت العدد الصحيح، فإن الناتج يكون عددًا صحيحًا موجبًا.

19) إذا كان للشكل السداسي ثمانية أضلاع، فإن جميع زواياه منفرجة.

20) اكتب العكس والمعكوس و**المعاكس** الإيجابي للعبارة الشرطية الصحيحة الآتية. ثم حدد ما إذا كانت أي منها صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.

إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه.

مثال 3

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصحيحة الآتية:

إذا كان الشكل مربعًا فإنه متوازي أضلاع.

العكس: إذا كان الشكل متوازي أضلاع، فإنه مربع.

المعكوس: إذا لم يكن الشكل مربعًا، فإنه ليس متوازي أضلاع.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع، فإنه ليس مربعًا.

1-4 التبرير الاستنتاجي (ص 40-33)

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة". فسر تبريرك.

21) **المعطيات:** إذا نصّف قطرا الشكل الرباعي كل منهما الآخر، فإن الشكل متوازي أضلاع.

ينصف قطرا الشكل الرباعي $PQRS$ كل منهما الآخر.

22) **المعطيات:** إذا واجهت عائشة صعوبة في مادة العلوم، فإنها سوف تأخذ دروسًا إضافية.

إذا بقيت عائشة في المدرسة بعد انتهاء الدوام يوم الأربعاء فإنها ستأخذ درسًا إضافيًّا.

23) **زلازل:** حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: إذا كانت قوة الزلزال 7.0 درجات فأكثر على مقياس ريختر فإنه يعتبر زلزالًا مدمرًا، ويحدث دمارًا وخرابًا كبيرين. كانت قوة زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م 8.0 درجات على مقياس ريختر.

نتيجة: كان زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م زلزالًا مدمرًا، وأحدث دمارًا وخرابًا كبيرين.

مثال 4

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة". فسر تبريرك.

(1) إذا كان قياس الزاوية أكبر من °90، فإنها منفرجة.

(2) إذا كانت الزاوية منفرجة، فإنها ليست قائمة.

p: قياس الزاوية أكبر من °90

q: الزاوية منفرجة

r: الزاوية **ليست** قائمة

العبارة (1) : $p \rightarrow q$

العبارة (2) : $q \rightarrow r$

بما أن العبارتين الشرطيتين (1)، (2) صحيحتان، فيمكن باستعمال قانون القياس المنطقي استنتاج أن $p \rightarrow r$. أي أنه إذا كان قياس الزاوية أكبر من °90، فإنها ليست قائمة.

1-5 المسلّمات والبراهين الحرة (ص 41-47)

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

24) يتقاطع المستويان في نقطة.

25) تقع ثلاث نقاط في أكثر من مستوى.

26) إذا وقع المستقيم m في المستوى X، ومرّ المستقيم m بالنقطة Q، فإن النقطة Q تقع في المستوى X.

27) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنهما تكوّنان زاوية قائمة.

28) **عمل:** دُعي ستة أشخاص لحضور اجتماع عمل. إذا صافَحَ كل شخص بقية الأشخاص، فما عدد المصافحات التي تبادلها جميع هؤلاء الأشخاص؟ ارسم نموذجًا يؤيد تخمينك.

مثال 5

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

a) **إذا وقعت النقاط X, Y, Z في المستوى $\mathcal{R}$، فإن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.**

صحيحة أحيانًا؛ الحقيقة المعطاة أن X, Y, Z تقع في المستوى $\mathcal{R}$ لا تضمن وقوعها على استقامة واحدة أو لا.

b) **يمر مستقيم واحد فقط في النقطتين A و B.**

صحيحة دائمًا؛ بتطبيق المسلمة 1.1، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين معلومتين.

1-6 البرهان الجبري (ص 49-55)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

29) إذا كان $7(x-3) = 35$، فإن $35 = 7(x-3)$

30) إذا كان $2x + 19 = 27$، فإن $2x = 8$

31) $5(3x + 1) = 15x + 5$

32) إذا كان $2x + 8 = 12$ و $3y = 2x + 8$، فإن $3y = 12$.

33) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $6(x-4) = 42$

المطلوب: $x = 11$

العبارات	المبررات
a) $6(x-4) = 42$	a) ؟
b) $6x - 24 = 42$	b) ؟
c) $6x = 66$	c) ؟
d) $x = 11$	d) ؟

34) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $PQ = RS$ و $PQ = 5x + 9, RS = x - 31$، فإن $x = -10$.

35) **اختبارات:** حصل أحمد على درجة مساوية لدرجة عمر في اختبار الرياضيات، وحصل عمر على درجة مساوية لدرجة سعد. ما الخاصية التي تثبت أن أحمد وسعدًا حصلا على الدرجة نفسها؟

مثال 6

أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{5x-3}{6} = 2x + 1$

المطلوب: $x = -\frac{9}{7}$

البرهان:

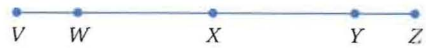
العبارات	المبررات
1) $\frac{5x-3}{6} = 2x + 1$	1) معطيات
2) $5x - 3 = 6(2x + 1)$	2) خاصية الضرب للمساواة
3) $5x - 3 = 12x + 6$	3) خاصية التوزيع
4) $-3 = 7x + 6$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $-9 = 7x$	5) خاصية الطرح للمساواة
6) $-\frac{9}{7} = x$	6) خاصية القسمة للمساواة
7) $x = -\frac{9}{7}$	7) خاصية التماثل للمساواة

1-7 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة (ص 56-61)

اكتب برهانًا ذا عمودين في كل من المسألتين الآتيتين:

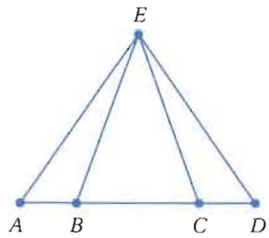
36) **المعطيات:** X نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{VZ}$

المطلوب: $VW = ZY$



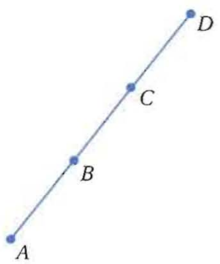
37) **المعطيات:** $AB = DC$

المطلوب: $AC = DB$



38) **جغرافيا:** أراد طارق السفر من مدينة جدة إلى الطائف، مرورًا بمكة المكرمة لاصطحاب أخيه. ويعلم أن المسافة من جدة إلى مكة المكرمة تساوي 79 km ، والمسافة من مكة المكرمة إلى الطائف تساوي 88 km، استنتج أنه سيقطع 167 km في هذه الرحلة. فسر كيف استنتج ذلك؟ افترض أن الطريق الذي يربط هذه المدن الثلاث يشكل مستقيمًا.

مثال 7



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: B نقطة منتصف $\overline{AC}$

C نقطة منتصف $\overline{BD}$

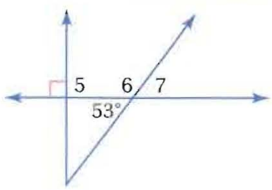
المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) B نقطة منتصف $\overline{AC}$	1) معطيات
2) $AB \cong BC$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) C نقطة منتصف $\overline{BD}$	3) معطيات
4) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	4) تعريف نقطة المنتصف
5) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	5) خاصية التعدي للمساواة

1-8 إثبات علاقات بين الزوايا (ص 62-69)

أوجد قياس كل زاوية فيما يأتي:

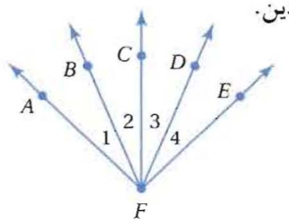


39) $\angle 5$

40) $\angle 6$

41) $\angle 7$

42) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

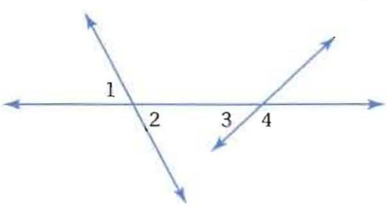


المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 4,$
$\angle 2 \cong \angle 3$

المطلوب: $\angle AFC \cong \angle EFC$

مثال 8

إذا علمت أن $m\angle 1 = 72°$, $m\angle 3 = 26°$ ، فأوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكل أدناه.



$m\angle 2 = 72°$؛ لأن $\angle 2$,$\angle 1$ متقابلتان بالرأس.

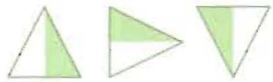
$\angle 4$,$\angle 3$ متجاورتان على مستقيم؛ إذن فهما متكاملتان.

$26° + m\angle 4 = 180°$ تعريف الزاويتين المتكاملتين

$m\angle 4 = 154°$ بطرح 26 من كلا الطرفين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل من المتتابعتين الآتيتين، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منهما.

1) $15, 30, 45, 60, ...$

2) ...... 

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسِّر إجابتك.

p: $5 < -3$

q: جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r: إذا كان $4x = 36$، فإن $x = 9$.

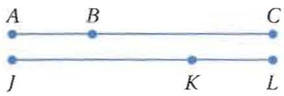
3) q و p

4) $(p \vee q) \wedge r$

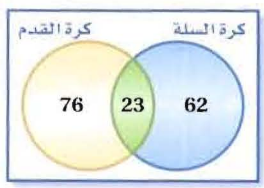
5) برهان: اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{CB}$, $\overline{KL} \cong \overline{AB}$

المطلوب: $\overline{JL} \cong \overline{AC}$



6) رياضة: استعن بشكل ڤن الآتي الذي يبين نوع الرياضة التي اختارها الطلاب للإجابة عن السؤالين أدناه.



a) صف اختيار الطلاب الذين هم خارج منطقة التقاطع وداخل دائرة كرة السلة.

b) ما عدد الطلاب الذين اختاروا كرة السلة وكرة القدم؟

7) حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: إذا اجتاز الطبيب اختبار المجلس الطبي فإنه يستطيع مزاولة مهنة الطب. **اجتاز** فهد اختبار المجلس الطبي.

النتيجة: يمكن أن يزاول فهد مهنة الطب.

8) برهان: أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $3(x-4) = 2x + 7$

المطلوب: $x = 19$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $3(x-4) = 2x + 7$	a) معطيات
b) $3x - 12 = 2x + 7$	b) ___؟___
c) ___؟___	c) خاصية الطرح للمساواة
d) $x = 19$	d) ___؟___

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا.

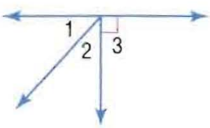
9) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم.

10) إذا وقعت B بين A و C، فإن $AC + AB = BC$.

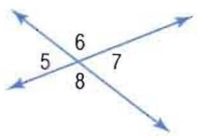
11) إذا تقاطع مستقيمان وكونا زاويتين متطابقتين متجاورتين، فإنهما متعامدان.

أوجد قياس جميع الزوايا المرقّمة في كل مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

12) $m\angle 1 = x°,$
$m\angle 2 = (x-6)°$



13) $m\angle 7 = (2x + 15)°,$
$m\angle 8 = (3x)°$



اكتب كلًّا من العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا كان... فإن...).

14) قياس الزاوية الحادة أقل من $90°$.

15) يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونا زوايا قائمة.

16) اختيار من متعدد: أي العبارات الآتية هي المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية؟

إذا احتوى المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه مثلث منفرج الزاوية.

A إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يكن في المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثًا منفرج الزاوية.

C إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه لا يحتوي زاوية منفرجة واحدة.

D إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي زاوية منفرجة واحدة.

التبرير المنطقي

يتطلب حل مسائل الهندسة أحيانًا كثيرة استعمال التبريرات المنطقية؛ لذا يمكنك استعمال أساسيات التبرير المنطقي في حل مسائل الاختبارات المعيارية.

استراتيجيات استعمال التبرير المنطقي

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتحدد المعطيات، وما يجب أن تجده للإجابة عن السؤال.

الخطوة 2

حدّد هل بإمكانك تطبيق أحد مبادئ التبرير المنطقي في هذه المسألة.

- **المثال المضاد:** المثال المضاد هو المثال الذي يناقض عبارة يفترض أنها صحيحة. حدّد بدائل الإجابة التي تراها مناقضة لنص المسألة واحذفها.
- **المسلّمات:** المسلّمة هي عبارة تصف علاقة أساسية في الهندسة. حدّد هل بإمكانك تطبيق مسلّمة للتوصل إلى نتيجة منطقية.

الخطوة 3

إذا لم تصل إلى أي نتيجة من مبادئ خطوة 2.

حدد هل تساعدك الأدوات الآتية على الحل؟

- **الأنماط:** ابحث عن نمط لعمل تخمين مناسب.
- **جداول الصواب:** استعمل جدول صواب لتنظيم قيم الصواب للعبارات المعطاة في المسألة.
- **أشكال ڤن:** استعمل أشكال ڤن لتمثيل العلاقات بين عناصر المجموعات بوضوح.
- **البراهين:** استعمل التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجة على شكل برهان.

الخطوة 4

إذا لم يكن بإمكانك الوصول إلى نتيجة حتى باستعمال مبادئ خطوة 3، فخمِّن بديل الإجابة الأنسب، ثم ضع علامة على السؤال حتى ترجع إليه إذا بقي متسع من الوقت في نهاية الاختبار.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

عدد طلاب مدرسة 292 طالبًا، شارك 94 منهم في الألعاب الرياضية، و 122 في النوادي الثقافية، و 31 في كليهما. كم طالبًا لم يشارك في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية؟

A 95   **C** 122

B 107   **D** 138

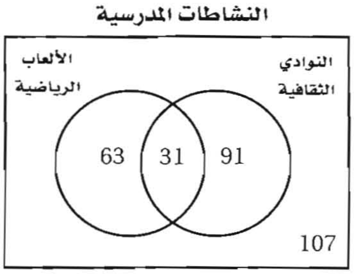
اقرأ المسألة جيدًا. من الواضح أنه ليس هناك أمثلة مضادة واضحة، ولا يمكن استعمال المسلمات للوصول إلى نتيجة منطقية؛ إذن علينا استعمال أدوات لتنظيم المعلومات المعطاة؛ لنراها بوضوح.

يمكننا رسم شكل ڤن لنرى التقاطع بين المجموعتين، وتحديد معطيات السؤال على هذا الشكل.

حدد عدد الطلاب الذين شاركوا فقط في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية.

الألعاب الرياضية فقط: $94 - 31 = 63$

النوادي الثقافية فقط: $122 - 31 = 91$



استعمل هذه المعلومات لحساب عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية.

$$292 - 63 - 91 - 31 = 107$$

إذن عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية يساوي107 طلاب . فالإجابة الصحيحة هي B.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال مما يأتي. ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على النموذج المخصص للإجابة.

1) حدد قيمة الصواب للعبارة الآتية. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا.

ناتج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

A خاطئة؛ $8 \times 4 = 32$

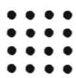
B خاطئة؛ $7 \times 6 = 42$

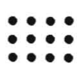
C خاطئة؛ $3 \times 10 = 30$

D صحيحة

2) أوجد الحد التالي في النمط أدناه.

F


H


G


J


اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة.

1) أيُّ عبارات الوصل الآتية صحيحة اعتمادًا على p و q أدناه؟

p: يوجد أربعة حروف في كلمة ربيع.

q: يوجد حرفا علّة في كلمة ربيع.

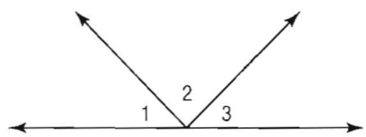
A $\sim p \wedge \sim q$

B $p \wedge q$

C $p \wedge \sim q$

D $\sim p \wedge q$

2) في الشكل الآتي $\angle 1 \cong \angle 3$.



أي الاستنتاجات الآتية ليس مؤكدة صحته؟

F $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$

G $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

H $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

J $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$

3) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم دائمًا.

أيّ **مما** يأتي يعدّ مثالًا مضادًا للعبارة السابقة؟

A زاويتان غير متجاورتين

B زاويتان منفرجتان غير متجاورتين

C زاويتان قائمتان غير متجاورتين

D زاويتان متكاملتان ومتجاورتان على مستقيم

4) أيّ العبارات أدناه تعدّ نتيجة منطقية للعبارتين الآتيتين؟

إذا نزل المطر اليوم، فستؤجل المباراة.

سوف تُقام المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

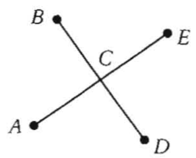
F إذا أُجِّلت المباراه، فإنها تُؤجَّل بسبب المطر.

G إذا نزل المطر اليوم، فستُقام المباراة يوم الجمعة.

H لا تقام بعض المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

J إذا لم ينزل المطر اليوم، فلن تُقام المباراة يوم الجمعة.

5) في الشكل أدناه تتقاطع $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$ في C. أي النتائج الآتية ليست صحيحة؟



A $\angle ACB \cong \angle ECD$

B $\angle ACB$ و $\angle ACD$ متجاورتان على مستقيم.

C $\angle BCE$ و $\angle ACD$ متقابلتان بالرأس.

D $\angle BCE$ و $\angle ECD$ متتامتان .

28) **أرجوحة :** في حديقة بيت صغير ست شجرات مزروعة **على** شكل سداسي منتظم. بكم طريقة يمكن تعليق الأرجوحة وتثبيتها على شجرتين من الشجرات الست؟

F 22 طريقة

G 12 طريقة

H 15 طريقة

J 36 طريقة

إرشادات للاختبار

السؤال 3 : المثال المضاد هو المثال الذي يُعطى لإثبات أن العبارة المعطاة ليست صحيحة دائمًا.

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك على نموذج الإجابة.

7) تقع النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة، وتقع النقطة B بين A و C وتقع النقطة C بين B و D. أكمل العبارة الآتية:

$$AB + \underline{\quad ؟ \quad} = AD$$

8) يحتوي المستقيم m النقاط D, E, F. إذا كان $DE = 12\text{ mm}$، و $EF = 15\text{ mm}$، والنقطة D بين E و F، فما طول $\overline{DF}$؟

9) استعمل البرهان الآتي للإجابة على السؤال أدناه .

المعطيات: $\angle A$ هي متممة $\angle B$ ، $m\angle B = 46°$

المطلوب: $m\angle A = 44°$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A$ هي متممة $\angle B$. $m\angle B = 46°$	**1)** معطيات
2) $m\angle A + m\angle B = 90°$	**2)** تعريف الزاويتين المتتامتين
3) $m\angle A + 46° = 90°$	**3)** خاصية التعويض للمساواة
4) $m\angle A + 46° - 46° = 90° - 46°$	**4)** ؟
5) $m\angle A = 44°$	**5)** بالتعويض.

ما التبرير الذي يفسر الخطوة 4؟

10) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية:

إذا كان قياس الزاوية أكبر من $90°$، فإنها منفرجة.

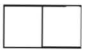
11) النقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، إذا كانت $DE = 8x - 3$ ، $EF = 3x + 7$ ، فأوجد قيمة x؟

أسئلة ذات إجابات مطولة

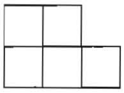
اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

12) إليك النمط الآتي:

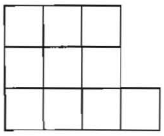
الشكل (1)



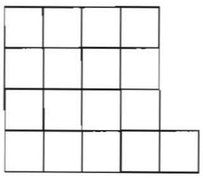
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



a) ضع تخمينًا لعدد المربعات في أي من أشكال النمط.

b) اكتب عبارة جبرية يمكن استعمالها لإيجاد عدد المربعات في الشكل رقم n من هذا النمط.

c) ما عدد المربعات في الشكل السادس من هذا النمط؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس...	1-2	1-8	1-1	1-4	1-8	1-5	1-7	1-7	1-6	1-3	1-7	1-1

الفصل

2

التوازي والتعامد
Parallel And Perpendicular

فيما سبق:

درستُ المستقيمات والزوايا واستعمال التبرير الاستنتاجي لكتابة براهين هندسية.

والآن:

- أحدد علاقات بين زوايا ناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين. وأبرهن توازي مستقيمين من خلال علاقات الزوايا المعطاة.
- أستعمل الميل لتحليل المستقيم وكتابة معادلته.
- أجد البعد بين نقطة ومستقيم، والبعد بين مستقيمين متوازيين.

لماذا؟

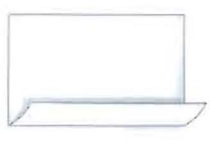
هندسة:

يعتمد المهندسون في تصاميم المباني على خصائص هندسية مختلفة منها التوازي والتعامد.

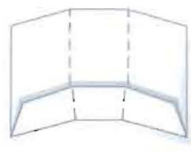
المطويات منظم أفكار

التوازي والتعامد: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات بين المستقيمات، مبتدئًا بورقة واحدة بمقاس A4 وست بطاقات.

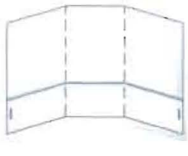
1 **اطوِ** جانب الورقة الأطول بعرض 4 cm لعمل جيب كما في الشكل.



2 **اطوِ** الورقة طوليًّا مرتين كما في الشكل.



3 **افتح** الورقة وثبت الحواف عند الجانبين؛ لتكوّن ثلاثة جيوب.



4 **اكتب** عنوانًا لكل جيب كما هو موضّح. وضع بطاقتين في كل جيب.

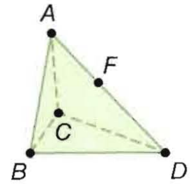
التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعن بالشكل المجاور.



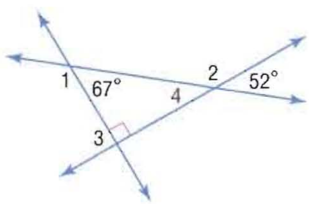
1) كم مستوى يظهر في الشكل؟

2) سمّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

3) هل تقع النقطتان C, D على استقامة واحدة؟ وضّح إجابتك.

4) **أجهزة:** يوضع جهاز مساحة الأراضي على حامل ثلاثي القوائم. هل تقع الرؤوس السفلية للقوائم الثلاثة في المستوى نفسه؟

أوجد قياس كل من الزوايا الآتية:



5) $\angle 1$

6) $\angle 2$

7) $\angle 3$

8) $\angle 4$

أوجد قيمة x لقيم a, b المعطاة في كل معادلة مما يأتي:

9) $a + 8 = -4(x - b), a = 8, b = 3$

10) $b = 3x + 4a, a = -9, b = 12$

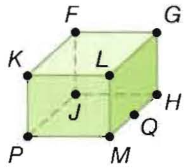
11) $\frac{a+2}{b+13} = 5x, a = 18, b = -1$

12) **معارض:** يقدم معرض هدية بسعر تشجيعي قدره 15 ريالًا عند شراء بطاقتي دخول. إذا دفع أحمد وأخوه 95 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل ما دفعه أحمد وأخوه، ثم حلها لإيجاد ثمن بطاقة الدخول الواحدة.

مراجعة سريعة

مثال 1

استعن بالشكل المجاور.



a) **كم مستوى يظهر في الشكل؟**

ستة مستويات هي:

$FGLK, JHMP, FKPJ, GLMH, FGHJ, KLMP$.

b) **سمّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.**

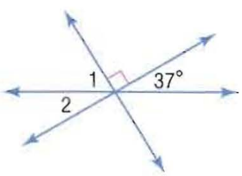
تقع النقاط M, Q, H على استقامة واحدة.

c) **هل تقع النقاط F, K, J في المستوى نفسه؟ وضّح إجابتك.**

نعم. النقاط F, K, J تقع جميعها في المستوى $FKPJ$.

مثال 2

أوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1 + 37° + 90° = 180°$	بالجمع
$m\angle 1 = 53°$	بالتبسيط

مثال 3

أوجد قيمة x في المعادلة $a + 8 = b(x - 7)$، إذا كان $a = 12, b = 10$.

$a + 8 = b(x - 7)$	المعادلة المعطاة
$12 + 8 = 10(x - 7)$	$a = 12, b = 10$
$20 = 10x - 70$	بالتبسيط
$90 = 10x$	بالجمع
$x = 9$	بالقسمة

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

2-1 المستقيمان المتوازيان والقاطع
Parallel Lines and Transeveral

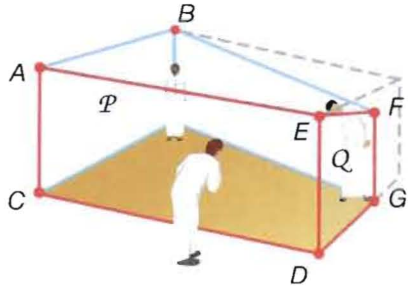
فيما سبق:
استعملتُ علاقات الزوايا والقطع المستقيمة لأبرهن نظريات.

والآن:
- أتعرّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.
- أسمي أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع.

المفردات:
المستقيمان المتوازيان
parallel lines
المستقيمان المتخالفان
skew lines
المستويان المتوازيان
parallel planes
القاطع
transversal
الزوايا الداخلية
interior angles
الزوايا الخارجية
exterior angles
الزاويتان المتحالفتان
consecutive angles
الزاويتان المتبادلتان داخليًا
alternate interior angles
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا
alternate exterior angles
الزاويتان المتناظرتان
corresponding angles

لماذا؟

تُظهر غُرفة الخداع البصري أن الشخص الواقف في الزاوية اليمنى أكبر من الشخص الواقف في الزاوية اليسرى. وفي المنظر الأمامي، يبدو الحائطان الأمامي والخلفي متوازيين على حين أنهما ليسا كذلك. ويبدو السقف والأرضية أفقيين، ولكنهما في الحقيقة ليسا أفقيين.



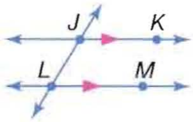
العلاقات بين المستقيمات والمستويات: استُعمِلتْ مستقيمات متوازية ومتقاطعة ومتخالفة بالإضافة إلى مستويات متقاطعة وأخرى متوازية لإنشاء غرفة الخداع كما يتضح في المخطط المجاور.

مفاهيم أساسية — التوازي والتخالف

أضف إلى مطويتك

المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان يقعان في المستوي نفسه، ولا يتقاطعان.

مثال: $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$



تستعمل رؤوس الأسهم لتدل على توازي مستقيمين.

المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لا يتقاطعان، ولا يقعان في المستوى نفسه.

مثال: المستقيمان ℓ, m متخالفان.

المستويان المتوازيان هما مستويان غير متقاطعين.

مثال: المستويان $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ متوازيان.

تقرأ $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$: المستقيم JK يوازي المستقيم LM

إذا كانت القطع المستقيمة أو أنصاف المستقيمات أجزاءً من مستقيمات متوازية أو متخالفة، فإنها تكون متوازية أو متخالفة أيضًا.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد علاقات التوازي والتخالف

حدِّد كلًّا مما يأتي مستعملًا قطعة الجبن في الشكل المجاور:

a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{JP}$.

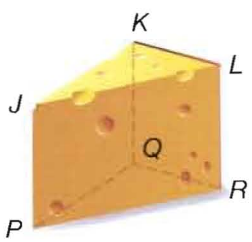
$\overline{KQ}, \overline{LR}$

b) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{KL}$.

$\overline{JP}, \overline{PQ}, \overline{PR}$

c) مستوى يوازي المستوى PQR.

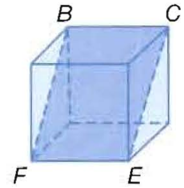
المستوى JKL هو المستوى الوحيد الموازي للمستوى PQR.



تنبيه!

التوازي والتخالف

في تمرين تحقق من فهمك 1A : $\overleftrightarrow{FE}$ لا يخالف $\overleftrightarrow{BC}$ بل يوازيه، وذلك في المستوى BCF.



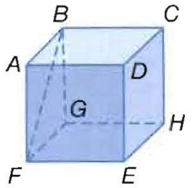
تحقق من فهمك

حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :

1A) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overleftrightarrow{BC}$.

1B) قطعة مستقيمة توازي EH .

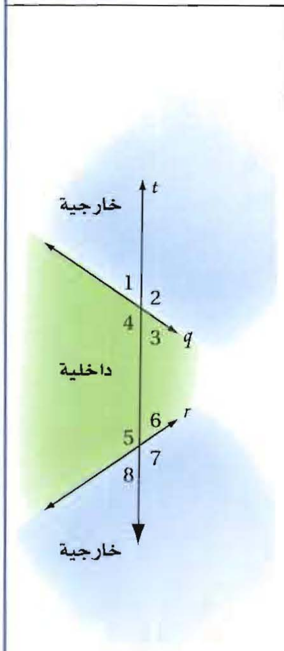
1C) جميع المستويات التي توازي المستوى DCH .



علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع: **القاطع** هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في المستوى نفسه وفي نقاط مختلفة. ففي الشكل أدناه، المستقيم t قاطع للمستقيمين q, r. لاحظ أن المستقيم t يشكّل ثماني زوايا مع المستقيمين q, r . وأزواج محددة من هذه الزوايا لها أسماء خاصة.

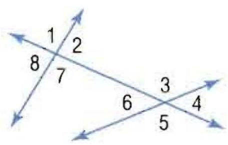
مفاهيم أساسية — علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

أضف إلى مطويتك

توجد أربع **زوايا داخلية** في المنطقة بين المستقيمين q, r .	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$	
توجد أربع **زوايا خارجية** في منطقتين ليستا بين q, r .	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$	
الزاويتان المتحالفتان هما زاويتان داخليتان واقعتان في جهة واحدة من القاطع t.	$\angle 4$ و $\angle 5$ ، $\angle 3$ و $\angle 6$	
الزاويتان المتبادلتان داخليًا هما زاويتان داخليتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 3$ و $\angle 5$ ، $\angle 4$ و $\angle 6$	
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا هما زاويتان خارجيتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 1$ و $\angle 7$ ، $\angle 2$ و $\angle 8$	
الزاويتان المتناظرتان هما زاويتان تقعان في جهة واحدة من القاطع t وفي الجهة نفسها من المستقيمين q, r .	$\angle 1$ و $\angle 5$ ، $\angle 2$ و $\angle 6$ $\angle 3$ و $\angle 7$ ، $\angle 4$ و $\angle 8$	

مثال 2 — تصنيف علاقات أزواج الزوايا

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



a) $\angle 5$ و $\angle 1$

متبادلتان خارجيًا

b) $\angle 7$ و $\angle 6$

متحالفتان

c) $\angle 4$ و $\angle 2$

متناظرتان

d) $\angle 6$ و $\angle 2$

متبادلتان داخليًا

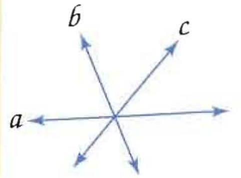
تحقق من فهمك

2A) $\angle 3$ و $\angle 7$ **2B)** $\angle 5$ و $\angle 7$ **2C)** $\angle 4$ و $\angle 8$ **2D)** $\angle 2$ و $\angle 3$

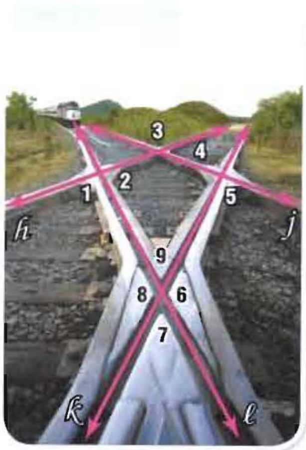
عندما يوجد في الشكل أكثر من قاطع واحد، عيّن أولًا القاطع الذي ينتج عنه زوج الزوايا المعطاة بتعيين المستقيم الذي يصل بين رأسيهما.

إرشادات للدراسة

القاطع في الشكل أدناه، المستقيم c ليس قاطعًا للمستقيمين a, b، لأن المستقيم c يقطع المستقيمين a, b في نقطة واحدة فقط.



مثال 3 تحديد القاطع وتصنيف أزواج الزوايا



استعن بصورة تقاطع سكك القطار المجاورة لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف الأزواج إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.

a) $\angle 1$ و $\angle 3$

القاطع الذي يصل بين $\angle 1$ و $\angle 3$ هو المستقيم h.
وهما زاويتان متبادلتان خارجيًا.

b) $\angle 5$ و $\angle 6$

القاطع الذي يصل بين $\angle 5$ و $\angle 6$ هو المستقيم k.
وهما زاويتان متحالفتان.

c) $\angle 2$ و $\angle 6$

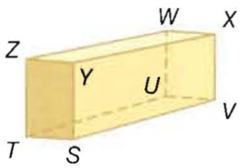
القاطع الذي يصل بين $\angle 2$ و $\angle 6$ هو المستقيم ℓ. وهما زاويتان متناظرتان.

تحقق من فهمك

3A) $\angle 3$ و $\angle 5$ **3B)** $\angle 2$ و $\angle 8$ **3C)** $\angle 5$ و $\angle 7$ **3D)** $\angle 2$ و $\angle 9$

تأكد

المثال 1 حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا متوازي المستطيلات في الشكل المجاور :

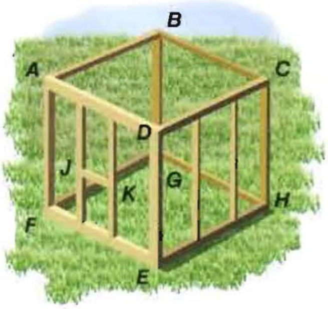


1) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{SV}$.

2) مستوى يوازي المستوى ZWX .

3) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{TS}$ وتحتوي النقطة W .

4) **إنشاءات:** استعمل الشكل المجاور لتحديد كلٍّ مما يأتي :



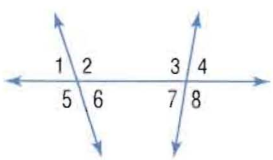
a) ثلاثة أزواج من المستويات المتوازية.

b) ثلاث قطع مستقيمة توازي $\overline{DE}$.

c) قطعتين مستقيمتين توازيان $\overline{FE}$.

d) زوجين من القطع المستقيمة المتخالفة.

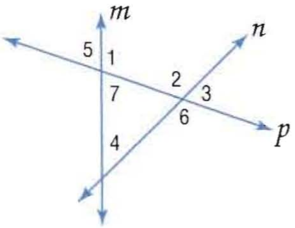
المثال 2 مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



5) $\angle 1$ و $\angle 8$ **6)** $\angle 2$ و $\angle 4$

7) $\angle 3$ و $\angle 6$ **8)** $\angle 6$ و $\angle 7$

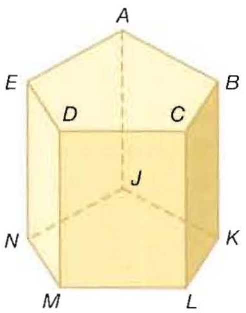
المثال 3 استعن بالشكل المجاور لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متخالفتين:



9) $\angle 2$ و $\angle 4$
10) $\angle 5$ و $\angle 6$
11) $\angle 4$ و $\angle 7$
12) $\angle 2$ و $\angle 7$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :



13) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{DM}$.

14) مستوى يوازي المستوى ACD .

15) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{BC}$.

16) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى EDM .

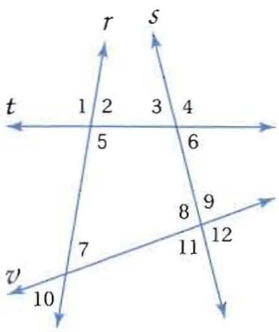
17) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{AE}$.

18) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EN}$.

19) قطعة مستقيمة توازي AB وتمر بالنقطة J.

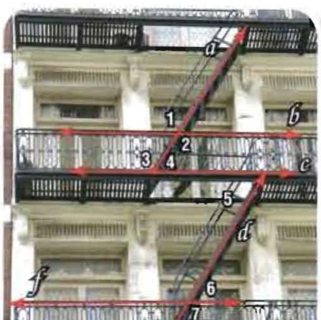
20) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{CL}$ وتمر بالنقطة E .

المثال 2 مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



21) $\angle 4$ و $\angle 9$
22) $\angle 5$ و $\angle 7$
23) $\angle 3$ و $\angle 5$
24) $\angle 10$ و $\angle 11$
25) $\angle 1$ و $\angle 6$
26) $\angle 6$ و $\angle 8$
27) $\angle 2$ و $\angle 3$
28) $\angle 9$ و $\angle 10$
29) $\angle 4$ و $\angle 11$
30) $\angle 7$ و $\angle 11$

المثال 3 **سلَّم طوارئ:** استعن بصورة سلَّم الطوارئ المجاورة لتحدد المستقيم القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



31) $\angle 1$ و $\angle 2$
32) $\angle 2$ و $\angle 4$
33) $\angle 4$ و $\angle 5$
34) $\angle 6$ و $\angle 7$
35) $\angle 7$ و $\angle 8$
36) $\angle 2$ و $\angle 3$

37) **كهرباء:** استعمل الصورة المجاورة في فقرة الربط مع الحياة والمعلومات أدناها للإجابة عما يأتي:

a) ماذا يجب أن تكون عليه العلاقة بين خطي التوصيل الكهربائي p و m ؟ وضح إجابتك.

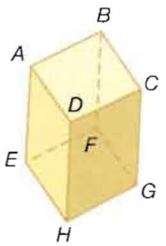
b) ما العلاقة بين ذراع الحمل q وخطي التوصيل الكهربائي p و m ؟

الربط مع الحياة

لا يسمح بتقاطع خطوط التوصيل بين أبراج الكهرباء، لتجنب حدوث تماس يؤدي إلى انقطاع التيار الكهربائي أو إشعال الحرائق.

الربط مع الحياة

السلالم الكهربائية أكثر فعالية من المصاعد في الارتفاعات القصيرة، وذلك بسبب قدرتها الاستيعابية الكبيرة، إذ يمكن لبعض السلالم الكهربائية نقل 6000 شخص خلال ساعة واحدة.

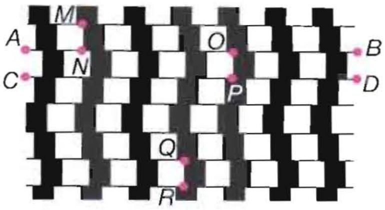


استعن بالشكل المجاور لتصف العلاقة بين كل زوج من القطع المستقيمة الآتية بكتابة متوازيتين، أو متخالفتين، أو متقاطعتين:

(38 $\overline{FG}$ و $\overline{BC}$ **(39** $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$

(40 $\overline{DH}$ و $\overline{HG}$ **(41** $\overline{DH}$ و $\overline{BF}$

(42 $\overline{EF}$ و $\overline{BC}$ **(43** $\overline{CD}$ و $\overline{AD}$

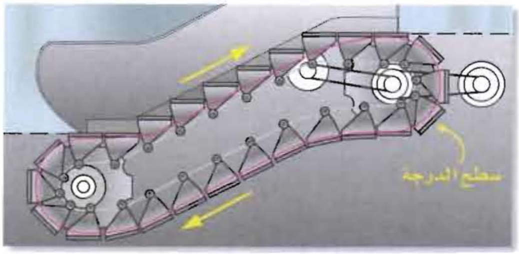


(44 **خداع بصري:** صُمِّم نموذج الخداع البصري المجاور باستعمال مربعات ومستقيمات فقط.

a) ما العلاقة بين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$؟ فسِّر تبريرك.

b) ما العلاقة بين $\overline{MN}$ و $\overline{QR}$؟ وما العلاقة بين القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ والقطعة المستقيمة $\overline{OP}$؟

(45 **سلّم كهربائي:** يتكون السلّم الكهربائي من درجات مثبتة على مسار متصل بمحرّك، حيث تُطوى درجات أعلى السلم وأسفله ليتكون سطح مستوٍ عند الدخول والخروج.



a) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة؟

b) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الثلاثة أعلى السلم؟

c) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة وأسطح الدرجات الهابطة في مسار السلم؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(46 **مسألة مفتوحة:** يحتوي المستوى $\mathcal{P}$ المستقيمين المتوازيين a, b. ويقطع المستقيم c المستوى $\mathcal{P}$ عند النقطة J. إذا كان المستقيمان a, c متخالفين، والمستقيمان b, c غير متخالفين، فارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.

(47 **تحدٍ:** افترض أن النقاط A, B, C تقع في المستوى $\mathcal{P}$، وأن النقاط D, E, F تقع في المستوى Q. وأن المستقيم m يحتوي النقطتين D, F ولا يقطع المستوى $\mathcal{P}$. وأن المستقيم n يحتوي النقطتين A, E.

a) ارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.

b) ما العلاقة بين المستويين $\mathcal{P}$ و Q؟

c) ما العلاقة بين المستقيمين m و n؟

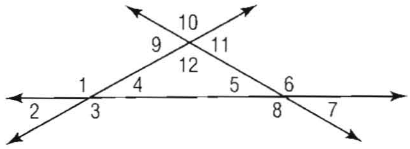
تبرير: **المستويان $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ متوازيان، والمستوى $\mathcal{Z}$ يقطع المستوى $\mathcal{X}$. ويقع المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ في المستوى $\mathcal{X}$، ويقع المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ في المستوى $\mathcal{Y}$، ويقع المستقيم $\overleftrightarrow{EF}$ في المستوى $\mathcal{Z}$. حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك:**

(48 $\overleftrightarrow{AB}$ يخالف $\overleftrightarrow{CD}$. **(49** $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع $\overleftrightarrow{EF}$.

(50 **اكتب:** وضّح لماذا لا يكون المستويان متخالفين أبدًا.

تدريب على الاختبار المعياري

51) أي مما يأتي يمثل زاويتين متبادلتين خارجيًّا؟



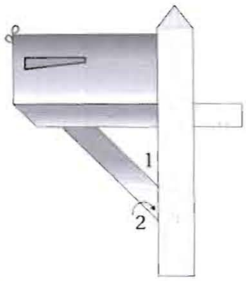
A $\angle 1$ و $\angle 5$

B $\angle 2$ و $\angle 6$

C $\angle 2$ و $\angle 10$

D $\angle 5$ و $\angle 9$

52) يمثل الشكل المجاور صندوق بريد.
أي مما يأتي يصف $\angle 1$ و $\angle 2$؟



A زاويتان متبادلتان خارجيًّا

B زاويتان متبادلتان داخليًّا

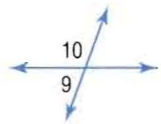
C زاويتان متحالفتان

D زاويتان متناظرتان

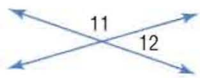
مراجعة تراكمية

أوجد قياسات الزوايا المرقمة في كل مما يأتي: (الدرس 8-1)

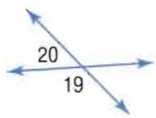
53) $m\angle 9 = (2x - 4)°$, $m\angle 10 = (2x + 4)°$



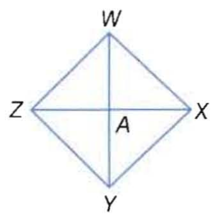
54) $m\angle 11 = (4x)°$, $m\angle 12 = (2x - 6)°$



55) $m\angle 19 = (100 + 20x)°$, $m\angle 20 = (20x)°$



56) برهان: أكمل البرهان الآتي: (الدرس 7-1)



المعطيات: $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$

A نقطة منتصف $\overline{WY}$ و $\overline{ZX}$.

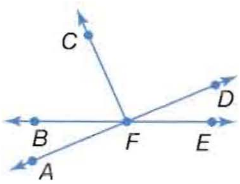
المطلوب: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$

57) استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارتين الآتيتين، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذَّر الحصول على نتيجة صحيحة، فاكتب "لا نتيجة صحيحة". (الدرس 4-1)

A إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فإنهما ليستا متجاورتين على مستقيم.

B إذا تجاورت زاويتان على مستقيم فإنهما غير متطابقتين.

جبر: في الشكل المجاور: $\overline{FC} \perp \overline{AD}$. (مهارة سابقة)



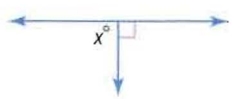
58) إذا كان $m\angle CFD = (12a + 45)°$، فأوجد قيمة a .

59) إذا كان $m\angle AFB = (8x - 6)°$ و $m\angle BFC = (14x + 8)°$، فأوجد قيمة x .

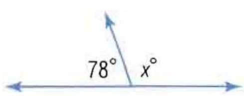
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

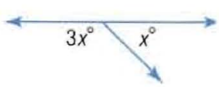
60)



61)



62)



2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angles and Parallel Lines

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire لتستكشف قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

نشاط المستقيمان المتوازيان والقاطع

الخطوة 1: ارسم مستقيمًا

ارسم مستقيمًا وسمِّ النقطتين F, G عليه، ثم استعمل أداة المستقيم لرسم $\overleftrightarrow{FG}$.

الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا

حدد نقطة لا تقع على $\overleftrightarrow{FG}$ وسَمِّها J.

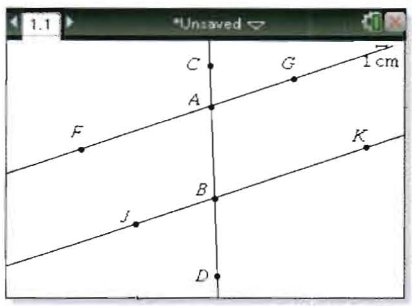
ارسم مستقيمًا يمر بها ويوازي FG بالضغط على المفاتيح

menu 7:Points & Lines 1:Point

menu J ctrl menu 2:Label

esc 2:Parallel A:Construction

ثم عيِّن النقطة K على المستقيم الموازي.



الخطوة 3: ارسم قاطعًا

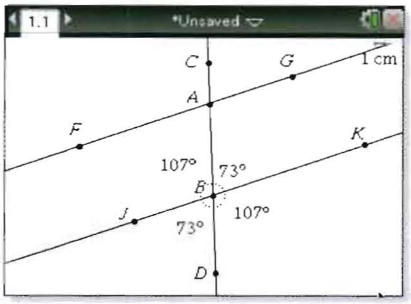
ارسم النقطة A على $\overleftrightarrow{FG}$، والنقطة B على $\overleftrightarrow{JK}$. ثم اختر A, B لرسم القاطع $\overleftrightarrow{AB}$، وارسم نقطتين على $\overleftrightarrow{AB}$ وسمّهما C, D كما في الشكل أدناه.

الخطوة 4: قِسْ كل زاوية

قِس الزوايا الثماني الناتجة عن المستقيمات الثلاثة.

menu 8:Measurement 4:Angle

واضغط النقاط J ثم B ثم D، فيظهر $m\angle JBD = 73°$. كرّر ذلك مع باقي الزوايا.



حلّل النتائج:

1) سجّلْ القياسات من الخطوة 4 في جدول يشبه الجدول المجاور. أي الزوايا لها القياس نفسه؟

الزاوية	$\angle FAC$	$\angle CAG$	$\angle GAB$	$\angle FAB$	$\angle JBA$	$\angle ABK$	$\angle KBD$	$\angle JBD$
القياس الأول								

2) اسحب النقطة C أو D لتحرك القاطع $\overleftrightarrow{AB}$ بحيث يقطع المستقيمين المتوازيين بزاوية مختلفة. أضفْ صفًا بعنوان القياس الثاني إلى جدولك، ثم سجّل القياسات الجديدة. كرّر هذه الخطوات، بإضافة صفوف أخرى عناوينها: القياس الثالث، القياس الرابع، ...

3) عيّن أزواج الزوايا التي لها الأسماء الخاصة الآتية وصِف العلاقة بين قياساتها باستعمال الزوايا المدونة في الجدول، ثم اكتب تخمينًا على صورة (إذا كان... فإن...) حول قياس كل زوج من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

a) متناظرتان **b)** متبادلتان داخليًا **c)** متبادلتان خارجيًا **d)** متحالفتان

4) اسحب النقطة C أو D بحيث يكون قياس أي من الزوايا 90.

a) ماذا تلاحظ حول قياسات الزوايا الأخرى؟

b) كوّن تخمينًا حول القاطع الذي يكون عموديًا على أحد المستقيمين المتوازيين.

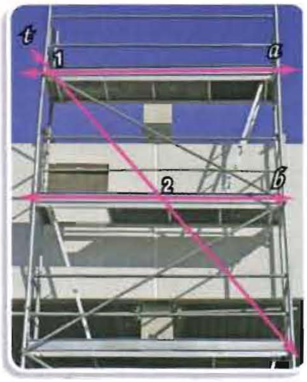
2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angeles and Parallel Lines

فيما سبق:
درستُ تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

والآن:
- أستعمل نظريات المستقيمين المتوازيين لتعيين الزوايا المتطابقة.
- أستعمل الجبر لأجد قياسات الزوايا.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



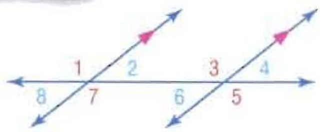
تستعمل طريقة الإسقالات كثيرًا في أعمال البناء، وتتكون من أذرع معدنية موصولة بطريقة هندسية توفر مساحات عمل أفقية عند ارتفاعات مختلفة وبطريقة آمنة. فالقاطع t المبين في الصورة يوفر دعامة لمساحتي العمل المتوازيتين.

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا: في الصورة أعلاه: المستقيم t قاطع للمستقيمين a, b؛ إذن $\angle 1$ و $\angle 2$ متناظرتان.
وبما أن a, b متوازيان؛ لذا فإن هناك علاقة خاصة بين $\angle 1$ و $\angle 2$.

مسلمة 2.1 **مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**

أضف إلى مطويتك

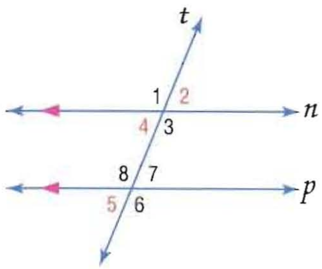
إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.



أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 7, \angle 6 \cong \angle 8$

مثال 1 **استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**

في الشكل المجاور: $m\angle 5 = 72°$. أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.



a) $\angle 4$

$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$m\angle 4 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 72°$	بالتعويض

b) $\angle 2$

$\angle 2 \cong \angle 4$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$\angle 2 \cong \angle 5$	خاصية التعدي للتطابق
$m\angle 2 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 72°$	بالتعويض

تحقق من فهمك

1A) $\angle 1$ **1B)** $\angle 2$ **1C)** $\angle 3$

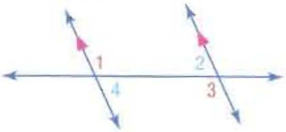
في المثال 1 ، الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا 5 ,2 متطابقتان ، ويقود هذا المثال إلى النظريات الآتية حول العلاقة بين أزواج أخرى من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

نظريات

أضف إلى مطويتك

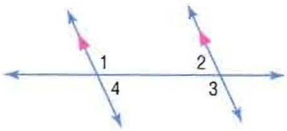
المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

2.1 **نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا :** **إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.**



أمثلة : $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$

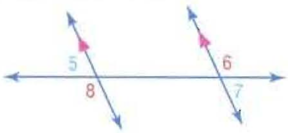
2.2 **نظرية الزاويتين المتحالفتين:** **إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.**



أمثلة : $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

$\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.

2.3 **نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا :** **إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.**



أمثلة : $\angle 7 \cong \angle 5$ و $\angle 8 \cong \angle 6$

سوف تبرهن النظريتين 2.2 و 2.3 في السؤالين 24 و 29 على الترتيب

بما أن المسلّمات تُقبل دون برهان ، فيمكنك استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لإثبات كل من النظريات السابقة.

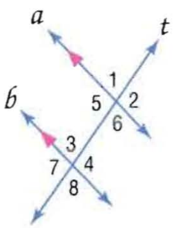
برهان

نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

المعطيات: $a \parallel b$

t قاطع للمستقيمين b ، a.

المطلوب: $\angle 4 \cong \angle 5$ ، $\angle 3 \cong \angle 6$



برهان حر:

لدينا من المعطيات $a \parallel b$ ، والمستقيم t قاطع لهما. ومن مسلّمة الزاويتين المتناظرتين $\angle 4 \cong \angle 2$ و $\angle 8 \cong \angle 6$. وكذلك $\angle 2 \cong \angle 5$ و $\angle 3 \cong \angle 8$ ؛ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان؛ لذا فإن $\angle 5 \cong \angle 4$ و $\angle 3 \cong \angle 6$ بحسب خاصية التعدي للتطابق.

الربط مع الحياة

يُشترط عند تخطيط الأحياء الجديدة في بعض المدن ألا يقل قياس زوايا تقاطعات شوارعها عن °60.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

تخطيط المدن: شارع الروضة وشارع النسيم متوازيان ويقطعهما شارع الحديقة.

فإذا كان $m\angle 1 = 118°$، فأوجد $m\angle 2$.

$\angle 2 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 2 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 118°$	بالتعويض

تحقق من فهمك

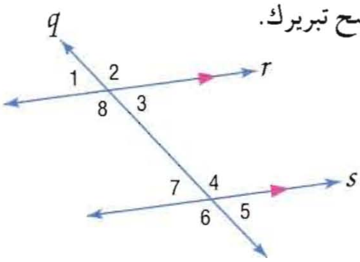
تخطيط المدن: استعن بالشكل أعلاه للإجابة عن السؤالين الآتيين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها :

2A) إذا كان $m\angle 1 = 100°$، فأوجد $m\angle 4$.

2B) إذا كان $m\angle 3 = 70°$، فأوجد $m\angle 4$.

الجبر وقياسات الزوايا: يمكن استعمال العلاقات الخاصة بين الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد قيم المتغيرات



جبر: استعمل الشكل المجاور لإيجاد المتغير في كل مما يأتي. وضّح تبريرك.

a) إذا كان $m\angle 1 = 85°$ ، $m\angle 4 = (2x - 17)°$، فأوجد قيمة x.

$\angle 3 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$m\angle 3 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 3 = 85°$	بالتعويض

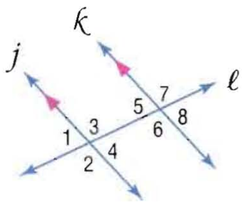
بما أن المستقيمين r, s متوازيان، فإن الزاويتين $\angle 3$ ، $\angle 4$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$85 + 2x - 17 = 180$	بالتعويض
$2x + 68 = 180$	بالتبسيط
$2x = 112$	بطرح 68 من كلا الطرفين
$x = 56$	بقسمة كلا الطرفين على 2

b) إذا كان $m\angle 3 = (4y + 30)°$ ، $m\angle 7 = (7y + 6)°$، فأوجد قيمة y.

$\angle 3 \cong \angle 7$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 3 = m\angle 7$	تعريف تطابق الزوايا
$4y + 30 = 7y + 6$	بالتعويض
$30 = 3y + 6$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$24 = 3y$	بطرح 6 من كلا الطرفين
$8 = y$	بقسمة كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك



3A) إذا كان $m\angle 2 = (4x + 7)°$ ، $m\angle 7 = (5x - 13)°$، فأوجد قيمة x.

3B) إذا كان $m\angle 5 = 68°$ ، $m\angle 3 = (3y - 2)°$، فأوجد قيمة y.

إرشادات للدراسة

تطبيق المسلّمات والنظريات طبّق مسلّمات ونظريات هذا الدرس فقط على المستقيمات المتوازية التي يقطعها قاطع؛ لذا لا تفترض توازي مستقيمين إلا إذا ورد ذلك في النص، أو وُجدت أسهمٌ على المستقيمات تشير إلى توازيها.

تنتج علاقة خاصة عندما يكون القاطع لمستقيمين متوازيين عموديًّا عليهما.

قراءة الرياضيات

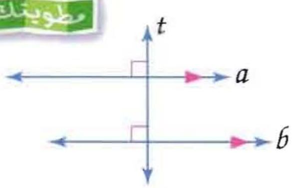
العمودي تذكّر أن الرمز $b \perp t$ يقرأ على النحو الآتي: المستقيم b عمودي على المستقيم t.

نظرية 2.4 نظرية القاطع العمودي

أضف إلى مطويتك

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى، فإنه يكون عموديًا على المستقيم الآخر.

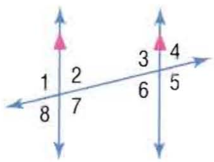
مثال: إذا كان $a \parallel b$ ، و $a \perp t$ ، فإن $b \perp t$.



سوف تبرهن النظرية 2.4 في السؤال 30

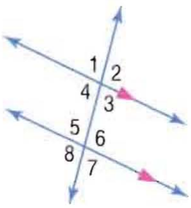
تأكد

المثال 1 في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 94^\circ$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



1) $\angle 3$
2) $\angle 5$
3) $\angle 4$

المثال 2 في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 101^\circ$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:

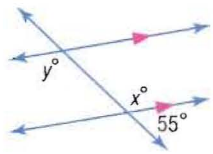


4) $\angle 6$
5) $\angle 7$
6) $\angle 5$

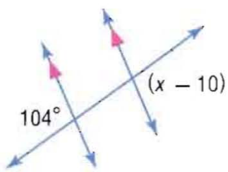
7) **طرق:** حاجز الحماية في الشكل المجاور يوازي سطح الطريق، والدعامات الرأسية يوازي بعضها بعضًا. أوجد قياسات الزوايا 2, 3, 4 .

المثال 3 أوجد قيمة كل متغير في الأشكال الآتية. وضّح تبريرك:

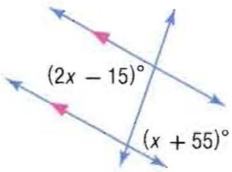
8)



9)

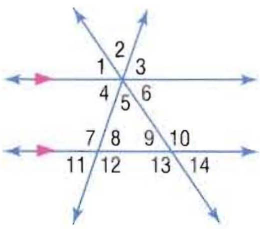


10)



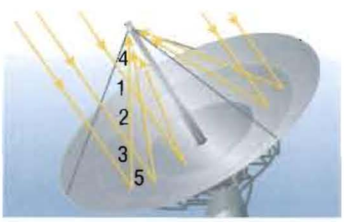
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 في الشكل المجاور: $m\angle 11 = 22^\circ$ ، و $m\angle 14 = 18^\circ$ ، أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



11) $\angle 4$
12) $\angle 3$
13) $\angle 2$
14) $\angle 10$
15) $\angle 5$
16) $\angle 1$

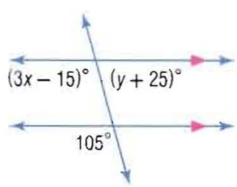
المثال 3 **طاقة شمسية:** يجمع الطبق الشمسي الطاقة بتوجيه أشعة الشمس نحو مُستقبِل يقع في بؤرة الطبق. مفترضًا أن أشعة الشمس متوازية، حدّد العلاقة بين أزواج الزوايا الآتية. وضّح تبريرك:



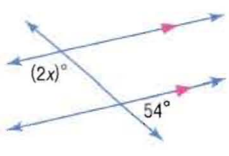
17) $\angle 1$ و $\angle 2$
18) $\angle 1$ و $\angle 3$
19) $\angle 4$ و $\angle 5$
20) $\angle 3$ و $\angle 4$

أوجد قيمة كل متغيّر في الأشكال الآتية. وضّح تبريرك:

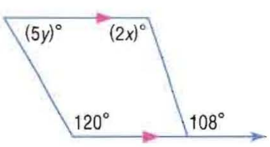
21)



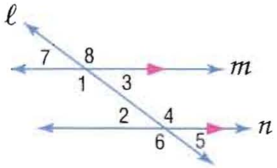
22)



23)



24) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.2 .



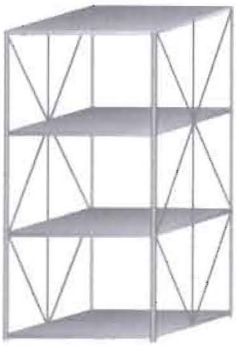
المعطيات: $m \parallel n$ ، ℓ قاطع للمستقيمين m, n.

المطلوب: $\angle 1$, $\angle 2$ متكاملتان، $\angle 3$, $\angle 4$ متكاملتان.

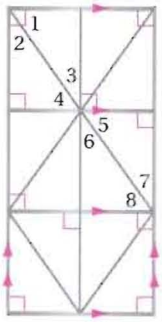
البرهان:

العبارات	المبررات
a) ___؟___	a) مُعطى
b) $\angle 1$, $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم $\angle 2$, $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم	b) ___؟___
c) ___؟___	c) نظرية الزاويتين المتكاملتين.
d) $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 3$	d) ___؟___
e) $m\angle 1 = m\angle 4, m\angle 2 = m\angle 3$	e) تعريف تطابق الزوايا.
f) ___؟___	f) ___؟___

تخزين: عند تركيب الرفوف، تُضاف دعامات جانبية متقاطعة. حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي. وضّح تبريرك :



الأمام



الجانب

25) $\angle 1$ و $\angle 8$

26) $\angle 1$ و $\angle 5$

27) $\angle 3$ و $\angle 6$

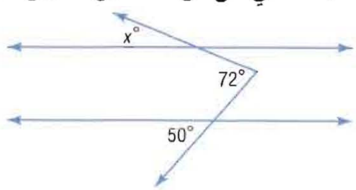
28) $\angle 1$ و $\angle 2$

29) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا. (نظرية 2.3).

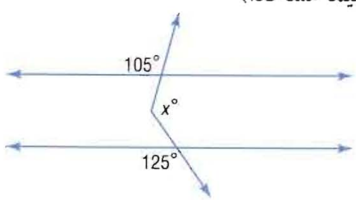
30) **برهان:** أثبت أنه إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى فإنه يكون عموديًا على الآخر. (نظرية 2.4).

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين: (إرشاد: ارسم مستقيمًا مساعدًا)

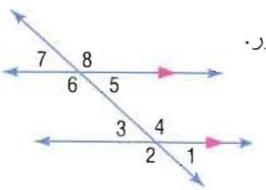
31)



32)



33) **احتمالات:** افترض أنك اخترت عشوائيًا زوجًا من الزوايا في الشكل المجاور.



a) ما عدد الاحتمالات الممكنة لاختيار زوج الزوايا؟ وضّح إجابتك.

b) صِف احتمالات العلاقة بين قياسي زاويتي كل زوج. وضّح إجابتك.

c) صِف احتمال اختيار زوج من الزوايا المتطابقة. وضّح إجابتك.

مراجعة المفردات

الاحتمال تذكر أن الاحتمال هو نسبة عدد نواتج الحادثة إلى العدد الكلي للنواتج.

34) **تمثيلات متعددة:** ستبحث في هذه المسألة العلاقة بين الزوايا الخارجية الواقعة في الجهة نفسها.

a) **هندسيًا:** ارسم خمسة أزواج من المستقيمات المتوازية m و n ، a و b ، r و s ، j و k ، x و y يقطع كلًّا منها قاطع t، ثم قِسْ جميع الزوايا الناتجة.

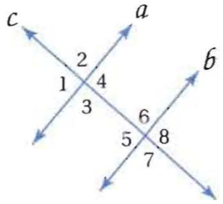
b) **جدوليًا:** دوِّن بياناتك في جدول.

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزاويتين الخارجيتين الواقعتين في جهة واحدة من القاطع.

d) **منطقيًا:** ما نوع التبرير الذي استعملته لوضع تخمينك؟ وضح إجابتك .

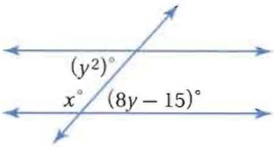
e) **برهان:** برهن صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا



35) **اكتب:** إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b، و $\angle 2 \cong \angle 1$.
فصِف العلاقة بين المستقيمين b و c. وضّح تبريرك.

36) **اكتب:** حدد أوجه الشبه والاختلاف بين نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.

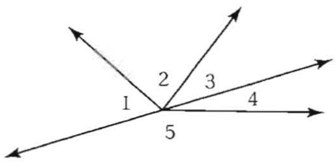


37) **تحدٍ:** أوجد جميع قيم x, y في الشكل المجاور.

38) **تبرير:** ما أقل عدد من قياسات الزوايا التي يجب معرفتها حتى يكون بمقدورك تحديد قياسات جميع الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع؟ وضّح إجابتك .

تدريب على الاختبار المعياري

39) افترض أن $\angle 5$, $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم، إذا كان
$m\angle 1 = (2x)^\circ$, $m\angle 2 = (3x - 20)^\circ$, $m\angle 3 = (x - 4)^\circ$،
فما قيمة $m\angle 3$؟



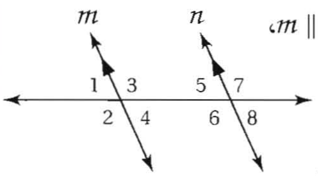
A 26°

B 28°

C 30°

D 32°

40) **إجابة قصيرة:** إذا كان $m \parallel n$، فأي العبارات الآتية صحيحة؟

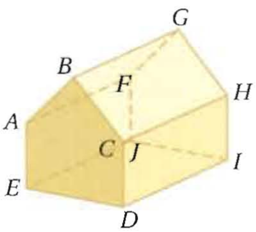


1) $\angle 6$, $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا.

2) $\angle 6$, $\angle 4$ متحالفتان.

3) $\angle 7$, $\angle 1$ متبادلتان خارجيًّا.

مراجعة تراكمية



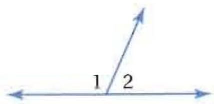
حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور: (الدرس 1-2)

41) جميع القطع المستقيمة التي توازي AB.

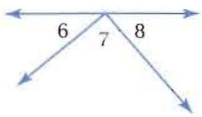
42) جميع القطع المستقيمة التي تخالف CH .

43) جميع المستويات التي توازي AEF.

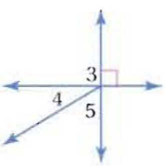
44) إذا كانت $\angle 2$, $\angle 1$ متجاورتين على مستقيم فأوجد $m\angle 1$.



45) إذا كانت $\angle 8$, $\angle 6$ متتامتين، $m\angle 8 = 47^\circ$ ، فأوجد $m\angle 6, m\angle 7$.



46) إذا كان $m\angle 4 = 32^\circ$ ، $m\angle 2 = 67^\circ$، فأوجد $m\angle 5, m\angle 3$



47) **قطارات:** وضع مهندس مخططًا لشبكة سكك حديدية تصل بين المدن A, B, C, D, E, F، فرسم قطعة مستقيمة بين كل مدينتين على الخريطة، ولاحظ أن أي ثلاث مدن منها لا تقع على استقامة واحدة. ما عدد القطع المستقيمة التي رسمها المهندس؟ (الدرس 5-1)

استعد للدرس اللاحق

بسّط كلًّا من العبارات الآتية :

48) $\frac{6 - 5}{4 - 2}$

49) $\frac{-11 - 4}{12 - (-9)}$

50) $\frac{16 - 12}{15 - 11}$

2-3 ميل المستقيم
Slope of Line

فيما سبق:
درستُ استعمال خصائص المستقيمات المتوازية لتحديد الزوايا المتطابقة.

والآن:
- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:
الميل
slope
معدّل التغير
rate of change

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل لوحات مرورية لتنبه السائقين إلى حالة الطريق. فاللوحة المجاورة تشير إلى انحدار الطريق بنسبة 6% . وهذا يعني أن الطريق ترتفع أو تهبط بمقدار 6 m رأسيًّا لكل 100 m أفقيًّا.

ميل المستقيم: درست سابقًا حساب ميل المستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال أي نقطتين عليه. وعرفت أنه نسبة الارتفاع الرأسي إلى المسافة الأفقية.

$$\text{الميل} = \frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{المسافة الأفقية}}$$

يمكنك استعمال إحداثيات النقاط على المستقيم لتشتق صيغة للميل.

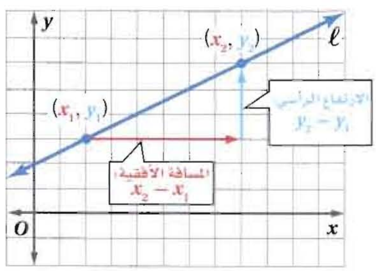
مفهوم أساسي — ميل المستقيم

أضف إلى مطويتك

في المستوى الإحداثي، **ميل المستقيم** هو نسبة التغير في اتجاه محور y إلى التغير في اتجاه محور x بين أي نقطتين عليه.

ويعطى الميل m لمستقيم يحتوي نقطتين إحداثياهما (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) بالصيغة:

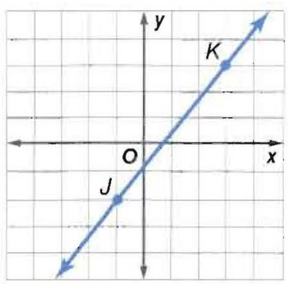
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، حيث $x_1 \neq x_2$.



مثال 1 إيجاد ميل المستقيم

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

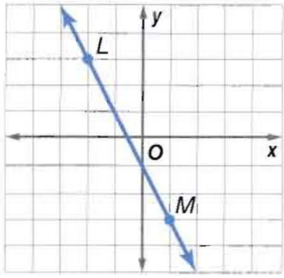
a)



عوِّض عن (x_1, y_1) بـ $(-1, -2)$، وعن (x_2, y_2) بـ $(3, 3)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$= \frac{3 - (-2)}{3 - (-1)}$	بالتعويض
$= \frac{5}{4}$	بالتبسيط

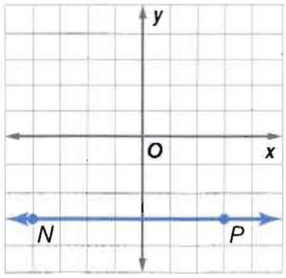
(b



$$(x_1, y_1) = (-2, 3),\ (x_2, y_2) = (1, -3)$$

صيغة الميل	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويض	$= \dfrac{-3 - 3}{1 - (-2)}$
بالتبسيط	$= -2$

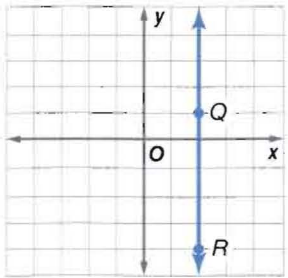
(c



$$(x_1, y_1) = (-4, -3),\ (x_2, y_2) = (3, -3)$$

صيغة الميل	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويض	$= \dfrac{-3 - (-3)}{3 - (-4)}$
بالتبسيط	$= \dfrac{0}{7} = 0$

(d



$$(x_1, y_1) = (2, 1),\ (x_2, y_2) = (2, -4)$$

صيغة الميل	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويض	$= \dfrac{-4 - 1}{2 - 2}$
بالتبسيط	$= \dfrac{-5}{0}$

ميل هذا المستقيم **غير معرّف**.

إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيم في المثال 1d غير معرّف؛ لأنه لا يوجد عدد تضربه في 0 يُعطي −5. وبما أن هذا صحيح لأي عدد، فإن أي عدد مقسوم على 0 يمثل كمية غير معرّفة. ومن ذلك يكون ميل أي مستقيم رأسي غير معرّف.

✓ تحقق من فهمك

1A) المستقيم الذي يحتوي $(-3, -5), (6, -2)$.

1B) المستقيم الذي يحتوي $(-6, -2), (8, -3)$.

1C) المستقيم الذي يحتوي $(4, -3), (4, 2)$.

1D) المستقيم الذي يحتوي $(4, 3), (-3, 3)$.

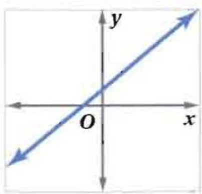
يوضّح المثال 1 أربع حالات مختلفة للميل وهي :

ملخص المفهوم

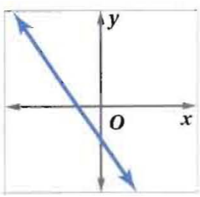
حالات الميل

أضف إلى مطويتك

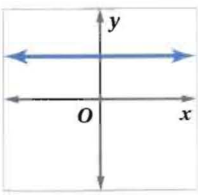
الميل موجب



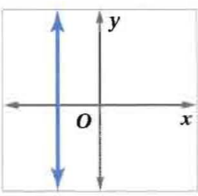
الميل سالب



الميل يساوي صفرًا



الميل غير معرّف



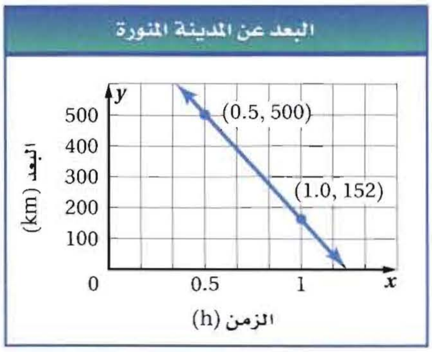
يمكن تفسير الميل على أنه **معدّل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x. ويمكن استعمال ميل المستقيم أيضًا لتعيين إحداثيي أي نقطة على المستقيم.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال الميل معدلًا للتغير

طائرات: تحلّق طائرة في مسار جوي مستقيم يمر بمدينة الرياض ثم المدينة المنورة. إذا كانت الطائرة على بعد **500 km** من المدينة المنورة بعد **0.5 h** من مرورها فوق الرياض، ثم أصبحت على بعد **152 km** من المدينة المنورة بعد نصف ساعة أخرى. كم كان بعدها عن المدينة المنورة بعد **0.75 h** من مرورها فوق الرياض إذا كانت سرعتها ثابتة.

افهم: استعمل البيانات المعطاة لترسم المستقيم الذي يمثل البعد y بالكيلومترات كدالة في الزمن x بالساعات.

عيّن النقطتين $(0.5, 500), (1, 152)$ في المستوى الإحداثي ثم ارسم مستقيمًا يمر بهما.



المطلوب هو إيجاد البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h .

خطط: أوجد ميل المستقيم في الشكل المجاور، واستعمله كمعدّل تغيّر المسافة بالكيلومترات في الزمن بالساعات لإيجاد بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h .

حل: استعمل صيغة الميل لإيجاد ميل المستقيم.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(152-500)\text{ km}}{(1.0-0.5)\text{ h}}=\frac{-348\text{ km}}{0.5\text{ h}}=\frac{-696\text{ km}}{1\text{ h}}$$

تحلّق الطائرة بسرعة 696 km/h .

وتشير الإشارة السالبة إلى تناقص المسافة مع مرور الزمن.

استعمل ميل المستقيم وإحدى النقطتين عليه لتجد البعد y عندما يكون الزمن $x = 0.75$.

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	صيغة الميل
$-696=\frac{y_2-500}{0.75-0.5}$	$m=-696, x_1=0.5, y_1=500, x_2=0.75$
$-696=\frac{y_2-500}{0.25}$	بالتبسيط
$-174=y_2-500$	بضرب كلا الطرفين في 0.25
$326=y_2$	بإضافة 500 إلى كل طرف

إذن كان بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h يساوي 326 km.

تحقق يمكننا من الشكل تقدير البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h بأكثر من 300 km قليلًا. وبما أن 326 قريبة من هذا التقدير فإن الإجابة معقولة. ✓

الربط مع الحياة

المسارات الجوية

توجد خرائط جوية تضبط مسارات الطائرات وارتفاعاتها وتضمن عدم تصادمها.

تحقق من فهمك

2) **مبيعات:** كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2003م، و200 مليون علبة عام 2008م، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2012م ؟

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة: يمكنك استعمال ميلي مستقيمين لتحدد ما إذا كانا متوازيين أو متعامدين. فالمستقيمات التي لها الميل نفسه تكون متوازية.

مسلمات

أضف إلى مطويتك

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

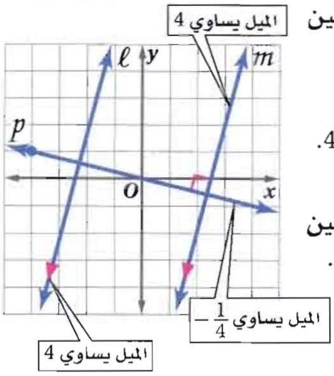
2.2 ميلا المستقيمين المتوازيين: يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. وجميع المستقيمات الرأسية متوازية.

مثال: المستقيمان المتوازيان ℓ, m لهما الميل نفسه ويساوي 4.

2.3 ميلا المستقيمين المتعامدين: يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1. والمستقيمات الأفقية والرأسية متعامدة.

مثال: المستقيم m عمودي على المستقيم p، أو $m \perp p$.

ناتج ضرب الميلين هو -1 ، $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$.



مثال 3 تحديد علاقات المستقيمات

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت $A(1, 1), B(-1, -5), C(3, 2), D(6, 1)$، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

الخطوة 1: أوجد ميل كل مستقيم.

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-5-1}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$

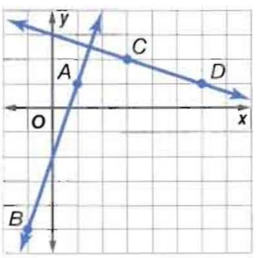
الخطوة 2: حدّد العلاقة إن وجدت بين المستقيمين.

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين فهما غير متوازيين. ولتحدد إن كانا متعامدين، أوجد ناتج ضرب ميليهما.

$3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ ناتج ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

بما أن حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ يساوي -1 فهما متعامدان.

تحقق: يبدو من تمثيل المستقيمين بيانيًا أنهما يشكّلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما. ✓



إرشادات للدراسة

ميلا المستقيمين المتعامدين

إذا كان ميل المستقيم ℓ يساوي $\frac{a}{b}$، فإن ميل المستقيم العمودي على ℓ هو معكوس مقلوب ميله، أيْ $-\frac{b}{a}$ ؛ لأن $\frac{a}{b}\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$.

تحقق من فهمك ✓

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي، ومثِّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

3A) $A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5)$

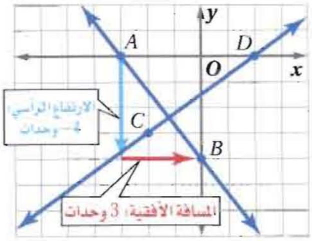
3B) $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$

مثال 4 استعمال الميل لتمثيل المستقيم بيانيًا

مثل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3, 0)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$ ، حيث $C(-2, -3), D(2, 0)$.

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{0-(-3)}{2-(-2)} = \frac{3}{4}$

بما أن $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$ ، فإن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{CD}$ والمار بالنقطة A يساوي $-\frac{4}{3}$.



لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة A، وتحرك 4 وحدات إلى أسفل، ثم 3 وحدات نحو اليمين، وسمِّ النقطة B ، ثم ارسم $\overleftrightarrow{AB}$.

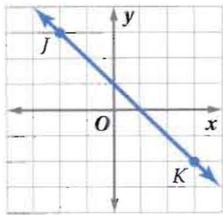
تحقق من فهمك

4) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(0, 1)$ ويعامد $\overleftrightarrow{QR}$ ، حيث $Q(-6, -2), R(0, -6)$.

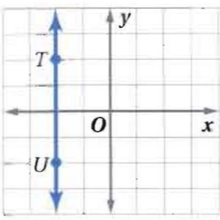
تأكد

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

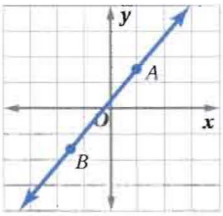
(1



(2



(3



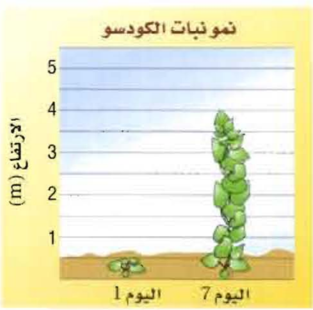
المثال 2

4) **علم النبات:** الكودسو (Kudzu) هو نبات متسلّق سريع النمو. قيس ارتفاع نبتة في اليوم الأول فكان 0.5 m، وفي اليوم السابع أصبح ارتفاعها 4 m.

a) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمثل ارتفاع النبتة مع مرور الزمن.

b) ما ميل هذا المستقيم؟ وماذا يُمثّل؟

c) افترض أن هذه النبتة استمرت بالنمو وفق هذا المعدل، فكم يكون ارتفاعها بعد 15 يومًا؟



المثال 3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{WX}, \overleftrightarrow{YZ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

5) $W(2, 4), X(4, 5), Y(4, 1), Z(8, -7)$

6) $W(1, 3), X(-2, -5), Y(-6, -2), Z(8, 3)$

7) $W(-7, 6), X(-6, 9), Y(6, 3), Z(3, -6)$

8) $W(1, -3), X(0, 2), Y(-2, 0), Z(8, 2)$

المثال 4 مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

9) يمر بالنقطة $A(3, -4)$، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ، حيث $B(2, 4), C(5, 6)$.

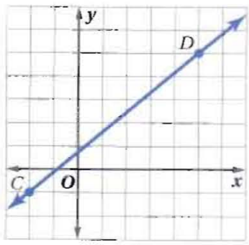
10) ميله يساوي 3 ، ويمر بالنقطة $A(-1, 4)$.

11) يمر بالنقطة $P(7, 3)$، ويعامد $\overleftrightarrow{LM}$ ، حيث $L(-2, -3), M(-1, 5)$.

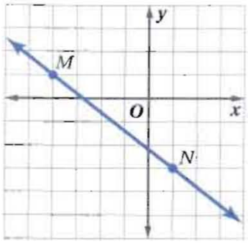
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

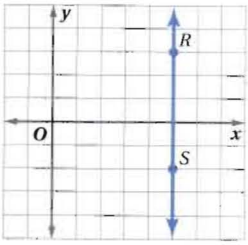
(12



(13



(14



المثال 2 أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كل مما يأتي :

(15 $C(3, 1), D(-2, 1)$

(16 $E(5, -1), F(2, -4)$

(17 $G(-4, 3), H(-4, 7)$

(18 $J(7, -3), K(-8, -3)$

(19 $P(-3, -5), Q(-3, -1)$

(20 $R(2, -6), S(-6, 5)$

(21 **حواسيب:** كان ثمن حاسوب محمول 3000 ريال في عام 1423هـ ، وأصبح 1800 ريال في عام 1427هـ .

a) ارسم مستقيمًا يمثل توقعًا لسعر الحاسوب للسنوات من 1423هـ إلى 1427هـ .

b) كم ينخفض ثمن الحاسوب في كل سنة؟

c) إذا استمر انخفاض السعر بنفس المعدل، فكم يكون ثمن الحاسوب عام 1430هـ؟

المثال 3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

(22 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -10), D(-6, -5)$

(23 $A(-6, -9), B(8, 19), C(0, -4), D(2, 0)$

(24 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$

(25 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

(26 $A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$

(27 $A(4, -2), B(-2, -8), C(4, 6), D(8, 5)$

المثال 4 مثّل بيانيًا المستقيم الذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

(28 يمر بالنقطة $A(2, -5)$ ، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ،حيث $B(1, 3), C(4, 5)$.

(29 ميله يساوي -2 ، ويمر بالنقطة $H(-2, -4)$.

(30 يمر بالنقطة $X(1, -4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{YZ}$ ، حيث $Y(5, 2), Z(-3, -5)$.

(31 يمر بالنقطة $D(-5, -6)$ ويعامد $\overleftrightarrow{FG}$ ، حيث $F(-2, -9), G(1, -5)$.

(32 **سكان:** كان عدد سكان مدينة الطائف 416121 نسمة عام 1992م ، وفي عام 2004م بلغ عدد سكانها 521273 نسمة.

a) ما المعدّل التقريبي لتغير عدد سكان مدينة الطائف من عام 1992م إلى 2004م ؟

b) إذا استمر ازدياد عدد السكان بالمعدّل نفسه، فكم نسمة تتوقع أن يبلغ عدد سكان مدينة الطائف عام 2012م؟

c) هل يستمر تزايد عدد السكان إلى مالانهاية؟ وضّح إجابتك.

حدد أي المستقيمين في السؤالين الآتيين له أكبر ميل :

33) المستقيم 1: $(0, 5)$ و $(6, 1)$

المستقيم 2: $(-4, 10)$ و $(8, -5)$

34) المستقيم 1: $(0, -4)$ و $(2, 2)$

المستقيم 2: $(0, -4)$ و $(4, 5)$

35) محمية طبيعية: تؤوي محمية طبيعية نوعين من الحيوانات المهددة بالانقراض هما: المها العربي وطائر الحباري. ويوضح الشكل المجاور عدد الحيوانات من كل نوع في المحمية عامي 1412هـ و 1426هـ .

a) أي الحيوانين له أكبر معدل تغير؟

b) مثّل بيانيًا المستقيم الذي يمثّل زيادة كل نوع.

c) إذا استمر نموّ كل من النوعين وفق معدله، فكم يكون عدد حيوانات كل نوع عام 1432هـ ؟

الربط مع الحياة

تبذل المملكة جهودًا حثيثة للحفاظ على البيئة بعناصرها المختلفة، حيث أسست الهيئة الوطنية لحماية الحياة الفطرية وإنمائها.

أوجد قيمة x أو y اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي، ثم مثّل المستقيم بيانيًا:

36) مستقيم يمر بالنقطتين $(x, -6), (4, -1)$ ، وميله يساوي $-\frac{5}{2}$.

37) مستقيم يمر بالنقطتين $(4, 3), (-4, 9)$ ، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, y), (-8, 1)$.

38) مستقيم يمر بالنقطتين $(3, y), (1, -3)$ ، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(9, y), (5, -6)$.

39) مدارس: كان عدد طلاب مدرسة الفتح 1125 طالبًا عام 1421هـ . وفي عام 1427هـ ازداد عدد الطلاب حتى بلغ 1425 طالبًا. وعندما أُنشئت مدرسة الأندلس عام 1422هـ كان عدد طلابها 1275 طالبًا. إذا ازداد عدد طلاب مدرسة الأندلس بنفس معدّل زيادة عدد طلاب مدرسة الفتح، فكم يصبح عدد طلاب مدرسة الأندلس عام 1427هـ ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

40) اكتشف الخطأ: حسب كل من خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(3, 5), R(-2, 2)$.
هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

خالد	طارق
$m = \frac{5-2}{-2-3} = -\frac{3}{5}$	$m = \frac{5-2}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$

41) تبرير: ارسم المربع $ABCD$ إذا كان $A(2, -4), C(10, 4)$.

a) أوجد الرأسين الآخرين للمربع B, D .

b) أثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

c) أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المربع يساوي $90°$.

42) **اكتب:** يميل برج بيزا في إيطاليا عن الخط الرأسي بزاوية $3.97°$. صف ميل كلٍّ من برج المملكة وبرج بيزا.

43) **تحدٍ:** تعلّمت في هذا الدرس أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. اكتب برهانًا جبريًّا لتبيّن أنه يمكن أيضًا حساب الميل باستعمال المعادلة $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

تدريب على الاختبار المعياري

44) أي المعادلات الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطة $(-3, -2)$ ويعامد المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$؟

A $y = -\frac{4}{3}x - 6$ **C** $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

B $y = -\frac{4}{3}x + 5$ **D** $y = -\frac{3}{4}x - 5$

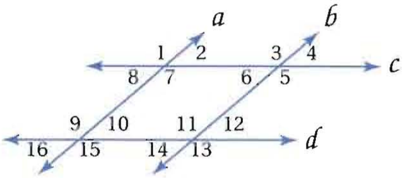
45) أي المعادلات الآتية تصف المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0، -2)$ و $(4 ، 2)$؟

A $y = \frac{1}{3}x - 4$ **C** $y = \frac{1}{3}x - 2$

B $y = -3x + 2$ **D** $y = 3x - 2$

مراجعة تراكمية

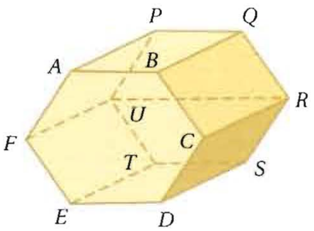
في الشكل المجاور: $a \parallel b, c \parallel d$ ، و $m\angle 4 = 57°$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية : (الدرس 2-2)



46) $\angle 5$ 47) $\angle 1$

48) $\angle 8$ 49) $\angle 10$

حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور . (الدرس 2-1)



50) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{TU}$.

51) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى BCR.

52) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{DE}$.

معتمدًا على المعطيات، حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا في كل مما يأتي. فسّر تبريرك. (الدرس 1-4)

53) **المعطيات:** $\angle B, \angle C$ متقابلتان بالرأس.
النتيجة: $\angle B \cong \angle C$

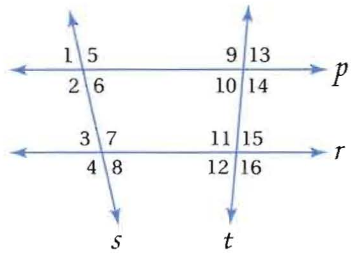
54) **المعطيات:** $\angle W \cong \angle Y$
النتيجة: $\angle W, \angle Y$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

استعد للدرس اللاحق

حُل كل معادلة مما يأتي بالنسبة لِـ y :

55) $3x + y = 5$ 56) $4x + 2y = 6$ 57) $4y - 3x = 5$

استعن بالشكل أدناه لتحدد القاطع الذي يصل كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًا أو خارجيًا أو متناظرتين أو متحالفتين: (الدرس 2-1)



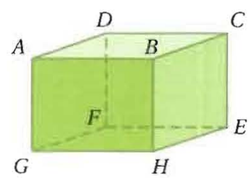
1) $\angle 6$ و $\angle 3$

2) $\angle 1$ و $\angle 14$

3) $\angle 10$ و $\angle 11$

4) $\angle 5$ و $\angle 7$

حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور: (الدرس 2-1)

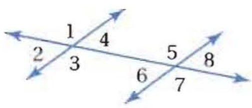


5) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{HE}$.

6) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{GH}$، وتحتوي النقطة D .

7) مستوى يوازي المستوى $ABCD$.

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يصف $\angle 8$ ،$\angle 4$؟ (الدرس 2-1)



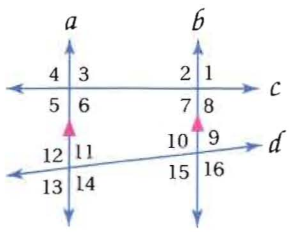
A متناظرتان

B متبادلتان خارجيًا

C متبادلتان داخليًا

D متحالفتان

في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 104°, m\angle 14 = 118°$.
أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها: (الدرس 2-2)



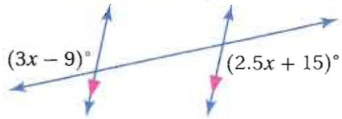
9) $\angle 2$

10) $\angle 9$

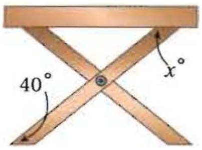
11) $\angle 10$

12) $\angle 7$

13) أوجد قيمة x في الشكل الآتي: (الدرس 2-2)



14) **نجارة:** صنع عامر طاولة خشبية لحديقته. فقصَّ طرف أحد رجليها بزاوية °40. بأي زاوية قصَّ الطرف الآخر بحيث كان سطح الطاولة موازيًا للأرض؟ وضّح إجابتك. (الدرس 2-2)

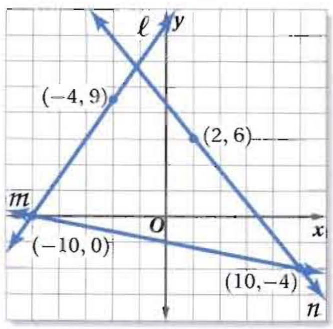


حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{XY}$ متوازيين أو متعامدين أوغير ذلك في كل مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك. (الدرس 2-3)

15) $A(2, 0), B(4, -5), X(-3, 3), Y(-5, 8)$

16) $A(1, 1), B(6, -9), X(4, -10), Y(7, -4)$

استعن بالشكل أدناه لتجد ميل كل مستقيم فيما يأتي: (الدرس 2-3)



17) المستقيم ℓ .

18) مستقيم يوازي m .

19) مستقيم يعامد n .

20) **أرباح:** يبيّن الجدول أدناه أرباح محل تجاري في العامين 1426هـ، 1429هـ . (الدرس 2-3)

الأرباح التقريبية بالريال	السنة
240000	1426
330000	1429

a) ما معدل تغير الأرباح بين عامي 1426هـ و 1429هـ؟

b) إذا استمر معدل تغير الأرباح هذا، فما القيمة التقريبية للأرباح عام 1434هـ؟

2-4 معادلة المستقيم
Equations of Line

فيما سبق:
درستُ إيجاد ميل المستقيم.

والآن:
- أكتب معادلة مستقيم إذا عرفتُ معلومات حول تمثيله البياني.
- أحل مسألة بكتابة معادلة مستقيم.

المفردات:
صيغة الميل والمقطع
slope-intercept form

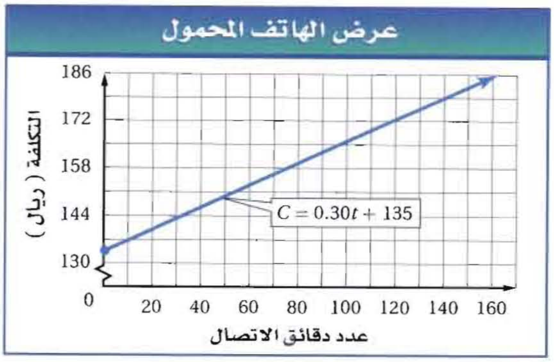
صيغة الميل ونقطة
slope-point form

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قدَّمت إحدى شركات الهاتف المحمول عرضًا يدفع بموجبه المشترك 135 ريالًا شهريًا بالإضافة إلى 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال. فإذا رمزنا للتكلفة الشهرية بالرمز C، ولعدد دقائق الاتصال بالرمز t، فإن:

$$C = 0.3t + 135$$



كتابة معادلة المستقيم: تذكر أنه يمكن كتابة معادلة المستقيم بصيغ مختلفة، ولكنها متكافئة.

مفهوم أساسي — معادلة المستقيم غير الرأسي

أضف إلى مطويتك

صيغة الميل والمقطع لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، و b مقطع المحور y.

$$y = 3x + 8 \qquad y = mx + b$$

الميل — مقطع المحور y

صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي $y - y_1 = m(x - x_1)$، حيث (x_1, y_1) إحداثيا أيِّ نقطة على المستقيم، m ميل المستقيم.

نقطة على المستقيم $(3, 5)$

$$y - 5 = -2\,(x - 3)$$

الميل

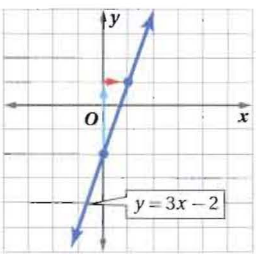
إذا علمت الميل ومقطع المحور y أو نقطة على المستقيم، فإنه يمكنك استعمال هاتين الصيغتين لتكتب معادلة المستقيم.

مثال 1 — معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله 3، ومقطع المحور y له -2، ثم مثّله بيانيًا.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$y = 3x + (-2)$	$m = 3, b = -2$
$y = 3x - 2$	بالتبسيط

عيِّن على المستوى الإحداثي نقطة مقطع المحور y عند $y = -2$، واستعمل قيمة الميل $\frac{3}{1} = 3$ لتحدد نقطة أخرى، وذلك بالانتقال 3 وحدات أعلى مقطع المحور y، ثم وحدة واحدة إلى يمينه. ارسم المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين.



تحقق من فهمك

1) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$، ومقطع المحور y له 8، ثم مثّله بيانيًا.

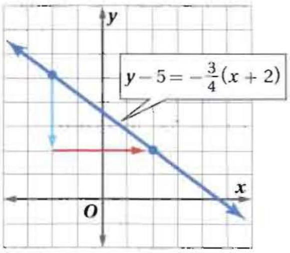
مثال 2 معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{3}{4}$ ، ويمر بالنقطة $(-2, 5)$ ، ثم مثّله بيانيًا.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$y - 5 = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$ $m = -\frac{3}{4}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$

$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 2)$ بالتبسيط



عيّن النقطة $(-2, 5)$ في المستوى الإحداثي.

واستعمل قيمة الميل $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$ لتحدد نقطة أخرى؛ وذلك بالانتقال 3 وحدات أسفل النقطة $(-2, 5)$، ثم 4 وحدات إلى يمينها.

ارسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.

تحقق من فهمك

2) اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله 4 ، ويمر بالنقطة $(-3, -6)$، ثم مثّله بيانيًا.

عندما لا يُعطى ميل المستقيم، استعمل أي نقطتين عليه لحساب ميله، ثم استعمل صيغة الميل ونقطة أو الميل والمقطع لتكتب معادلته.

مثال 3 معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاط فيما يأتي:

a) $(0, 3), (-2, -1)$

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{-2 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$ باستعمال صيغة الميل

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$y = mx + b$ صيغة الميل والمقطع

$y = 2x + 3$ $m = 2$، والنقطة $(0, 3)$ هي مقطع المحور y

b) $(-7, 4), (9, -4)$

الخطوة 1: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 4}{9 - (-7)} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$ باستعمال صيغة الميل

الخطوة 2: $y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-7)]$ $m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (-7, 4)$

$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 7)$ بالتبسيط

$y - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ بالتوزيع

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ بجمع 4 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

3A) $(-2, 4), (8, 10)$

3B) $(-1, 3), (7, 3)$

تنبيه !

التعويض بإحداثيات سالبة عند التعويض بإحداثيات سالبة، استعمل الأقواس لتتجنب الوقوع في أخطاء الإشارات.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة
في المثال 3b، يمكنك تعويض إحداثيي إحدى النقطتين في صيغة الميل والمقطع لإيجاد مقطع المحور y ، ثم كتابة المعادلة.

$y = mx + b$

$4 = -\frac{1}{2}(-7) + b$

$4 = \frac{7}{2} + b$

$4 - \frac{7}{2} = b$

$b = \frac{1}{2}$

لذا $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

مثال 4 معادلة المستقيم الأفقي

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5, 6)$, $(-2, 6)$.

الخطوة 1: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 6}{5 - (-2)} = \frac{0}{7} = 0$

الخطوة 2: $y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$y - 6 = 0[x - (-2)]$ $m = 0, (x_1, y_1) = (-2, 6)$

$y - 6 = 0$ بالتبسيط

$y = 6$ بجمع 6 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

4) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5, 0)$, $(3, 0)$.

تحتوي معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية متغيرًا واحدًا فقط.

مفهوم أساسي معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية

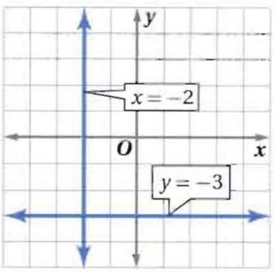
أضف إلى مطويتك

معادلة المستقيم الأفقي هي $y = b$ ،
حيث b مقطع المحور y له.

مثال: $y = -3$

معادلة المستقيم الرأسي هي $x = a$ ،
حيث a مقطع المحور x له.

مثال: $x = -2$



المستقيمات المتوازية غير الرأسية لها **الميل** نفسه. ويكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1. والمستقيم الرأسي والمستقيم الأفقي دائمًا متعامدان.

مثال 5 معادلات المستقيمات المتوازية أو المتعامدة

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -3x + 2$ ، والمار بالنقطة $(4, 0)$.

ميل المستقيم $y = -3x + 2$ يساوي -3 ؛ لذا فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$.

$y = mx + b$ صيغة الميل والمقطع

$0 = \frac{1}{3}(4) + b$ $m = \frac{1}{3}, (x, y) = (4, 0)$

$0 = \frac{4}{3} + b$ بالتبسيط

$-\frac{4}{3} = b$ بطرح $\frac{4}{3}$ من كلا الطرفين

لذا فمعادلة المستقيم العمودي هي $y = \frac{1}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)$ ، أو $y = \frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

5) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يوازي $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-3, 6)$.

تاريخ الرياضيات

قاسبارد مونج
1746م - 1818م

عرض قاسبارد مونج معادلة المستقيم بصيغة النقطة والميل في بحث قدّمه عام 1784م.

كتابة معادلات لحل المسائل: يمكن تمثيل كثير من المواقف الحياتية باستعمال معادلة خطية.

قراءة الرياضيات

خطي: كلمة خطي تعني الاستقامة. وسميت المعادلات الخطية بهذا الاسم؛ لأن تمثيلها البياني مستقيم.

مثال 6 من واقع الحياة — كتابة معادلة خطيّة

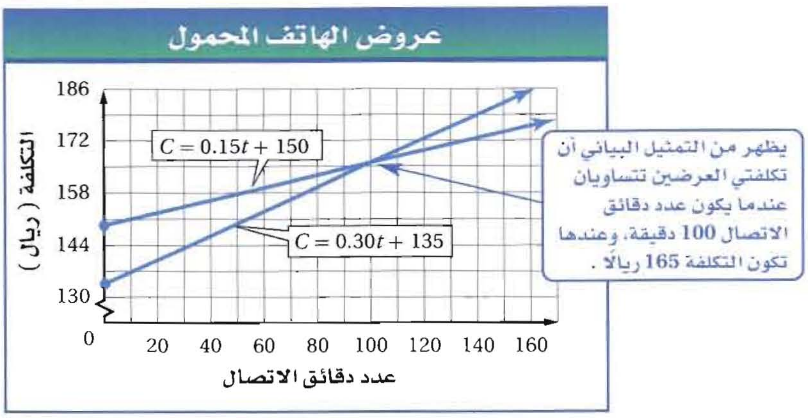
هواتف: يقارن علي بين عرضين مقدمين من شركة هاتف محمول. يدفع بموجب العرض X مبلغ 150 ريالًا شهريًا بالإضافة إلى 0.15 ريال عن كل دقيقة اتصال. أما العرض Y فتفاصيله موضحة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. أي العرضين أفضل لعلي؟

افهم: العرض X : 150 ريالًا شهريًا زائد 0.15 ريال عن كل دقيقة اتصال.
العرض Y : 135 ريالًا شهريًا زائد 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال.
قارن بين العرضين لتحدد متى تكون التكلفة الشهرية لأحدهما أقل من التكلفة الشهرية للآخر.

خطط: اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية C لكل من العرضين لعدد t من دقائق الاتصال، ثم مثّل المعادلتين بيانيًا وقارن.

حل: معدلا التزايد أو ميلا معادلتي التكلفة الشهرية هما 0.15 للعرض X، و 0.30 للعرض Y. وعندما يكون عدد دقائق الاتصال صفرًا، تكون التكلفة الشهرية هي الرسوم فقط؛ لذا فإن مقطع المحور y هو 150 للعرض X، و 135 للعرض Y.

العرض X		العرض Y
$C = mt + b$	صيغة الميل والمقطع	$C = mt + b$
$C = 0.15t + 150$	بالتعويض عن m و b	$C = 0.30t + 135$



ويظهر أيضًا من التمثيل البياني أنه إذا كان عدد دقائق الاتصال أقل من 100 دقيقة في الشهر ، فإن تكلفة العرض Y أقل، بينما تكون تكلفة العرض X أقل إذا كان عدد دقائق الاتصال أكثر من 100 دقيقة في الشهر.

تحقق: تحقق من تقديرك. إذا كان عدد دقائق الاتصال يساوي 100 دقيقة ، فإن تكلفة العرض X هي $0.15(100) + 150 = 165$ ، وتكلفة العرض Y هي $0.30(100) + 135 = 165$. ✓

إرشادات حل المسألة

التمثيل البياني

في المثال 6 ، مع أن الرسوم الشهرية في العرض Y أقل إلا أن سعر دقيقة الاتصال الواحدة أكبر. وهذا يجعل المقارنة بين العرضين صعبة. إلا أن التمثيل البياني يُسهّل المقارنة بين موقفين خطيين في كثير من الأحيان.

تحقق من فهمك

6) افترض أن رسوم العرض Y الشهرية تساوي 140 ريالًا، وسعر دقيقة الاتصال الواحدة 0.28 ريال. فأي العرضين أفضل لعلي؟ برر إجابتك.

تأكد

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كل مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا:

1) $m = 4, b = -3$ **2)** $m = \frac{1}{2}, b = -1$ **3)** $m = -\frac{3}{2}, b = 5$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كل مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا:

4) $m = 5, (3, -2)$ **5)** $m = \frac{1}{4}, (-2, -3)$ **6)** $m = -4.25, (-4, 6)$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما في كل مما يأتي:

7) $(0, -1), (4, 4)$ **8)** $(4, 3), (1, -6)$ **9)** $(6, 5), (-1, -4)$

المثال 5 **10)** اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -2x + 6$ ، والمار بالنقطة $(3, 2)$.

11) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1, 5)$ ، ويوازي المستقيم الذي معادلته $y = 4x - 5$.

المثال 6 **12)** **عروض:** يقارن سلمان بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع بموجب العرض الأول اشتراكًا شهريًا قدره 100 ريال، بالإضافة إلى 10 ريالات عن كل زيارة. ويدفع بموجب العرض الثاني اشتراكًا شهريًا قدره 150 ريالًا، ويسمح له بعشر زيارات شهريًا.

a) اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية لكل من العرضين.

b) مثّل كلتا المعادلتين بيانيًا.

c) إذا كان سلمان يريد الذهاب إلى النادي 7 مرات شهريًا، فهل يشترك في العرض الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كل مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا:

13) $m = -5, y = -2$ **14)** $m = -7, b = -4$ **15)** $m = 9, b = 2$

16) $m = 12, y = \frac{4}{5}$ **17)** $m = -\frac{3}{4}, (0, 4)$ **18)** $m = \frac{5}{11}, (0, -3)$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كل مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا:

19) $m = 2, (3, 11)$ **20)** $m = 4, (-4, 8)$ **21)** $m = -7, (1, 9)$

22) $m = \frac{5}{7}, (-2, -5)$ **23)** $m = -\frac{4}{5}, (-3, -6)$ **24)** $m = -2.4, (14, -12)$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أعطيت نقطتان يمر بهما في كل مما يأتي:

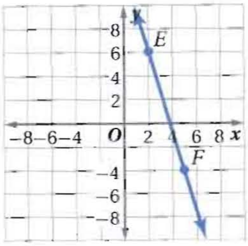
25) $(-1, -4), (3, -4)$ **26)** $(2, -1), (2, 6)$

27) $(-3, -2), (-3, 4)$ **28)** $(0, 5), (3, 3)$

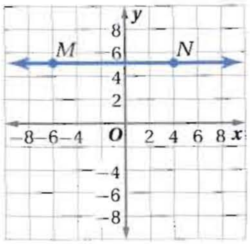
29) $(-12, -6), (8, 9)$ **30)** $(2, 4), (-4, -11)$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الممثل بيانيًا، أو المعطى وصفه في كل مما يأتي:

31) $\overleftrightarrow{EF}$



32) $\overleftrightarrow{MN}$



33) يحتوي النقطتين $(3, 4)$، $(-1, -2)$

34) يحتوي النقطتين $(-8, -13)$، $(-4, -5)$

35) مقطع المحور x يساوي 3، ومقطع المحور y يساوي -2 .

36) مقطع المحور x يساوي $-\frac{1}{2}$، ومقطع المحور y يساوي 4 .

المثال 5

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يحقق المعطيات في كل مما يأتي :

37) يمر بالنقطة $(-4, -7)$، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 9$.

38) يمر بالنقطة $(-1, -10)$، ويوازي المستقيم $y = 7$.

39) يمر بالنقطة $(6, 2)$، ويوازي المستقيم $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

40) يمر بالنقطة $(-2, 2)$، ويعامد المستقيم $y = -5x - 8$.

المثال 6

41) **جمعية خيرية:** نظَّمت جمعية خيرية حفلًا لتكريم مجموعة من حفظة القرآن الكريم، فاستأجرت قاعة لتقيم فيها الحفل. إذا كانت أجرة القاعة 1500 ريال بالإضافة إلى 15.5 ريالًا عن كل شخص يحضر الحفل.

a) اكتب معادلة تمثل تكلفة استئجار القاعة y إذا حضر x شخصًا.

b) مثّل المعادلة بيانيًا.

c) إذا حضر الحفل 285 شخصًا، فكم تكون تكلفة استئجار القاعة؟

d) إذا رصدت الجمعية 6000 ريال لاستئجار القاعة، فما عدد الأشخاص الذين يمكن أن يحضروا الحفل؟

42) **توفير:** يوفر عبد الله نقودًا ليشتري مذياعًا مرتبطًا بالأقمار الصناعية، ويدفع رسوم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الصناعية . فبدأ بتوفير 200 ريال أُهديت إليه في عيد الأضحى ، وبعد ذلك كان يضيف 40 ريالًا كل أسبوع .

a) اكتب معادلة تمثل ما وفّره عبد الله y بعد x أسبوع.

b) مثّل المعادلة بيانيًا.

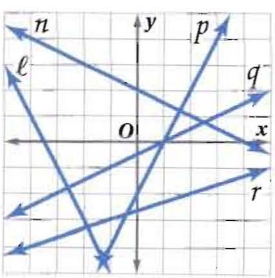
c) متى يوفر 500 ريال؟

d) إذا بدأ التوفير منذ أسبوعين، وكان ثمن المذياع 700 ريال ، ورسم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الصناعية 420 ريالًا ، فمتى يوفر مبلغًا يكفي لذلك ؟ فسر إجابتك.

الربط مع الحياة

تصل إشارات بث إذاعة FM إلى (64 – 48) km تقريبًا. أما إشارات البث الإذاعي بواسطة الأقمار الصناعية فتصل إلى أكثر من 35200 km.

استعن بالشكل المجاور لتسمي أي مستقيم يحقق الوصف في كل مما يأتي:



43) يوازي المستقيم $y = 2x - 3$.

44) يعامد المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 7$.

45) يتقاطع مع المستقيم $y = \frac{1}{2}x - 5$ ولكنه لا يعامده.

حدّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل ممّا يأتي:

46) $y = 2x + 4, y = 2x - 10$

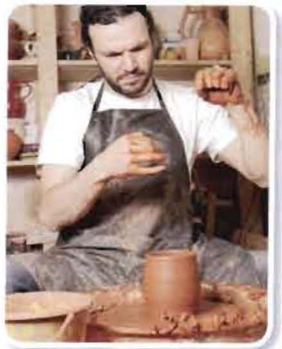
47) $y = -\frac{1}{2}x - 12, y = 2x + 7$

48) $y - 4 = 3(x + 5), y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$

49) $y - 3 = 6(x + 2), y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$

50) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4, 2)$ ويوازي المستقيم $y - 2 = 3(x + 7)$.

51) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-8, 12)$ ويعامد المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-7, 2)$, $(3, 2)$.



الربط مع الحياة

بعد تشكيل الآنية من طين الصلصال، تشوى في أفران خاصة عند درجة حرارة تفوق $500°C$.

52) **صناعة الفخار:** نظّمت جمعية حِرَف يدوية دورة في صناعة الفخار. رسم الاشتراك هو 150 ريالًا، ويغطي اللوازم والمواد وكيسًا واحدًا من طين الصلصال. ويكلف كل كيس إضافي 40 ريالًا. اكتب معادلة تمثل تكلفة الاشتراك وعدد x من الأكياس الإضافية.

53) **تمثيلات متعددة:** طلب مدير قصر أفراح من بسام أن ينظم وقوف السيارات في أثناء حفل. وقدّم له عرضين للأجر، أحدهما أن يدفع له 4 ريالات عن كل سيارة، والآخر أن يعطيه أجرًا مقداره 150 ريال بالإضافة إلى ريالين عن كل سيارة.

a) **جدوليًا:** أنشئ جدولًا يبيّن ما يتقاضاه بسام عن 20، 50، 100 سيارة في كلا العرضين.

b) **عدديًا:** اكتب معادلة تمثّل ما يكسبه بسام من كل عرض.

c) **بيانيًا:** مثل بيانيًا كلًّا من معادلتي العرضين.

d) **تحليليًا:** أي العرضين أكثر كسبًا لبسام إذا كان عدد السيارات 35 سيارة؟ وأيهما أكثر كسبًا لبسام إذا كان عدد السيارات 75 سيارة؟ وضح إجابتك.

e) **لفظيًا:** اكتب عبارة تصف العرض الأكثر كسبًا لبسام تبعًا لعدد السيارات.

f) **منطقيًا:** إذا كان عدد السيارات 50 سيارة، فأي العرضين أكثر كسبًا لبسام؟ وضّح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تحدٍّ:** أوجد قيمة n بحيث يمر المستقيم العمودي على المستقيم $-2y + 4 = 6x + 8$ بالنقطتين $(n, -4), (2, -8)$.

55) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت النقاط $(6, 8)$, $(2, 5)$, $(-2, 2)$ تقع على استقامة واحدة. برّر إجابتك.

56) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات زوجين مختلفين من المستقيمات المتعامدة التي تتقاطع في النقطة $(-3, -7)$.

57) **اكتشف الخطأ:** كتب كل من راكان وفيصل معادلة مستقيم ميله -5، ويمر بالنقطة $(-2, 4)$، أي منهما إجابته صحيحة؟ وضّح تبريرك.

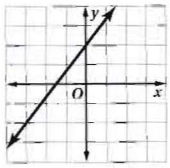
راكان	فيصل
$y - 4 = -5(x - (-2))$	$y - 4 = -5(x - (-2))$
$y - 4 = -5(x + 2)$	$y - 4 = -5(x + 2)$
	$y - 4 = -5x - 10$
	$y = -5x - 6$

58) **اكتب:** أيهما أسهل كتابة: معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة، أم بصيغة الميل والمقطع؟

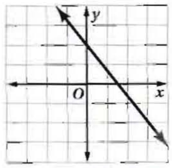
تدريب على الاختبار المعياري

59) أي مما يأتي هو التمثيل البياني للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, -3)$؟

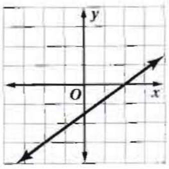
A



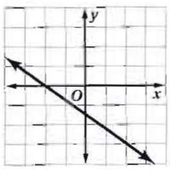
B



C



D



60) أي مما يأتي هي معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1)$ ، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{3}x + 5$؟

F $y = 3x + 7$

G $y = \frac{1}{3}x + 7$

H $y = -3x - 5$

J $y = -\frac{1}{3}x - 5$

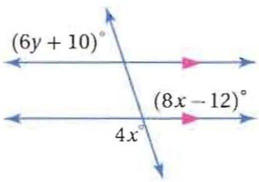
مراجعة تراكمية

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

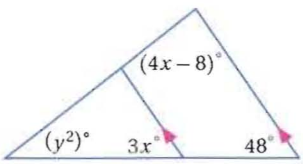
61) $J(4, 3), K(5, -2)$ **62)** $X(0, 2), Y(-3, -4)$ **63)** $A(2, 5), B(5, 1)$

أوجد قيمة x, y في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 3-2)

64)

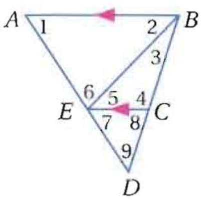


65)



66) **مسافات:** يقع منزل ناصر في منتصف المسافة بين المسجد والحديقة، ويبعد المسجد 0.5 km عن منزل ناصر. ما المسافة بين الحديقة ومنزله؟ وما المسافة بين المسجد والحديقة؟ (الدرس 1-2)

في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 58°$, $m\angle 2 = 47°$, $m\angle 3 = 26°$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية: (الدرس 2-2)

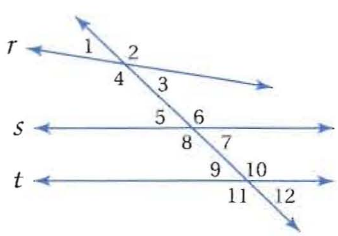


67) $\angle 7$ **68)** $\angle 5$ **69)** $\angle 6$

70) $\angle 4$ **71)** $\angle 8$ **72)** $\angle 9$

استعد للدرس اللاحق

حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي :



73) $\angle 1, \angle 12$

74) $\angle 7, \angle 10$

75) $\angle 4, \angle 8$

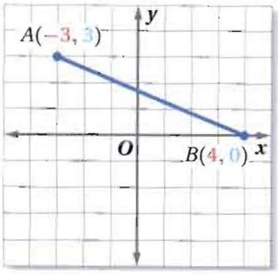
76) $\angle 2, \angle 11$

توسع 2-4 معادلة العمود المنصف
Equations of Perpendicular Bisectors

يمكنك تطبيق ما تعلمته عن الميل ومعادلة المستقيم على الأشكال الهندسية في المستوى.

نشاط

أوجد معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة AB إذا كان طرفاها النقطتين $A(-3, 3), B(4, 0)$.



الخطوة 1: يمر منصِّف القطعة المستقيمة بنقطة منتصفها.
استعمل صيغة نقطة المنتصف لتجد نقطة منتصف $\overline{AB}$.

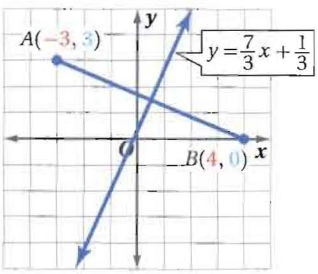
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = M\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$$
$$= M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

الخطوة 2: يكون العمود المنصّف عموديًّا على القطعة المستقيمة، ويمر بنقطة منتصفها.
ولتجد ميل العمود المنصّف أوجد أولًا ميل $\overline{AB}$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

$= \frac{0-3}{4-(-3)}$ $\quad x_1 = -3, x_2 = 4, y_1 = 3, y_2 = 0$

$= -\frac{3}{7}$ بالتبسيط



الخطوة 3: استعمل صيغة الميل ونقطة لكتابة معادلة المستقيم.
ميل العمود المنصّف يساوي $\frac{7}{3}$؛ لأن $-\frac{3}{7}\left(\frac{7}{3}\right) = -1$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\quad m = \frac{7}{3}, (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}x - \frac{7}{6}$ خاصية التوزيع

$y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$ بجمع $\frac{3}{2}$ لكلا الطرفين

تمارين:

أوجد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $P(5, 2), Q(7, 4)$

2) $P(-3, 9), Q(-1, 5)$

3) $P(-2, 1), Q(0, -3)$

4) $P(0, 1.6), Q(0.5, 2.1)$

5) استعمل ما تعلمته لإيجاد معادلات المستقيمات التي تحوي أضلاع المثلث XYZ، حيث:
$X(-2, 0), Y(1, 3), Z(3, -1)$.

2-5 إثبات توازي مستقيمين
Proving Lines Parallel

فيما سبق:

درستُ إيجاد ميل المستقيم واستعماله لتعيين المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

والآن:

- أميّز أزواج الزوايا الناتجة عن توازي مستقيمين.
- أبرهن توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما تنظر إلى الأفعوانية تجد أن البعد بين خطي سكتها ثابت دائمًا حتى عند المنحنيات والمنعطفات. فقد صُممت السكك بدقة بحيث يكون خطاها متوازيين عند جميع النقاط لتسير عليها العربة بأمان.

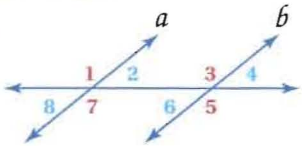
تحديد المستقيمين المتوازيين: خطا سكة الأفعوانية متوازيان، وبعض الدعامات التي تثبتهما متوازية أيضًا، والزوايا المتكوّنة بين خطي السكة والدعامات المتوازيةِ متناظرة. درست سابقًا أن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة عندما يكون المستقيمان متوازيين. وعكس هذه العلاقة صحيح أيضًا.

مسلمة 2.4 عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكانت الزوايا المتناظرة متطابقة، فإن المستقيمين متوازيان.

أمثلة: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 7 \ \angle 6 \cong \angle 8$ ، فإن $a \parallel b$.

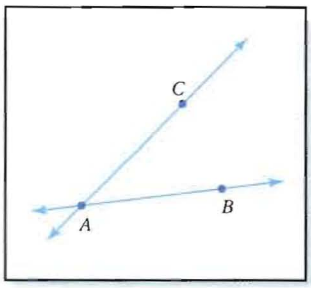


يمكن استعمال عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لرسم مستقيمين متوازيين.

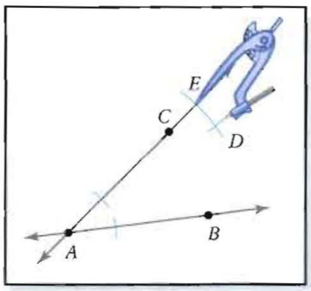
إنشاءات هندسية

رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر بنقطة لا تقع عليه

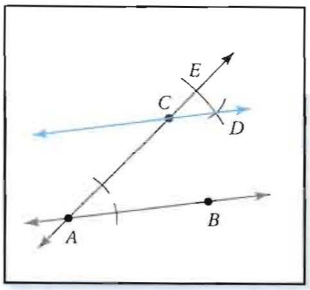
الخطوة 1: استعمل مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{AB}$، وعيّن نقطة C لا تقع على $\overleftrightarrow{AB}$، وارسم $\overleftrightarrow{CA}$.



الخطوة 2: استعمل فرجارًا لنقل $\angle CAB$ بحيث تكون النقطة C رأس الزاوية الجديدة، وذلك من خلال الخطوات الآتية: ضع الفرجار عند النقطة A ، وارسم قوسًا يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ بعد C، سمِّ نقطة التقاطع E. قم بتصغير فتحة الفرجار وارسم قوسين يقطعان $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$. وبنفس فتحة الفرجار، ارسم قوسًا من النقطة E يقطع القوس الأول في النقطة D كما في الشكل.



الخطوة 3: ارسم $\overleftrightarrow{CD}$. بما أن $\angle ECD \cong \angle CAB$ من الإنشاء، وهما متناظرتان فإن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

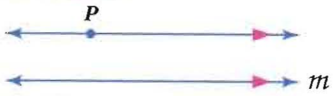


يبيّن الإنشاء السابق أنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يمر بالنقطة C ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$. وتؤكد المسلمة الآتية أن هذا المستقيم وحيد.

مسلّمة 2.5 مسلّمة التوازي

أضف إلى مطويتك

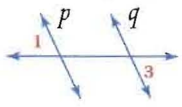
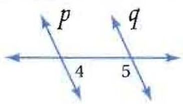
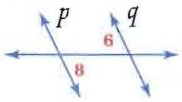
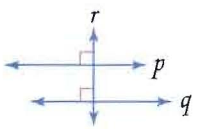
إذا عُلِمْ مستقيم ونقطة لا تقع عليه فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.



ينتج عن المستقيمين المتوازيين وقاطع لهما أزواج من الزوايا المتطابقة. ويمكن أن تحدد أزواج الزوايا هذه ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا.

نظريات

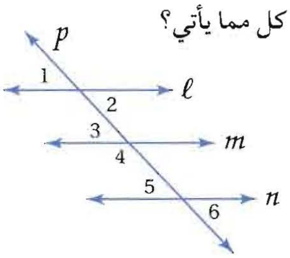
أضف إلى مطويتك

2.5 عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كانت $\angle 3 \cong \angle 1$، فإن $p \parallel q$
2.6 عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ونتج عن التقاطع زاويتان متحالفتان متكاملتان فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 180$، فإن $p \parallel q$
2.7 عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان داخليًا متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كانت $\angle 8 \cong \angle 6$، فإن $p \parallel q$
2.8 عكس نظرية القاطع العمودي: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكان عموديًا على كل منهما، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كان $r \perp p$ و $r \perp q$، فإن $p \parallel q$

سوف تبرهن النظريات 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 في المسائل 6, 18, 21, 22

مثال 1 تعيين المستقيمات المتوازية

هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيٌّ منها متوازيًا ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 6$

$\angle 1, \angle 6$ متبادلتان خارجيًا بالنسبة للمستقيمين ℓ, n .

وبما أن $\angle 1 \cong \angle 6$، فإن $\ell \parallel n$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا.

b. $\angle 2 \cong \angle 3$

$\angle 2$ ، $\angle 3$ متبادلتان داخليًا بالنسبة للمستقيمين ℓ, m.

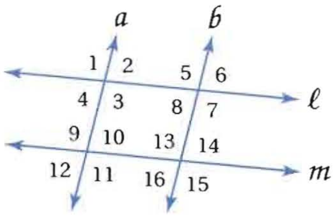
وبما أن $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\ell \parallel m$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا.

إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس

أدرك مؤسس الهندسة الحديثة إقليدس طاليس أن عددًا قليلًا من المسلّمات ضروري لبرهنة النظريات في زمانه. المسلّمة 2.5 هي واحدة من مسلّمات إقليدس الخمس الأساسية. وكذلك المسلّمة 1.1 والنظرية 1.10 التي عدها مسلمة.

تحقق من فهمك



(1A $\angle 2 \cong \angle 8$

(1B $\angle 3 \cong \angle 11$

(1C $\angle 12 \cong \angle 14$

(1D $\angle 1 \cong \angle 15$

(1E $m\angle 8 + m\angle 13 = 180^\circ$

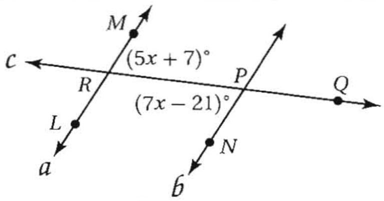
(1F $\angle 8 \cong \angle 6$

يمكن استعمال العلاقات بين الزوايا لحل مسائل تحتوي قيمًا مجهولة.

مثال 2 من الاختبار المعياري

مسألة مفتوحة: إذا كان $a \parallel b$

فأوجد $m\angle MRQ$. وبيّن خطوات الحل.



اقرأ سؤال الاختبار

تعلم من الشكل أن $m\angle RPN = (7x - 21)^\circ$, $m\angle MRQ = (5x + 7)^\circ$. والمطلوب أن تجد $m\angle MRQ$.

حُلّ سؤال الاختبار

$\angle MRQ$, $\angle RPN$ متبادلتان داخليًا. وحتى يكون المستقيمان a ، b متوازيين، يجب أن تكون الزاويتان المتبادلتان داخليًا متطابقتين؛ لذا $\angle MRQ \cong \angle RPN$. وبحسب تعريف التطابق يكون $m\angle MRQ = m\angle RPN$. عوض بقياسات الزوايا المعطاة في هذه المعادلة وحلها لإيجاد قيمة x.

$m\angle MRQ = m\angle RPN$	زاويتان متبادلتان داخليًا
$5x + 7 = 7x - 21$	بالتعويض
$7 = 2x - 21$	بطرح $5x$ من كلا الطرفين
$28 = 2x$	بجمع 21 إلى كلا الطرفين
$14 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

الآن، استعمل قيمة x لإيجاد $m\angle MRQ$.

$m\angle MRQ = (5x + 7)^\circ$	بالتعويض
$= (5(14) + 7)^\circ$	$x = 14$
$= 77^\circ$	بالتبسيط

تحقق: تحقق من إجابتك باستعمال قيمة x لتجد $m\angle RPN$.

$$m\angle RPN = (7x - 21)^\circ$$
$$= (7(14) - 21)^\circ$$
$$= 77^\circ \checkmark$$

بما أن $m\angle MRQ = m\angle RPN$، فإن $\angle MRQ \cong \angle RPN$ ، و $a \parallel b$. ✓

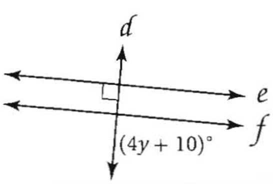
إرشادات للاختبار

تحديد المطلوب

أعد قراءة سؤال الاختبار بدقة لتحدد المطلوب. ففي المثال 2: يقع بعض الطلاب في خطأ شائع هو التوقف بعد إيجاد قيمة x ، والقول إن إجابة هذا السؤال هي 14.

تحقق من فهمك

2) إذا كان $e \parallel f$ ، فأوجد قيمة y مبينًا خطوات الحل.



إرشادات للدراسة

إثبات توازي مستقيمين
عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين فإما أن تكون أزواج الزوايا الناتجة متطابقة أو متكاملة. وإذا نتج عن مستقيمين وقاطع لهما زوايا لا تحقق هذا الشرط، فلا يمكن أن يكون المستقيمان متوازيين.

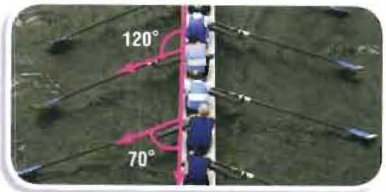
إثبات توازي مستقيمين: يمكن استعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما لإثبات أن المستقيمين متوازيان.

مثال 3 من واقع الحياة — إثبات توازي مستقيمين

سلالم: **كل درجة من درجات السلّم في الشكل المجاور عموديّة على دعامتيه الرئيستين. هل يمكن إثبات أن الدعامتين الرئيستين متوازيتان، وأن جميع الدرجات متوازية؟ وضح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.**

بما أن الدعامتين الرئيستين عموديتان على كل درجة فهما متوازيتان حسب نظرية القاطع العمودي. وبما أن أي درجتين في السلم عموديتان على الدعامتين الرئيستين فهما متوازيتان أيضًا.

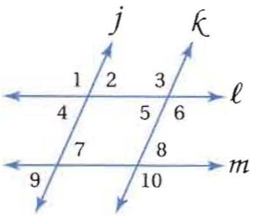
تحقق من فهمك



3) **تجديف:** حتى يتحرك قارب التجديف في مسار مستقيم، يجب أن تكون مجاديف كل جانب متوازية. هل يمكن أن تبرهن أن مجاديف الجانب الأيسر في الصورة المجاورة متوازية؟ وضح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.

تأكد

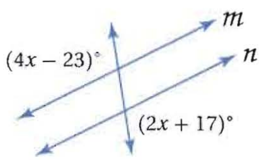
المثال 1 **هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.**



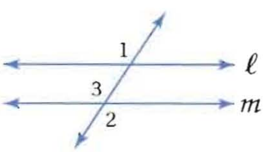
1) $\angle 1 \cong \angle 3$ **2)** $\angle 2 \cong \angle 5$

3) $\angle 3 \cong \angle 10$ **4)** $m\angle 6 + m\angle 8 = 180°$

المثال 2 **5)** **إجابة قصيرة:** إذا كان $m \parallel n$، فأوجد قيمة x. بيّن خطوات حلك.



المثال 3 **6)** **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.5 .



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: $\ell \parallel m$

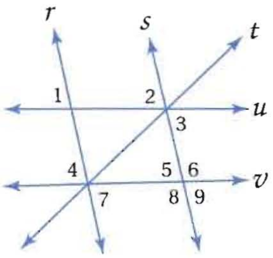
البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\angle 1 \cong \angle 2$	a) مُعطى
b) $\angle 2 \cong \angle 3$	b) ___؟___
c) $\angle 1 \cong \angle 3$	c) خاصية التعدي للتطابق
d) ___؟___	d) ___؟___

7) **كراسي:** هل يمكن إثبات أن مسند الظهر ومسند القدمين لكرسي الاسترخاء في الشكل المجاور متوازيان؟ وضح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



8) $\angle 1 \cong \angle 2$

9) $\angle 2 \cong \angle 9$

10) $m\angle 7 + m\angle 8 = 180^\circ$

11) $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$

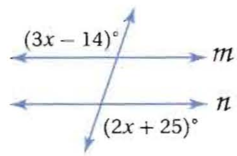
12) $\angle 3 \cong \angle 7$

13) $\angle 4 \cong \angle 5$

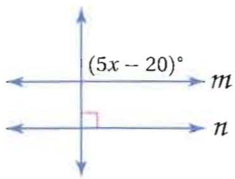
إذا كان $m \parallel n$ ، فأوجد قيمة x في كل مما يأتي، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها :

المثال 2

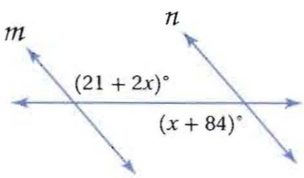
14)



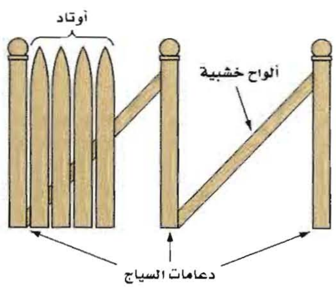
15)



16)



17) **حدائق:** لبناء سياج حول حديقة المنزل، ثبّت سعود دعامات السياج ووضع ألواحًا خشبية تميل بزاوية مع كل من دعامتي السياج. وعند تثبيته أوتاد السياج، حرص على أن تكون الزوايا بين الألواح الخشبية والأوتاد متساوية القياس. لماذا يجعل هذا الأوتاد متوازية؟

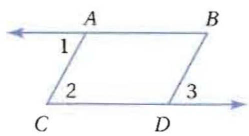


المثال 3 **18)** **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.6 .

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يأتي:

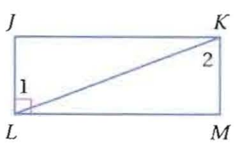
19) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 3$
$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



20) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{LJ} \perp \overline{ML}$

المطلوب: $\overline{KM} \perp \overline{ML}$

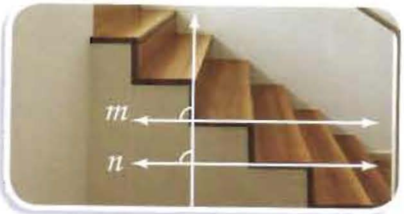


برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل من النظريتين الآتيتين:

21) النظرية 2.7 .

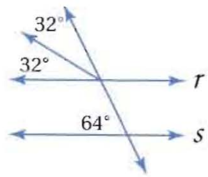
22) النظرية 2.8 .

23) **درج:** ما العلاقة بين حواف أسطح الدرجات في الشكل المجاور؟

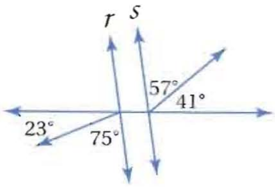


حدّد ما إذا كان المستقيمان r, s متوازيين أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك.

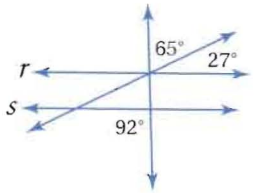
24)



25)

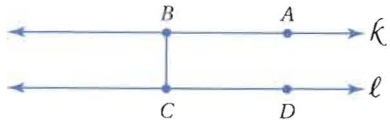


26)



27) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة أقصر مسافة بين مستقيمين متوازيين.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاث أزواج من المستقيمات المتوازية x و y، s و t، k و ℓ، وارسم أقصر قطعة مستقيمة $\overline{AB}$ بين كل مستقيمين متوازيين، وعيِّن النقطتين A, D كما في الشكل **أدناه**.



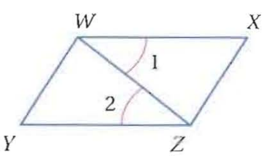
b) **جدوليًّا:** قِس $\angle ABC$ و $\angle BCD$ في كل زوج، ثم أكمل الجدول.

زوج المستقيمات المتوازية	$m\angle ABC$	$m\angle BCD$
k و ℓ		
s و t		
x و y		

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الزاوية بين أقصر قطعة مستقيمة وكل من المستقيمين المتوازيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من سامي ومنصور تحديد المستقيمات المتوازية في الشكل المجاور. فقال سامي: بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$ فإن $\overline{WY} \parallel \overline{XZ}$. أما منصور فلم يوافقه وقال: بما **أن** $\angle 2 \cong \angle 1$ فإن $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$. أي منهما على صواب؟ وضّح **إجابتك.**



29) **تبرير:** هل تبقى النظرية 2.8 صحيحة إذا كان المستقيمان لا يقعان في المستوى نفسه؟ ارسم شكلًا يبرر إجابتك.

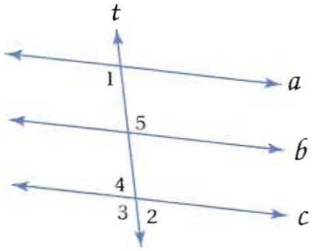
30) **مسألة مفتوحة:** ارسم المثلث ABC.

a) أنشئ مستقيمًا يوازي $\overline{BC}$ ويمر بالنقطة A.

b) استعمل القياس لتتحقق من أن المستقيم الذي رسمته يوازي $\overline{BC}$.

c) أثبت صحة الإنشاء رياضيًّا.

31) **تحدٍّ:** استعن بالشكل المجاور.



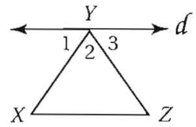
a) إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$، فبرهن أن $a \parallel c$.

b) إذا كان $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$، فبرهن أن $t \perp c$.

32) **اكتب:** لخّص الطرائق الخمس التي استُعملت في هذا الدرس لإثبات توازي مستقيمين.

تدريب على الاختبار المعياري

33) أي الحقائق الآتية كافية لإثبات أن المستقيم d يوازي $\overline{XZ}$ ؟



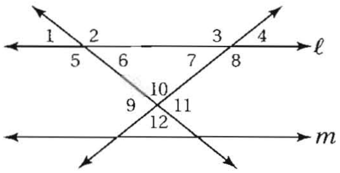
A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 3 \cong \angle Z$

C $\angle 1 \cong \angle Z$

D $\angle 2 \cong \angle X$

34) إذا كانت $\angle 3 \cong \angle 8$ ، فأي مما يأتي ليس مؤكدًا صحته؟



A $\angle 4 \cong \angle 7$

B $\angle 4$ و $\angle 8$ متكاملتان

C $\ell \parallel m$

D $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتان

مراجعة تراكمية

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي عُلم ميله ومقطعه المحور y له فيما يأتي: (الدرس 4-2)

35) $m = 2.5, (0, 0.5)$

36) $m = \frac{4}{5}, (0, -9)$

37) $m = -\frac{7}{8}, \left(0, -\frac{5}{6}\right)$

أعط مثالًا مضادًّا لتبيّن خطأ كل تخمين في السؤالين الآتيين: (الدرس 1-1)

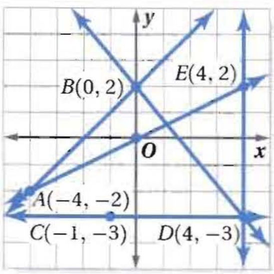
38) **المُعطيات:** $\angle 1, \angle 2$ متتامتان.

التخمين: $\angle 1, \angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة.

39) **المُعطيات:** W, X, Y, Z أربع نقاط.

التخمين: النقاط W, X, Y, Z لا تقع على استقامة واحدة.

استعن بالشكل المجاور لتجد ميل كل مستقيم أو قطعة مستقيمة فيما يأتي: (الدرس 3-2)



40) $\overleftrightarrow{CD}$

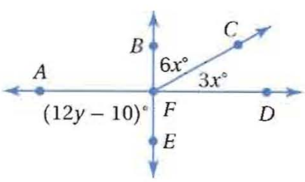
41) $\overleftrightarrow{AB}$

42) $\overleftrightarrow{AE}$

43) أي مستقيم عمودي على $\overleftrightarrow{BD}$.

استعد للدرس اللاحق

44) إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ متعامدتين، فأوجد قيمة كل من x, y .



2-6 الأعمدة والمسافة
Perpendiculars and Distance

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

والآن:

- أجد البعد بين نقطة ومستقيم.
- أجد البعد بين مستقيمين متوازيين.

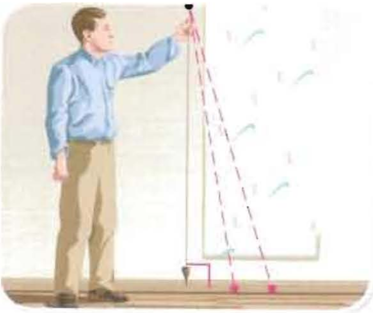
المفردات:

متساوي البعد
equidistant

المحل الهندسي
locus

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



الخيط الشاقولي عبارة عن خيط مربوط بأحد طرفيه ثقل معدني يسمى الشاقول، وعندما يُعلق الخيط من طرفه الآخر يتأرجح الشاقول تأرجحًا حرًّا، ثم يسكن بحيث يكون تحت نقطة التعليق مباشرة.

يُستعمل الخيط الشاقولي لإنشاء خط رأسي عند البناء أو عند لصق ورق الجدران.

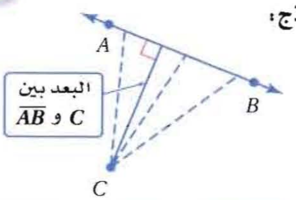
البعد بين نقطة و مستقيم: يمثل طول الخيط الشاقولي أقصر مسافة بين نقطة التعليق ومستوى الأرض أسفله. فالمسافة العمودية بين نقطة ومستقيم هي أقصر مسافة في جميع الحالات.

مفهوم أساسي: البُعد بين نقطة ومستقيم

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

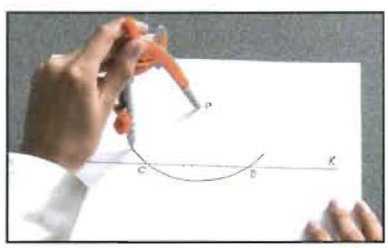
النموذج:



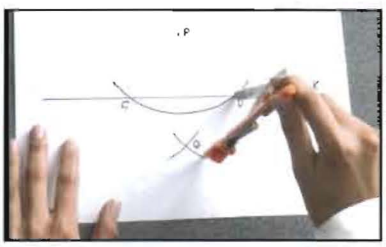
إن إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه يثبت أنه يوجد مستقيم واحد على الأقل يمر بتلك النقطة ويكون عموديًّا على المستقيم.

إنشاءات هندسية: إنشاء عمودي على مستقيم من نقطة لا تقع عليه

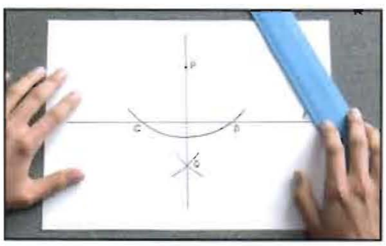
الخطوة 1: ضع الفرجار عند النقطة P. وارسم قوسًا يقطع k في موقعين مختلفين. سم نقطتي التقاطع C, D.



الخطوة 2: ضع الفرجار عند النقطة C، وارسم قوسًا تحت المستقيم k باستعمال فتحة فرجار أكبر من $\frac{1}{2}CD$. وباستعمال فتحة الفرجار نفسها ارسم من D قوسًا آخر يقطع القوس السابق. وسم نقطة التقاطع Q.



الخطوة 3: استعمل مسطرة غير مدرجة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$.



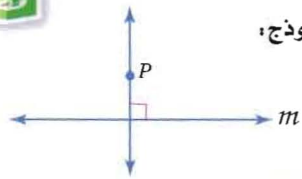
تنص المسلمة الآتية على أن المستقيم العمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه هو مستقيم وحيد.

مسلّمة 2.6 مسلمة التعامد

أضف إلى مطويتك

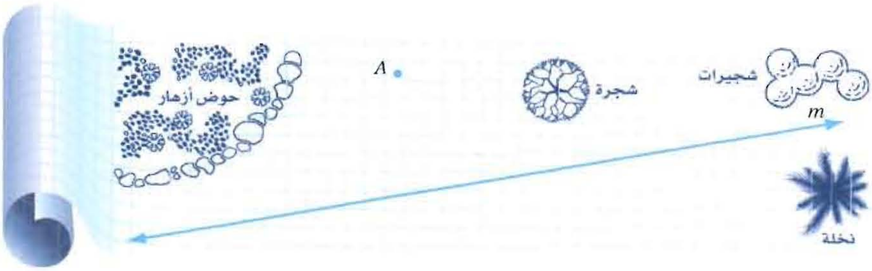
التعبير اللفظي: لأي مستقيم ونقطة لا تقع عليه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة، ويكون عموديًا على المستقيم المعلوم.

النموذج:

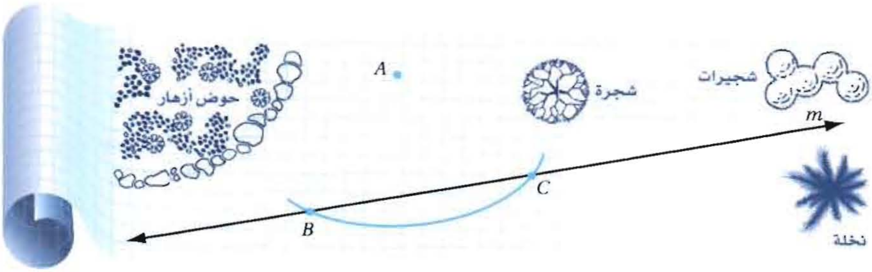


مثال 1 من واقع الحياة — إنشاء أقصر قطعة مستقيمة بين نقطة ومستقيم

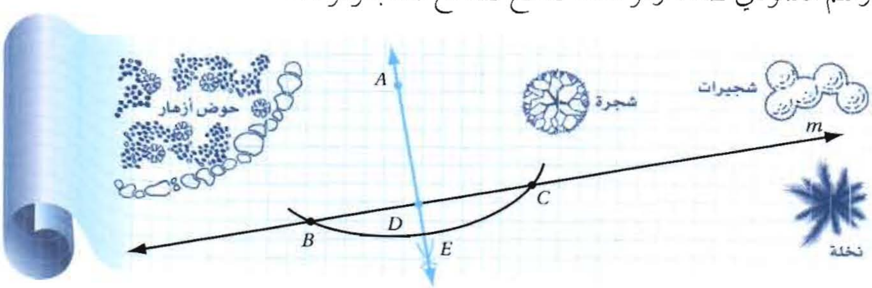
هندسة مدنية: لاحظ مهندس مدني أن جزءًا من ساحة حديقة عامة تتجمع عنده المياه. ويريد أن يضع أنبوب تصريف أرضي من النقطة A وسط هذه المنطقة إلى خط التصريف الرئيس الممثل بالمستقيم m. أنشئ القطعة المستقيمة التي يُمثّل طولها أقصر أنبوب يربط خط التصريف الرئيس بالنقطة A.



البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم. استعمل الفرجار لتعيّن النقطتين B, C على المستقيم m بحيث تكونا على البعد نفسه من النقطة A.



استعمل الفرجار لتعيِّن نقطة أخرى مثل E لا تقع على المستقيم m، وتكون على البعد نفسه من B, C. وارسم العمودي $\overleftrightarrow{AE}$. ارمز لنقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AE}$ مع $\overleftrightarrow{BC}$ بالرمز D.



يمثّل AD طول أقصر أنبوب يحتاج إليه المهندس لربط النقطة A بخط التصريف الرئيس.

الربط مع الحياة

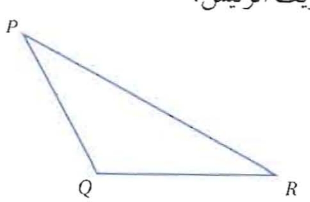
تقسم الهندسة المدنية إلى تخصصات منها: هندسة الإنشاءات، وهندسة الطرق، وهندسة الخرسانة، وهندسة المساحة، وهندسة التربة، وهندسة المياه.

إرشادات للدراسة

رسم أقصر مسافة يمكنك استعمال أدوات مثل ركن ورقة لتساعدك على رسم قطعة مستقيمة عمودية على مستقيم من نقطة لا تقع عليه، ولكن إنشاء هذه القطعة غير ممكن إلا باستعمال فرجار ومسطرة غير مدرجة.

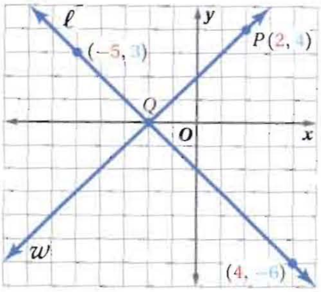
تحقق من فهمك

1) أنشئ القطعة المستقيمة التي يمثل طولها المسافة بين Q و $\overleftrightarrow{PR}$ وسمّها.



مثال 2 البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-5, 3), (4, -6)$. أوجد البعد بين المستقيم ℓ والنقطة $P(2, 4)$.



الخطوة 1: أوجد معادلة المستقيم ℓ. ابدأ بإيجاد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-5, 3), (4, -6)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 3}{4 - (-5)} = \frac{-9}{9} = -1$$

استعمل ميل المستقيم ℓ، والنقطة $(4, -6)$ الواقعة عليه لتجد مقطع المحور y له.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$-6 = -1(4) + b$	$m = -1, (x, y) = (4, -6)$
$-6 = -4 + b$	بالتبسيط
$-2 = b$	بجمع 4 لكلا الطرفين

معادلة المستقيم ℓ هي $y = -x + (-2)$، أو $y = -x - 2$.

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم w العمودي على المستقيم ℓ والمار بالنقطة $P(2, 4)$.

بما أن ميل المستقيم ℓ يساوي -1، فإن ميل المستقيم w يساوي 1.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$4 = 1(2) + b$	$m = 1, (x, y) = (2, 4)$
$4 = 2 + b$	بالتبسيط
$2 = b$	بطرح 2 من كلا الطرفين

معادلة المستقيم w هي $y = x + 2$.

الخطوة 3: حل نظام المعادلات لتجد نقطة التقاطع.

المستقيم ℓ: $y = -x - 2$

المستقيم w: $(+)\ y = x + 2$

$2y = 0$	بجمع المعادلتين
$y = 0$	بقسمة كلا الطرفين على 2

أوجد قيمة x.

$0 = x + 2$	بتعويض 0 بدل y في معادلة المستقيم w
$-2 = x$	بطرح 2 من كلا الطرفين

إذن نقطة التقاطع هي $Q(-2, 0)$

الخطوة 4: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد المسافة بين $P(2, 4), Q(-2, 0)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة بين نقطتين
$= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 4)^2}$	$x_2 = -2, x_1 = 2, y_2 = 0, y_1 = 4$
$= \sqrt{32}$	بالتبسيط

البعد بين النقطة والمستقيم هو $\sqrt{32}$ أو 5.66 وحدات تقريبًا.

إرشادات للدراسة

المسافة بين نقطة المحورين x, y
لاحظ أن المسافة بين نقطة والمحور x يمكن إيجادها بتحديد الإحداثي الصادي للنقطة، أما المسافة بينها وبين المحور y فيمكن إيجادها بتحديد الإحداثي السيني لها.

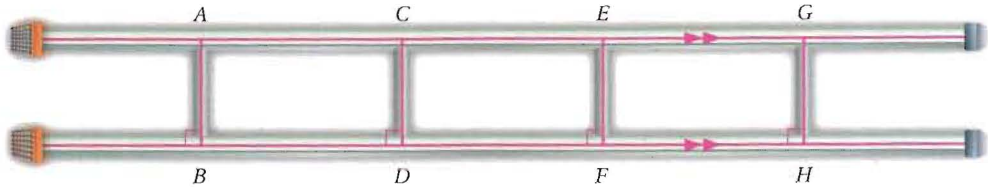
إرشادات للدراسة

طريقة الحذف
عند حل نظام معادلات باستعمال طريقة الحذف، قد تحتاج إلى ضرب إحدى المعادلات في عدد لتتمكن من الحذف عند جمع الحدود المتشابهة.

تحقق من فهمك

2) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(5, 4)$,$(1, 2)$. أنشئ مستقيمًا عموديًا على ℓ من النقطة $P(1, 7)$، ثم أوجد البعد بين P و ℓ.

البُعد بين مستقيمين متوازيين: يُعرَّف المستقيمان المتوازيان على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه ولا يتقاطعان. وهناك تعريف آخر ينص على أنهما مستقيمان **متساويا البعد** يقعان في المستوى نفسه. ويعني متساوي البعد أن المسافة العمودية بين أي نقطة على أحدهما والآخر ثابتة.



$AB = CD = EF = GH$

يقودنا ذلك إلى تعريف البعد بين مستقيمين متوازيين.

إرشادات للدراسة

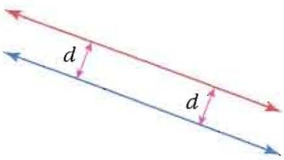
متساوي البعد
سوف تستعمل مفهوم متساوي البعد لتصف نقاطًا خاصة ومستقيمات مرتبطة بأضلاع المثلث وزواياه في الدرس 1-4.

مفهوم أساسي — البعد بين مستقيمين متوازيين

أضف إلى مطويتك

البعد بين مستقيمين متوازيين هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

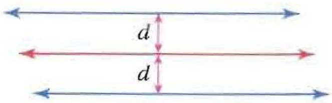
تُسمى مجموعة النقاط التي تحقق شرطًا ما **محلًا هندسيًا**. ويمكن وصف المستقيم الموازي لمستقيم معلوم بالمحل الهندسي لجميع النقاط متساوية البعد عن المستقيم في نفس المستوى.



نظرية 2.9 — المستقيمين المتساويي البعد عن مستقيم ثالث

أضف إلى مطويتك

إذا كان المستقيمان في المستوى متساويي البعد عن مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.



ستبرهن نظرية 2.9 في السؤال 21

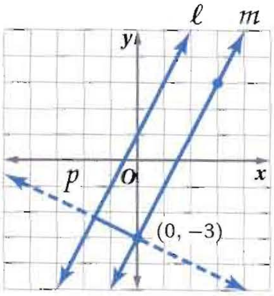
مثال 3 — المسافة بين مستقيمين متوازيين

أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين ℓ, m اللذين معادلتاهما $y = 2x + 1, y = 2x - 3$ على الترتيب.

يتعين عليك حل نظام من المعادلات لإيجاد نقطتي نهاية القطعة المستقيمة العمودية على كل من ℓ, m.

ميل المستقيم ℓ يساوي ميل المستقيم m ويساوي 2.

ارسم المستقيم p على أن يمر بنقطة مقطع المحور y للمستقيم m وهي $(0, -3)$، ويكون عموديًا على كلا المستقيمين.



الخطوة 1: لاحظ أن ميل المستقيم p هو معكوس مقلوب العدد 2، ويساوي $-\frac{1}{2}$. وأن المستقيم p يمر بالنقطة $(0, -3)$ ، وهي مقطع المحور y للمستقيم m. والآن: اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم p .

صيغة الميل ونقطة	$(y - y_1) = m(x - x_1)$
$x_1 = 0, y_1 = -3, m = -\frac{1}{2}$	$[y - (-3)] = -\frac{1}{2}(x - 0)$
بالتبسيط	$y + 3 = -\frac{1}{2}x$
بطرح 3 من كلا الطرفين	$y = -\frac{1}{2}x - 3$

الخطوة 2: حدد نقطة تقاطع المستقيمين ℓ و p بحل نظام المعادلات الآتي:

المستقيم ℓ: $y = 2x + 1$

المستقيم p: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

بتعويض $2x + 1$ بدلًا من y في معادلة المستقيم p	$2x + 1 = -\frac{1}{2}x - 3$
بتجميع الحدود المتشابهة في كل طرف	$2x + \frac{1}{2}x = -3 - 1$
بالتبسيط	$\frac{5}{2}x = -4$
بضرب كلا الطرفين في $\frac{2}{5}$	$x = -\frac{8}{5}$
بتعويض $-\frac{8}{5}$ بدلًا من x في معادلة المستقيم p	$y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\right) - 3$
بالتبسيط	$= -\frac{11}{5}$

نقطة التقاطع هي $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ أو $(-1.6, -2.2)$.

الخطوة 3: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد المسافة بين النقطتين $(0, -3)$ و $(-1.6, -2.2)$.

صيغة المسافة بين نقطتين	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$x_2 = -1.6, x_1 = 0, y_2 = -2.2, y_1 = -3$	$= \sqrt{(-1.6 - 0)^2 + [-2.2 - (-3)]^2}$
بالتبسيط	≈ 1.8

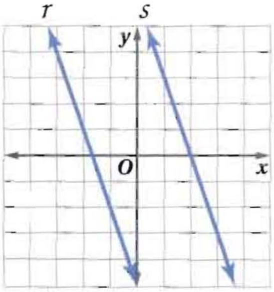
البُعد بين المستقيمين 1.8 وحدة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

طريقة التعويض

عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين باستعمال التعويض، عوّض قيمة أحد متغيرات المعادلة الأولى في المعادلة الثانية لتحصل على معادلة في متغير واحد.

تحقق من فهمك



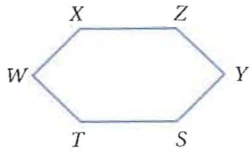
3A) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين r, s اللذين معادلتاهما $y = -3x - 5$, $y = -3x + 6$ على الترتيب.

3B) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a, b اللذين معادلتاهما $x + 3y = 6$, $x + 3y = -14$، على الترتيب.

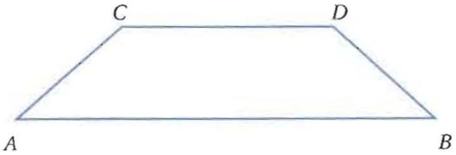
تأكـد

المثال 1 أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البُعد في كل مما يأتي :

1) البعد بين Y و $\overleftrightarrow{TS}$



2) البعد بين C و $\overleftrightarrow{AB}$



3) **أنابيب :** تزوِّد مؤسسة المياه المنازل بالمياه من خلال أنابيب تربطها بالأنبوب الرئيس في الشارع. في الشكل المجاور: ارسم القطعة المستقيمة التي **تمثل** أقصر أنبوب توصيل بين المنزل والأنبوب الرئيس في الشارع.

المثال 2 **هندسة إحداثية :** أوجد البعد بين المستقيمين $\mathcal{P}$ و ℓ في كل مما يأتي:

4) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-2, 0)$,$(4, 3)$، وإحداثيا النقطة P هما $(3, 10)$.

5) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-4, 9)$,$(-6, 1)$، وإحداثيا النقطة P هما $(4, 1)$.

6) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-2, 9)$,$(4, 18)$، وإحداثيا النقطة P هما $(-9, 5)$.

المثال 3 أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي :

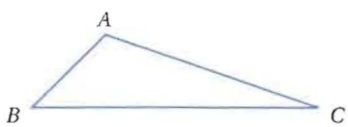
7) $y = -2x + 4$
$y = -2x + 14$

8) $y = 7$
$y = -3$

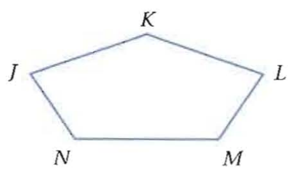
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثل البعد في كل مما يأتي:

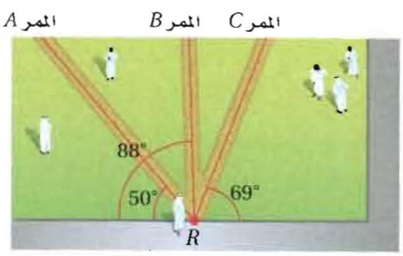
9) البعد بين A و $\overline{BC}$



10) البعد بين K و $\overline{LM}$



11) **مدرسة :** يعبر راشد الساحة الأمامية لمدرسته، حيث يوجد ثلاثة ممرات ممكنة مبينة في الشكل المجاور. أي الممرات الثلاثة هو الأقصر؟ وضّح تبريرك.



المثال 2 **هندسة إحداثية:** أوجد البعد بين المستقيمين $\mathcal{P}$ و ℓ في كل مما يأتي:

12) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(7, 4)$,$(-3, 0)$. وإحداثيا النقطة P هما $(4, 3)$.

13) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4, 1)$,$(-2, 1)$. وإحداثيا النقطة P هما $(5, 7)$.

14) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(3, 1)$,$(-8, 1)$. وإحداثيا النقطة P هما $(-2, 4)$.

المثال 3 أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

15) $y = -2$
$y = 4$

16) $x = 3$
$x = 7$

17) $y = \frac{1}{3}x - 3$
$y = \frac{1}{3}x + 2$

18) $y = 15$
$y = -4$

19) $3x + y = 3$
$y + 17 = -3x$

20) $y = -\frac{5}{4}x + 3.5$
$4y + 10.6 = -5x$

21) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.9 .

أوجد البعد بين المستقيم و النقطة في كل مما يأتي:

22) $y = -3, (5, 2)$

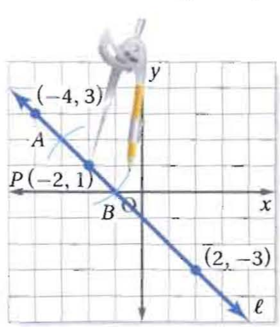
23) $y = \frac{1}{6}x + 6, (-6, 5)$

24) $x = 4, (-2, 5)$

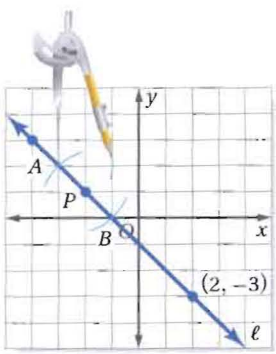
25) **ملصقات:** يعلق شاكر ملصقين على حائط غرفته كما هو مبين في الشكل. كيف يمكن له أن يستعمل البعد بين مستقيمين ليتأكد أن حافتي الملصقين متوازيتان؟

إنشاءات هندسية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(2, -3)$,$(-4, 3)$. وتقع النقطة $P(-2, 1)$ على المستقيم ℓ. تتبّع الخطوات أدناه وأجب عما يأتي:

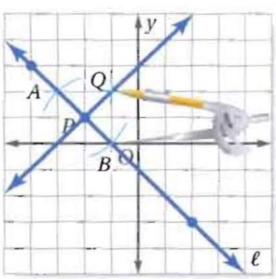
الخطوة 1:
ارسم المستقيم ℓ وعيّن النقطة P عليه، ثم ضع الفرجار عند النقطة P. وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسين عن يسار ويمين النقطة P. سمّ نقطتي التقاطع A و B.



الخطوة 2:
افتح الفرجار فتحة أكبر من AP. وضعه عند النقطة A، وارسم قوسًا أعلى المستقيم ℓ.



الخطوة 3:
باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع الفرجار عند النقطة B، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق، سمّ نقطة التقاطع Q. ثم ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$.



26) ضع تخمينًا للعلاقة بين المستقيمين ℓ و $\overleftrightarrow{PQ}$؟ أثبت تخمينك باستعمال ميلي المستقيمين.

27) كرر النشاط أعلاه باستعمال مستقيم آخر ونقطة عليه.

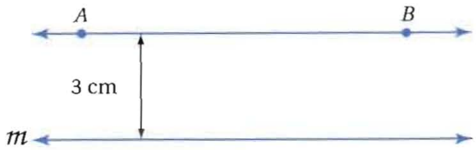
28) **هندسة إحداثية :** ميل $\overline{AB}$ يساوي 2 ، ونقطة منتصفها $M(3, 2)$. ونقطة منتصف قطعة مستقيمة أخرى عمودية على $\overline{AB}$ هي $P(4, -1)$ ، ولها نقطة الطرف B نفسها.

a) مثّل القطعتين المستقيمتين بيانيًا.

b) أوجد إحداثيات A و B.

29) **تمثيلات متعددة :** في هذه المسألة، سوف تستكشف مساحات مثلثات متكوّنة من نقاط على مستقيمين متوازيين.

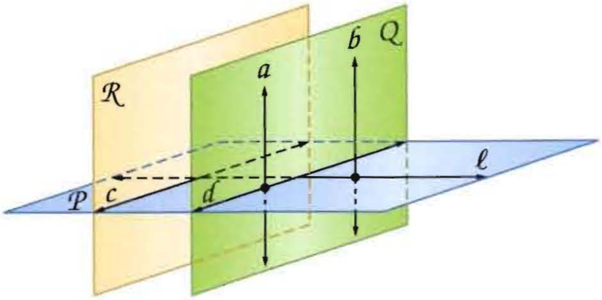
a) هندسيًا : ارسم مستقيمين متوازيين، وسمّهما كما في الشكل المجاور.



b) لفظيًا : أين تضع النقطة C على المستقيم m حتى يكون للمثلث ABC أكبر مساحة؟ وضّح تبريرك.

c) تحليليًا : إذا كان $AB = 11$ cm ، فما القيمة العظمى لمساحة $\triangle ABC$؟

30) **التعامد والمستويات :** استعن بالشكل أدناه للإجابة عن الأسئلة الآتية :



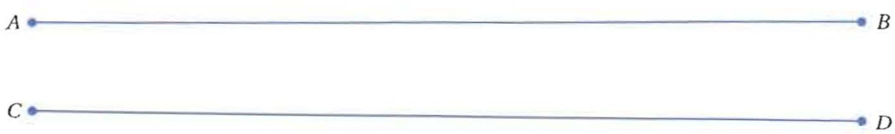
a) إذا كان المستقيمان عموديين على مستوى، فإنهما يقعان في مستوى واحد . ماذا تستنتج حول المستقيمين a, b إذا كانا عموديين على المستوى $\mathcal{P}$ ؟

b) إذا قطع مستوى مستويين آخرين متوازيين، فإنه ينتج عن التقاطع مستقيمان متوازيان، ماذا تستنتج حول المستقيمين c, d إذا كان المستويان $\mathcal{R}$ و Q متوازيين؟

c) إذا كان المستويان عموديين على مستقيم. فإنهما متوازيان. ماذا تستنتج حول المستويين Q و $\mathcal{R}$ إذا كانا عموديين على المستقيم ℓ ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ :** رسم ماجد القطعتين المستقيمتين $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ أدناه باستعمال حافة مستقيمة، ويدّعي أنه إذا مدّ هاتين القطعتين المستقيمتين فإنهما لن تتقاطعا أبدًا. خالفه زيد الرأي وقال: إنهما تتقاطعان. أي منهما على صواب؟ برر إجابتك.



32) **اكتب :** صفْ طريقة يمكن استعمالها لإيجاد البعد بين نقطة ومستوى.

33) **تحدٍّ :** افترض أن مستقيمًا عموديًا على مستقيمين متوازيين ويقطعهما في النقطتين $(0, 6)$ ، $(a, 4)$. إذا كانت المسافة بين المستقيمين المتوازيين $\sqrt{5}$ وحدات، فأوجد قيمة a ومعادلتي المستقيمين المتوازيين.

34) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح تبريرك.

يمكن إيجاد البُعد بين مستقيم ومستوى.

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا محدبًا غير منتظم باستعمال حافة مستقيمة.

a) أنشئ قطعة مستقيمة تمثل البُعد بين أحد الرؤوس وضلع غير مجاور له.

b) استعمل القياس لتتحقق من أن القطعة المستقيمة التي رسمتها عمودية على الضلع الذي اخترته.

c) أثبت رياضيًا أن القطعة المستقيمة التي رسمتها عمودية على الضلع الذي اخترته.

36) **تحدٍّ:** أعد كتابة النظرية 2.9 بدلالة مستويين متساويي البعد عن مستو ثالث، وارسم مثالًا على ذلك.

37) **اكتب:** لخّص الخطوات الضرورية لإيجاد البُعد بين مستقيمين متوازيين إذا عُلمت معادلتاهما.

تدريب على الاختبار المعياري

38) إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$ متعامدتين و $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ تنصف كل منهما الأخرى عند النقطة X، $AB = 16\ ,\ CD = 20$، فما طول $\overline{BD}$ ؟

A 6 **C** 10

B 8 **D** 18

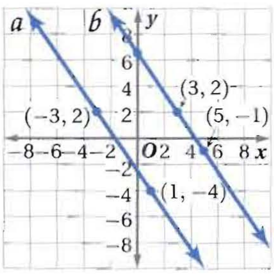
39) متنزه المدينة مربع الشكل، ومساحته $81000\ \text{ft}^2$. أي مما يأتي الأقرب إلى طول ضلعه؟

F 100 ft **H** 300 ft

G 200 ft **J** 400 ft

مراجعة تراكمية

40) استعن بالشكل المجاور؛ لتحدّد ما إذا كان $a \parallel b$.
برّر إجابتك. (الدرس 2-5)



اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كل مما يأتي: (الدرس 2-4)

41) $m = \frac{1}{4}, (3, -1)$

42) $m = 0, (-2, 6)$

43) $m = -2, (-6, -7)$

44) **حاسوب:** في عام 1426 هـ كانت نسبة مستخدمي شبكة الإنترنت في المملكة 11% تقريبًا، وبعد سنتين ارتفعت النسبة لتصبح 20% تقريبًا، إذا استمر معدل التغير هذا، فقدّر السنة التي تكون فيها نسبة المشتركين 50%. (الدرس 1-5)

استعد للدرس اللاحق

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

45) $O(-12, 0), P(-8, 3)$

46) $R(-2, 3), S(3, 15)$

47) $Q(-12, 2), T(-9, 6)$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القاطع: (الدرسان 2-1, 2-2)

- عندما يقطع قاطع مستقيمين، ينتج عن التقاطع أزواج من الزوايا المتبادلة خارجيًا أو المتبادلة داخليًا، أو المتحالفة أو المتناظرة.
- إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن:
  - كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.
  - كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.
  - كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
  - كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.

الميل: (الدرسان 2-3, 2-4)

- يعطى الميل m لمستقيم يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) بالصيغة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، حيث $x_1 \neq x_2$.

إثبات توازي مستقيمين: (الدرس 2-5)

- إذا قطع قاطع مستقيمين في نفس المستوى ونتج عن التقاطع أي مما يأتي، فإن المستقيمين متوازيان:
  - زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان.
  - زاويتان متبادلتان داخليًا متطابقتان.
  - زاويتان متحالفتان متكاملتان.
- إذا كان المستقيمان عموديين على المستقيم نفسه في المستوى فإنهما متوازيان.

البُعد: (الدرس 2-6)

- البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.
- البُعد بين مستقيمين متوازيين هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

المطويات منظم أفكار

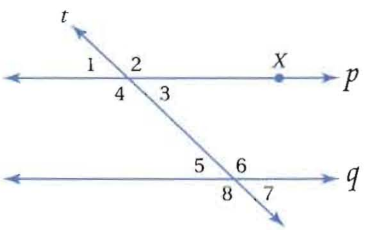
تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

- **المستقيمان المتخالفان** (ص. 82)
- **المستويان المتوازيان** (ص. 82)
- **المستقيمان المتوازيان** (ص. 82)
- **الزاويتان المتبادلتان خارجيًا** (ص. 83)
- **الزاويتان المتبادلتان داخليًا** (ص. 83)
- **الزاويتان المتحالفتان** (ص. 83)
- **الزاويتان المتناظرتان** (ص. 83)
- **القاطع** (ص. 83)
- **الزوايا الداخلية** (ص. 83)
- **الزوايا الخارجية** (ص. 83)
- **الميل** (ص. 95)
- **معدل التغير** (ص. 96)
- **صيغة الميل ونقطة** (ص. 104)
- **صيغة الميل والمقطع** (ص. 104)
- **متساوي البعد** (ص. 123)
- **المحل الهندسي** (ص. 123)

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:



1) إذا كان $\angle 5 \cong \angle 1$، فإن p و q مستقيمان متخالفان.

2) الزاويتان 4 ، 6 متبادلتان داخليًا.

3) الزاويتان 1 ، 7 متبادلتان خارجيًا .

4) إذا كان p و q متوازيين فإن الزاويتين 3 ، 6 متطابقتان.

5) بعد النقطة X عن المستقيم q هو طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة X إلى المستقيم q.

6) يُسمّى المستقيم t قاطعًا للمستقيمين p و q.

7) إذا كان $p \parallel q$، فإن $\angle 2$ و $\angle 8$ متكاملتان.

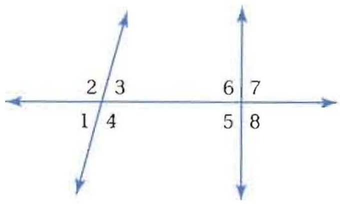
8) الزاويتان 4 ، 8 متناظرتان.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

2-1 المستقيمان المتوازيان والقاطع (ص: 87-82)

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



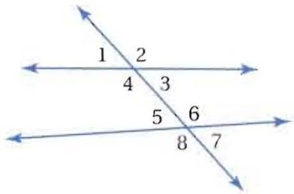
9) $\angle 1 , \angle 5$ **10)** $\angle 4 , \angle 6$

11) $\angle 2 , \angle 8$ **12)** $\angle 4 , \angle 5$

13) جسور المشاة: بُني جسر لعبور المشاة فوق شارع، صنِّف المستقيمين اللذين يمثلان الجسر والشارع.

مثال 1

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



a) $\angle 3, \angle 6$
متحالفتان

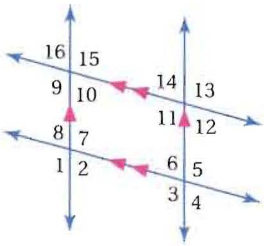
b) $\angle 2, \angle 6$
متناظرتان

c) $\angle 1, \angle 7$
متبادلتان خارجيًّا

d) $\angle 3, \angle 5$
متبادلتان داخليًّا

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية (ص: 94-89)

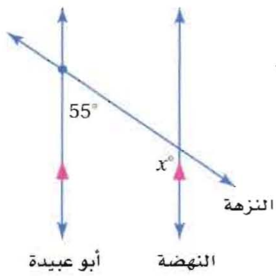
في الشكل أدناه: $m\angle 1 = 123^\circ$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



14) $\angle 5$ **15)** $\angle 14$ **16)** $\angle 16$

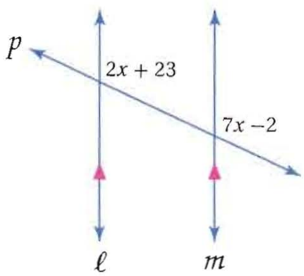
17) $\angle 11$ **18)** $\angle 4$ **19)** $\angle 6$

20) خرائط: يبيّن الشكل المجاور تخطيط شوارع كلٍّ من: أبي عبيدة، والنهضة، والنزهة. أوجد قيمة x.



مثال 2

جبر: أوجد قيمة x في الشكل الآتي. وضّح تبريرك.



$7x - 2 = 2x + 23$	تعريف الزاويتين المتناظرتين
$7x - 2x = 23 + 2$	بتجميع الحدود المتشابهة
$5x = 25$	بالتبسيط
$x = 5$	بالقسمة

2-3 ميل المستقيم (ص. 102-95)

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{XY}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

21) $A(5, 3), B(8, 0), X(-7, 2), Y(1, 10)$

22) $A(-3, 9), B(0, 7), X(4, 13), Y(-5, 7)$

23) $A(8, 1), B(-2, 7), X(-6, 2), Y(-1, -1)$

ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

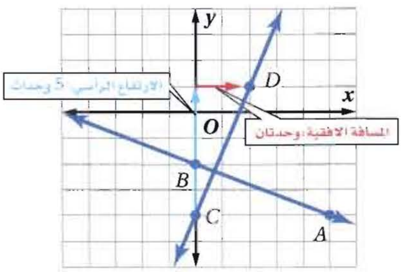
24) يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$، حيث $A(2, 5), B(9, 2)$.

25) يمر بالنقطة $(1, 3)$ ويعامد $\overleftrightarrow{PQ}$، حيث $P(4, -6), Q(6, -1)$.

26) **طائرات:** تحلّق الطائرتان A و B في مسارين مستقيمين وعلى الارتفاع نفسه. رصد قمر صناعي موقعين للطائرة A عند النقطتين $(5, 11), (23, 17)$، ورصد موقعين للطائرتين B عند النقطتين $(9, 17), (3, 15)$. هل مسارا الطائرتين متوازيان، أو متعامدان، أو غير ذلك؟

مثال 3

مثّل بيانيًا المستقيم الذي يمر بالنقطة $C(0, -4)$ العمودي على $\overleftrightarrow{AB}$، حيث $A(5, -4), B(0, -2)$.



ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $\frac{-2-(-4)}{0-5}$ أو $-\frac{2}{5}$.

بما أن $-\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\right) = -1$، فإن ميل المستقيم **العمودي** على $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $\frac{5}{2}$.

لتمثيل المستقيم بيانيًا، ابدأ من النقطة C، وتحرك 5 وحدات إلى أعلى ووحدتين إلى اليمين، وسمّ النقطة D، ثم ارسم $\overleftrightarrow{CD}$.

2-4 معادلة المستقيم (ص. 111-104)

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كل مما يأتي:

27) $m = 2, (4, -9)$

28) $m = -\frac{3}{4}, (8, -1)$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع محور y له فيما يأتي:

29) $m = 5, b = -3$

30) $m = \frac{1}{2}, b = 4$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما فيما يأتي:

31) $(-3, 12), (15, 0)$

32) $(-7, 2), (5, 8)$

33) **فيزياء:** تسير مركبة بسرعة 30 m/s، وبدأت تتباطأ بمعدل ثابت، وبعد ثانيتين أصبحت سرعتها 16m/s. اكتب معادلة تمثّل سرعة السيارة v بعد t ثانية. ثم استعمل المعادلة لتحدّد الزمن الذي تستغرقه حتى تقف.

مثال 4

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 5), (6, 3)$.

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{6-2} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

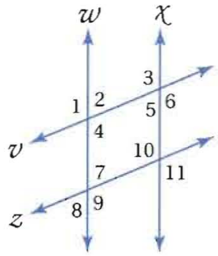
$$y - 5 = -\frac{1}{2}[x - (2)] \quad m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (2, 5)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6 \quad \text{بجمع 5 لكلا الطرفين}$$

2-5 إثبات توازي مستقيمين (ص: 113-119)

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



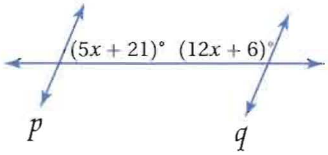
34) $\angle 7 \cong \angle 10$

35) $\angle 2 \cong \angle 10$

36) $\angle 1 \cong \angle 3$

37) $\angle 3 \cong \angle 11$

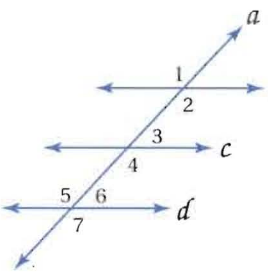
38) أوجد قيمة x بحيث يكون $p \parallel q$. حدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها.



39) **هندسة المواقع:** إذا كان $m\angle BAD = 45°$، فأوجد قياس $m\angle ADC$ الذي يجعل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

مثال 5

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 7$

$\angle 1$ و $\angle 7$ متبادلتان خارجيًّا بالنسبة للمستقيمين b و d.

بما أن $\angle 7 \cong \angle 1$، فإن $b \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

b) $\angle 4 \cong \angle 5$

$\angle 4$ و $\angle 5$ متبادلتان داخليًّا بالنسبة للمستقيمين c و d.

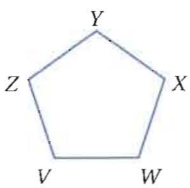
بما أن $\angle 5 \cong \angle 4$، فإن $c \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

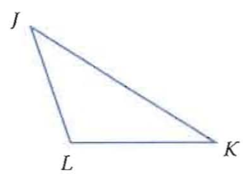
2-6 الأعمدة والمسافة (ص: 120-128)

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد في كل مما يأتي :

40) البعد بين X و $\overleftrightarrow{VW}$

41) البعد بين L و $\overleftrightarrow{JK}$

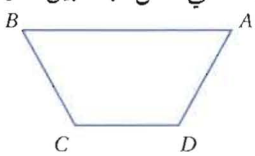




42) **قياس:** علّق خالد صفين من الصور على حائط غرفته. فقام أولًا بتثبيت مسامير لوحات الصف العلوي على استقامة واحدة. ثم علّق الخيط الشاقولي من كل مسمار وقاس مسافات متساوية أسفل كل مسمار ووضع مسمارًا للوحة في الصف الثاني. لماذا يدل هذا العمل على أن صفّي الصور سيكونان متوازيين؟

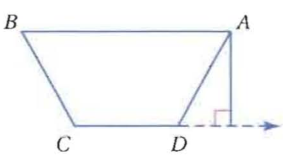
مثال 6

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد بين A و $\overleftrightarrow{CD}$.

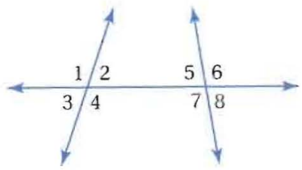


البعد بين المستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

مد $\overline{CD}$ ، وارسم القطعة المستقيمة العمودية على $\overleftrightarrow{CD}$ من A.



صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



1) $\angle 6, \angle 3$

2) $\angle 4, \angle 7$

3) $\angle 5, \angle 4$

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كل مما يأتي:

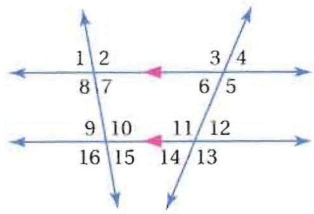
4) $G(8, 1), H(8, -6)$

5) $A(0, 6), B(4, 0)$

6) $E(6, 3), F(-6, 3)$

7) $E(5, 4), F(8, 1)$

في الشكل أدناه: $m\angle 8 = 96°$ و $m\angle 12 = 42°$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

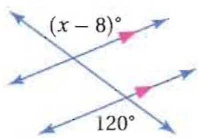


8) $\angle 9$

9) $\angle 11$

10) $\angle 6$

11) أوجد قيمة x في الشكل الآتي:



12) **نادٍ رياضي:** يقارن مشاري بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع في العرض الأول 200 ريال شهريًا. ويدفع في العرض الثاني 55 ريالًا شهريًا بالإضافة إلى رسوم اشتراك لأول مرة مقدارها 75 ريالًا.

a) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلتين تمثلان التكلفة y للاشتراك في كل من العرضين لعدد x من الأشهر. ثم مثّلهما بيانيًا.

b) هل المستقيمان الممثلان بيانيًا في الفرع a متوازيان؟ وضّح السبب.

c) أي العرضين هو الأفضل؟ وضّح إجابتك.

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم في كل من الحالات الآتية:

13) يمر بالنقطة $(-8, 1)$، ويعامد $y = 2x - 17$

14) يمر بالنقطة $(0, 7)$، ويوازي $y = 4x - 19$

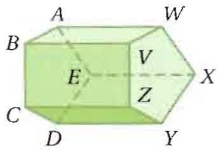
15) يمر بالنقطة $(-12, 3)$، ويعامد $y = -\frac{2}{3}x - 11$

أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

16) $y = x - 11$
$y = x - 7$

17) $y = -2x + 1$
$y = -2x + 16$

18) **اختيار من متعدد:** أي القطع المستقيمة تخالف $\overline{CD}$؟



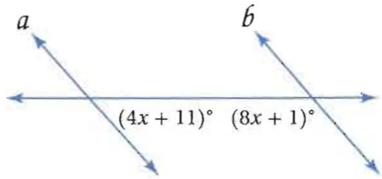
A) $\overline{ZY}$

B) $\overline{AB}$

C) $\overline{DE}$

D) $\overline{VZ}$

19) أوجد قيمة x التي تجعل $a \parallel b$. وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها.

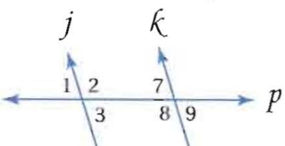


هندسة إحداثية: أوجد البعد بين المستقيمين $\mathcal{P}$ و ℓ في كل مما يأتي:

20) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-5, 3)$, $(-4, 2)$. وإحداثيا النقطة P هما $(2, 1)$.

21) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(2, 3)$, $(6, 5)$. وإحداثيا النقطة P هما $(2, 6)$.

هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمات الشكل الآتي متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإن كانت متوازية، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



22) $\angle 4 \cong \angle 10$

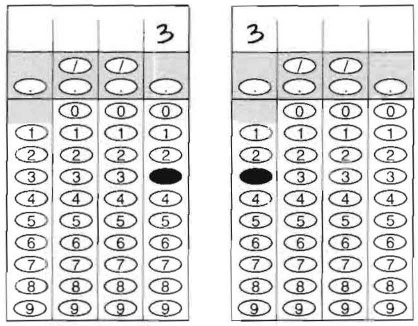
23) $\angle 9 \cong \angle 6$

24) $\angle 7 \cong \angle 11$

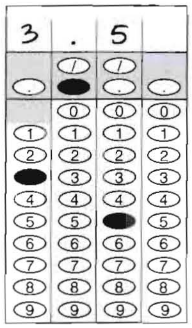
25) **أعمال:** يعمل محمود مندوب مبيعات، ويتقاضى 12 ريالًا عن كل ساعة عمل زائد عمولة مقدارها 15% من قيمة مبيعاته. اكتب معادلة تمثّل ما يتقاضاه في أحد الأسابيع إذا كانت قيمة مبيعاته 2000 ريال.

أسئلة الإجابات الشبكية

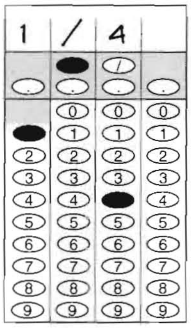
من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ويتطلب هذا النوع من الأسئلة كتابة الإجابة في نموذج خاص، فقد تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كليَّة، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.



أعداد كلية



كسور عشرية



كسور اعتيادية

استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بإمعان ثم حلّها.

- تأكد أن إجابتك لها معنى.
- إذا كان الوقت كافيًا، فتحقق من إجابتك.

الخطوة 2

اكتب إجابتك في مربع الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل مربع إجابة على نموذج الإجابة الشبكية.
- **لا** تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.

الخطوة 3

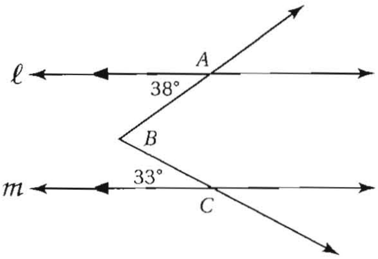
دوّن الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل فقط دائرة واحدة لكل مربع إجابة، وتأكد أنك ظللت قيمة مناظرة للتي في المربع.
- ظلّل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

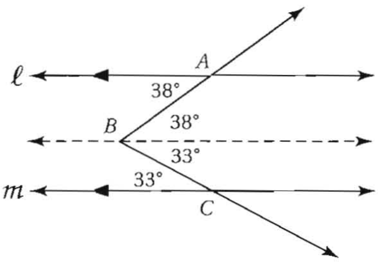
اقرأ المسألة جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

إجابة شبكية : في الشكل أدناه: قُطعت $\angle ABC$ بالمستقيمين المتوازيين ℓ ، m. ما قياس $\angle ABC$؟ اكتب إجابتك بالدرجات.



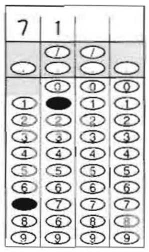
ارسم مستقيمًا ثالثًا مساعدًا يوازي المستقيمين ℓ و m مارًّا بالنقطة B. وأوجد قياسات الزوايا باستعمال الزوايا المتبادلة داخليًا:

حل المسألة



$$m\angle ABC = 38^\circ + 33^\circ = 71^\circ$$

أدخل الإجابة في النموذج



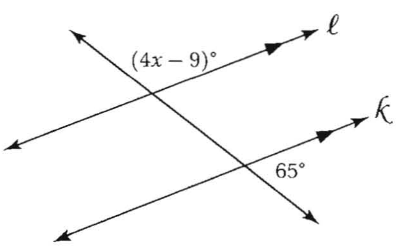
اكتب إجابتك في مربعات الإجابات، ثم ظلّل القيمة المناظرة.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة:

1) **إجابة شبكية :** ما ميل المستقيم الذي يحتوي النقطتين $R(-2, 1)$, $S(10, 6)$؟ اكتب إجابتك على صورة كسر اعتيادي.

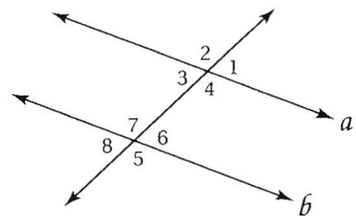
2) **إجابة شبكية :** ما قيمة x في الشكل أدناه؟



أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي ، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة :

1) في الشكل أدناه: إذا كان $a \parallel b$ ، أي مما يأتي ليس مؤكدًا صحته؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

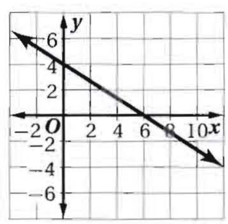
2) أي مما يأتي مثال مضاد للعبارة أدناه؟

مجموع أي عددين فرديين عدد فردي

F $3 + 3 = 6$ **H** $6 + 2 = 8$

G $5 + 4 = 9$ **J** $4 + 9 = 13$

3) ما ميل المستقيم الممثل بيانيًا أدناه ؟



A $-\frac{2}{3}$ **C** $-\frac{2}{5}$

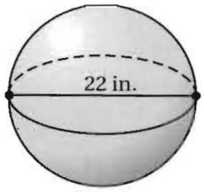
B $-\frac{1}{2}$ **D** $-\frac{1}{6}$

4) يمر المستقيم k بالنقطتين $(4, 1)$ و $(-5, -5)$.
أوجد البعد بين المستقيم k والنقطة $F(-4, 0)$.

F 3.3 وحدات **H** 4.0 وحدات

G 3.6 وحدات **J** 4.2 وحدات

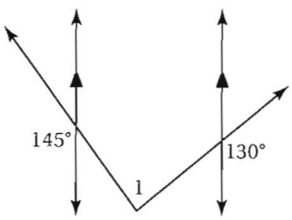
5) ما حجم الكرة أدناه؟



A 1520.5 in^3 **C** 5575.3 in^3

B 1741.4 in^3 **D** 6014.8 in^3

6) ما قياس $\angle 1$ في الشكل أدناه؟



F 85 **H** 95

G 90 **J** 100

7) يرغب عبدالله في شراء ساعة يد سعرها 580 ريالًا . إذا كان لديه 140 ريالًا ، ويمكنه ادخار 40 ريالًا أسبوعيًا، فبعد كم أسبوعًا يتوفر لديه المبلغ الكافي لشراء الساعة؟

A 10 **C** 12

B 11 **D** 13

إرشادات للاختبار

السؤال 6: يمكن أن يساعدك الرسم على حل المسألة؛ لذا ارسم مستقيمًا ثالثًا موازيًا يمر برأس الزاوية 1، ثم استعمل خصائص المستقيمات المتوازية والقاطع لحل المسألة.

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة:

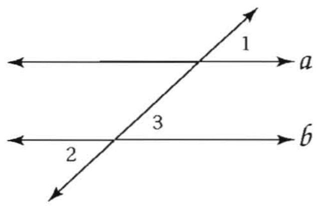
8) **إجابة شبكية :** إذا عُلم مستقيم ونقطة **لا** تقع عليه، فكم مستقيمًا يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم ؟

9) **إجابة شبكية :** أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, 3), (-2, -5)$.

10) أكمل البرهان الآتي :

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: $a \parallel b$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 \cong \angle 2$	1) مُعطى
2) $\angle 2 \cong \angle 3$	2) ؟
3) $\angle 1 \cong \angle 3$	3) خاصية التعدي للتطابق
4) $a \parallel b$	4) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

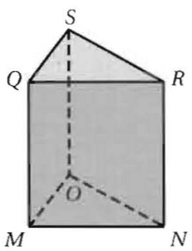
11) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة :

"إذا كان الشكل مربعًا، فإنه متوازي أضلاع".

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجاباتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

12) استعن بالشكل أدناه لتحدد كلًّا مما يأتي:

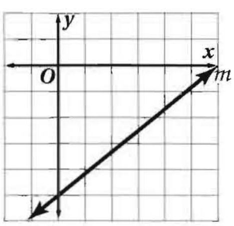


a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{MQ}$

b) جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى SRN

c) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{ON}$

13) استعن بالتمثيل البياني المجاور للإجابة عن كل من الأسئلة الآتية:



a) ما معادلة المستقيم m؟

b) ما ميل المستقيم الذي يوازي المستقيم m؟

c) ما ميل مستقيم عمودي على المستقيم m؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تجب عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	1-4	1-1	2-3	2-6	مهارة سابقة	2-2	1-6	2-4	2-5	2-2	1-3	2-1	2-4

الفصل 3

المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فيما سبق:
درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

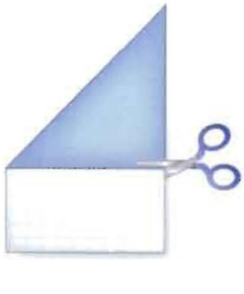
والآن:
- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

لماذا؟
لياقة: تستعمل المثلثات لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.

المطويات منظم أفكار

المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

1. **ضع** أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اطوِ الأوراق لتشكل مثلثًا، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.



2. **ثبِّت** الحافة بسلك، بحيث تشكل الأوراق دفترًا، واكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقِّمَ كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.

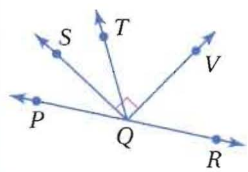
التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

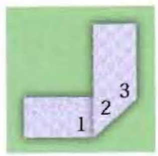
صنّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة:



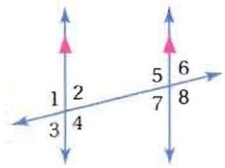
1) $\angle VQS$ 2) $\angle TQV$

3) $\angle PQV$

4) **تصاميم ورقية:** اطْوِ قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي. ثم صنِّف كلًّا من الزوايا الناتجة إلى قائمة أو منفرجة أو حادّة.



جبْر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغيِّر المطلوب في كل من السؤالين الآتيين. ووضِّح إجابتك:



5) أوجد قيمة x إذا علمت أنّ: $m\angle 3 = (x - 12)°$، وأنّ $m\angle 6 = 72°$.

6) أوجد قيمة y . إذا علمت أنّ $m\angle 4 = (2y + 32)°$، وأنّ $m\angle 5 = (3y - 3)°$.

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

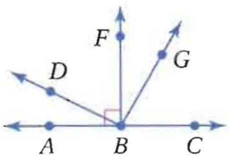
7) $X(-2, 5), Y(1, 11)$ 8) $R(8, 0), S(-9, 6)$

9) **خرائط:** قسّمت منى خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$، وكانت مدينة نجران تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$، فاحسب المسافة الجوية بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا.

مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة:



a) $\angle ABG$

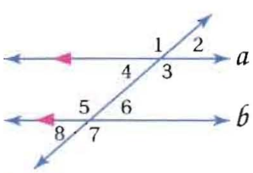
تقع النقطة G خارج الزاوية القائمة $\angle ABF$؛ لذا تكون $\angle ABG$ زاوية منفرجة.

b) $\angle DBA$

تقع النقطة D داخل الزاوية القائمة $\angle FBA$؛ لذا تكون $\angle DBA$ زاوية حادّة.

مثال 2

في الشكل المجاور إذا كان $m\angle 4 = 42°$، فأوجد $m\angle 7$.



$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان متبادلتان خارجيًّا؛ لذا فهما زاويتان متطابقتان.
$\angle 1$ و $\angle 4$ تشكلان زاوية مستقيمة؛ لذا فهما زاويتان متكاملتان.
ينتج مما سبق أن $\angle 7$ و $\angle 4$ متكاملتان؛
إذن $m\angle 7 = 180° - 42°$، أي $138°$.

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(5, 2), K(11, -7)$.

$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$ بالطرح

$= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ بالتبسيط

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع: www.obeikaneduction.com.

3-1 تصنيف المثلثات
Classifying triangles

فيما سبق:

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

والآن:

- أصنف المثلثات وفقًا لزواياها.
- أصنف المثلثات وفقًا لأضلاعها.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المتطابق الزوايا
equiangular triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

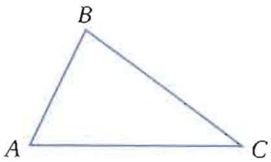
المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يعدُّ المثلث عنصرًا زخرفيًا مميزًا في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف A , B , C كما يلي:

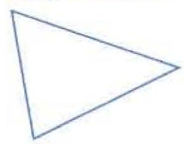
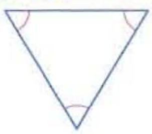
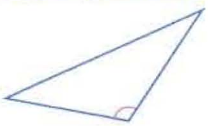
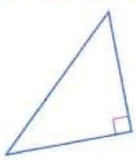


- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA}$
- الرؤوس هي: A , B , C
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$, $\angle C$ أو $\angle BCA$, $\angle B$ أو $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقًا لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

مفهوم أساسي: تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

أضف إلى مطويتك

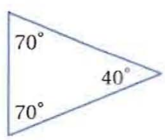
مثلث حاد الزوايا	مثلث متطابق الزوايا	مثلث منفرج الزاوية	مثلث قائم الزاوية
			
3 زوايا حادة	3 زوايا حادة متطابقة	إحدى الزوايا منفرجة	إحدى الزوايا قائمة

يمكن تصنيف أي مثلث وفقًا لزواياه في واحد من التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.

مثال 1 تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

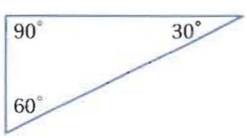
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(a



زوايا المثلث الثلاث حادّة وليست جميعها متساوية. فهذا المثلث حادّ الزوايا.

(b

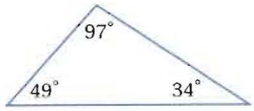


قياس إحدى زوايا هذا المثلث $90°$، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

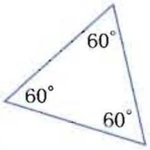
تحقق من فهمك

صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

1A)



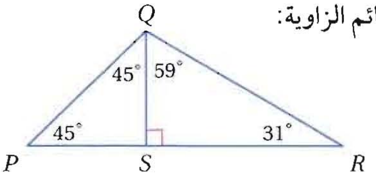
1B)



> **مراجعة المفردات**
>
> **الزاوية الحادة:** زاوية يقل قياسها عن $90°$.
>
> **الزاوية القائمة:** زاوية قياسها $90°$.
>
> **الزاوية المنفرجة:** زاوية قياسها أكبر من $90°$.

مثال 2 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لزواياها

صنّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



تقع النقطة S داخل $\angle PQR$، وحسب مسلّمة جمع الزوايا يكون:

$$m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$$

بالتعويض، $m\angle PQR = 45° + 59° = 104°$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.

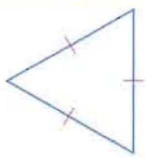
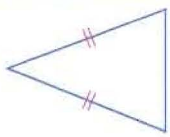
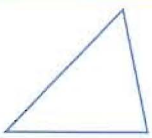
تحقق من فهمك

2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. للدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.

مفهوم أساسي تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

أضف إلى مطويتك

مثلث متطابق الأضلاع	مثلث متطابق الضلعين	مثلث مختلف الأضلاع
		
3 أضلاع متطابقة	ضلعان على الأقل متطابقان	لا توجد أضلاع متطابقة

إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

> **الربط مع الحياة**
>
> في العديد من السيارات، تُشغَّل أضواء الخطر بالضغط على زرّ صغير قرب المقْود. يكون شكل هذا الزر عادة مثلثًا أحمر أو برتقاليًّا صغيرًا كما في الشكل أعلاه.
>
> عندما يشغَّل هذا الزر تضيء أضواء إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهّل رؤية السيارة من قِبل السائقين الآخرين.

مثال 3 من واقع الحياة تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

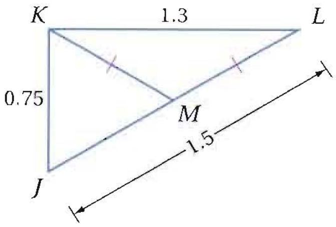
فن العمارة: صنِّف المثلث في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

في المثلث ضلعان قياس كل منهما **55 cm**، أيْ أنّ في المثلث ضلعين متطابقين. فيكون المثلث متطابق الضلعين.

تحقق من فهمك

3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنِّف شكل زر ضوء الخطر في الهامش على يمين الصفحة وفقًا لأضلاعه.

مثال 4 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لأضلاعها



إذا كانت M نقطة منتصف JL، فصنِّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

من تعريف نقطة المنتصف $JM = ML$.

$JM + ML = JL$ مسلمة جمع القطع المستقيمة

$ML + ML = 1.5$ بالتعويض

$2ML = 1.5$ بالتبسيط

$ML = 0.75$ بقسمة الطرفين على 2

$JM = ML = 0.75$

وبما أن $\overline{KM} \cong \overline{ML}$، فإنّ $KM = ML = 0.75$.

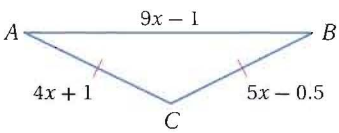
وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.

تحقق من فهمك

4) صنِّف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين لإيجاد قيم مجهولة كما في المثال الآتي:

مثال 5 إيجاد قيم مجهولة



جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أوجد قيمة x.

$AC = CB$ مُعطى

$4x + 1 = 5x - 0.5$ بالتعويض

$1 = x - 0.5$ بطرح $4x$ من الطرفين

$1.5 = x$ بإضافة 0.5 إلى الطرفين

الخطوة 2: عوّض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

$AC = 4x + 1$ مُعطى

$= 4(1.5) + 1 = 7$ بالتعويض $x = 1.5$

$CB = AC$ مُعطى

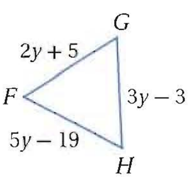
$= 7$ بالتعويض $AC = 7$

$AB = 9x - 1$ مُعطى

$= 9(1.5) - 1$ بالتعويض $x = 1.5$

$= 12.5$ بالتبسيط

تحقق من فهمك



5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH.

إرشادات للدراسة

تحقق للتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوّض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB.

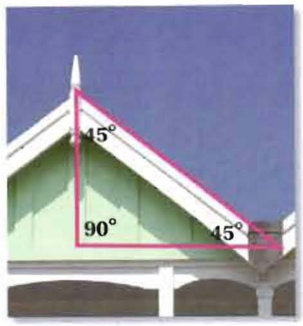
$CB = 5x - 0.5$

$= 5(1.5) - 0.5$

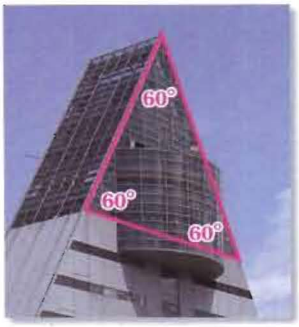
$= 7$ ✓

تأكـد

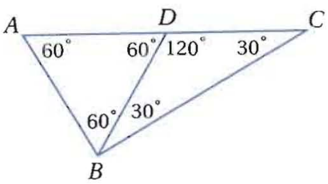
المثال 1 **فنّ العمارة:** صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(1


(2


(3


المثال 2 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



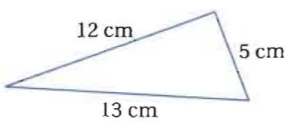
(4 $\triangle ABD$

(5 $\triangle BDC$

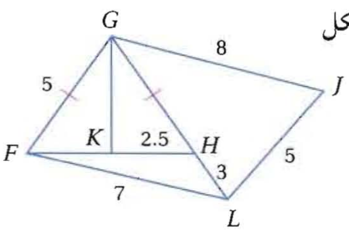
(6 $\triangle ABC$

المثال 3 صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

(7


(8


المثال 4 إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$ ، فصنّف كلًّا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

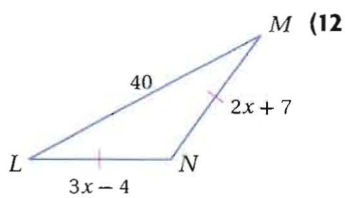


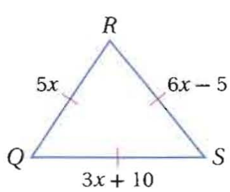
(9 $\triangle FGH$

(10 $\triangle GJL$

(11 $\triangle FHL$

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:.

(12


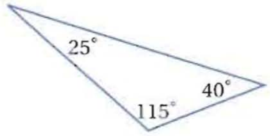
(13


(14 **مجوهرات:** افترض أن لديك سلكًا مرنًا من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تُشكّله لتعمل قرطًا. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العِلاقة 1.5 cm، فكم قرطًا يمكنك أن تصنع باستعمال سلك طوله 45 cm؟ فسّر إجابتك.

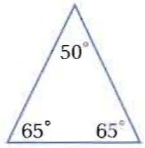
تدرب وحل المسائل

المثال 1 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

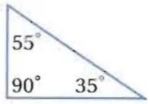
(15



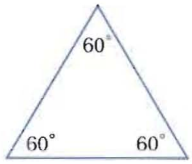
(16



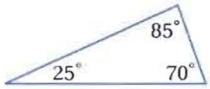
(17



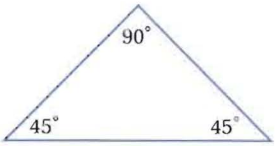
(18



(19



(20



المثال 2 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(21 $\triangle UYZ$

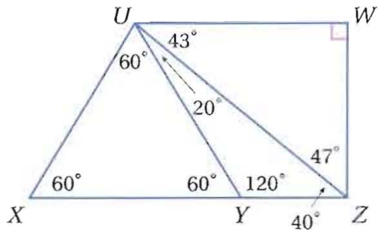
(22 $\triangle BCD$

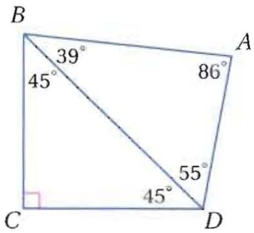
(23 $\triangle ADB$

(24 $\triangle UXZ$

(25 $\triangle UWZ$

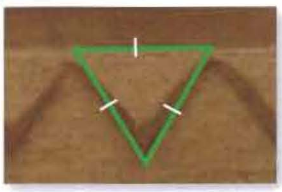
(26 $\triangle UXY$





المثال 3 صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

(27



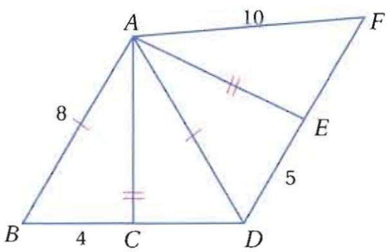
(28

المثال 4 إذا كانت النقطة C هي منتصف $\overline{BD}$، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$، فصنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

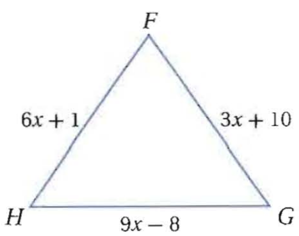
(29 $\triangle ABC$ **(30** $\triangle AEF$

(31 $\triangle ADF$ **(32** $\triangle ACD$

(33 $\triangle AED$ **(34** $\triangle ABD$

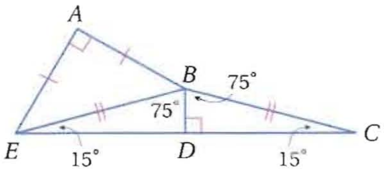


المثال 5 **(35** **جبر:** إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه.



36) **فنّ تشكيلي:** صنِّف كلًّا من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل الزاوية القائمة في أحد أركان صفحة من دفترك لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.

صنِّف كلًّا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

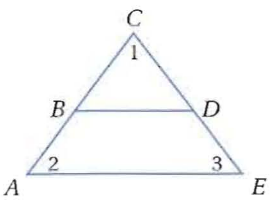


37) $\triangle ABE$ 38) $\triangle EBC$ 39) $\triangle BDC$

هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كل من السؤالين الآتيين، وصنِّفه وفق أضلاعه:

40) $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$ 41) $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$

42) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين تبين فيه أنّ $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $BD \parallel AE$.

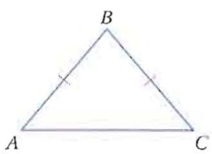


جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلٍّ مما يأتي:

43) $\triangle FGH$ مثلث متطابق الأضلاع فيه، $FG = 3x - 10 , GH = 2x + 5 , HF = x + 20$.

44) $\triangle RST$ متطابق الأضلاع. ويزيد RS ثلاثة على أربعة أمثال x، ويزيد ST سبعة على مثلي x، ويزيد TR واحدًا على خمسة أمثال x .

45) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين، ففي الشكل المجاور الرأس الذي يقابل BC هو A.



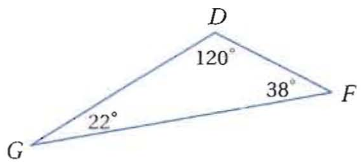
a) **هندسيًا:** ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وسمِّ في كلٍّ من هذه المثلثات الرأسيْن المقابلين للضلعين المتطابقين A , C، وسمِّ الرأس الثالث B. ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.

b) **جدوليًا:** قِسْ زوايا كل مثلث ورتِّب القياسات في جدول. وضمِّنه عمودًا تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

c) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين قياسيْ الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين. ثم خمّن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

d) **جبريًا:** إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو x، فاكتب عبارتين جبريتين تمثِّلان قياسيْ الزاويتين الأخريين. وفسِّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا



46) اكتشف الخطأ: تقول ليلى: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية، لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حادّ الزوايا. أيُّهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

تبرير: قرِّر ما إذا كانت العبارة في كل مما يأتي صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو خطأً. ووضح إجابتك.

47) المثلث المتطابق الزوايا هو قائم الزاوية أيضًا.

48) المثلث المتطابق الأضلاع هو متطابق الضلعين أيضًا.

49) تحدٍّ: إذا كان طولا ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 3$ وحدة، $7x - 5$ وحدة، فما محيطه؟ فسِّر إجابتك.

50) اكتب: فسِّر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا بأنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفًا غير ضروري؟

تدريب على الاختبار المعياري

51) جبر: اشترى خالد معجمًا من معرض الكتب بعد تخفيض نسبته 40% . إذا كان ثمنه قبل التخفيض 84.50 ريالًا، فكم ريالًا وفّر خالد؟

A 50.70 ريالًا
B 44.50 ريالًا
C 33.80 ريالًا
D 32.62 ريالًا

52) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟

A 2
B $\frac{5}{2}$
C -1
D -2

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كل مما يأتي: (الدرس 2-6)

53) $x = -2 , x = 5$

54) $y = x + 2 , y = x - 4$

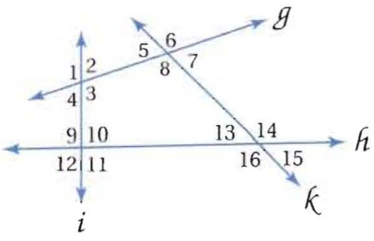
55) كرة قدم: رسم مصطفى الخطَّيْن الجانبيين لتخطيط ملعب لكرة القدم، ووضع علامات على أحدهما، بحيث كانت المسافة بين أي علامتين متتابعتين 9 أمتار. ثم أنشأ أعمدة عند هذه العلامات. فسِّر لماذا تكون هذه الأعمدة متوازية. (الدرس 2-5)

حدِّد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي: (الدرس 1-3)

56) إذا كان الرجل كهلًا، فإن عمره 40 سنة على الأقل.

57) إذا كان $2x + 6 = 10$، فإن $x = 2$.

استعد للدرس اللاحق



صنّف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين: (الدرس 2-1)

58) $\angle 5$ و $\angle 3$

59) $\angle 9$ و $\angle 4$

60) $\angle 11$ و $\angle 13$

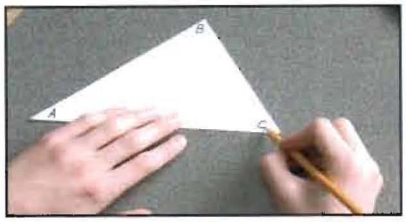
61) $\angle 1$ و $\angle 11$

3-2 زوايا المثلثات

سوف تجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث في هذا المعمل.

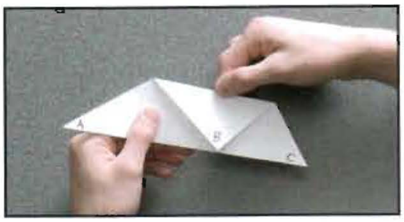
النشاط 1 الزوايا الداخلية للمثلث

الخطوة 1:



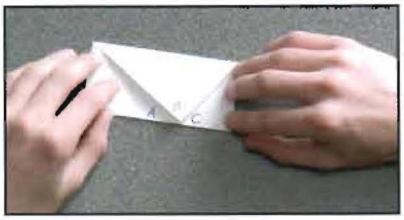
ارسم عدة مثلثات مختلفة ثم قصّها، وسمِّ رؤوس كل مثلث A , B , C .

الخطوة 2:



اطوِ الرأس B في كل مثلث على أن يكون خطُّ الطيّ موازيًا لـ AC. وأعِد تسمية الرأس B على الورقة بعد طيّها.

الخطوة 3:



اطوِ الرأسين A , C حتى يلتقيا مع الرأس B. أعدَ تسمية الرأسين A , C بعد الطيّ.

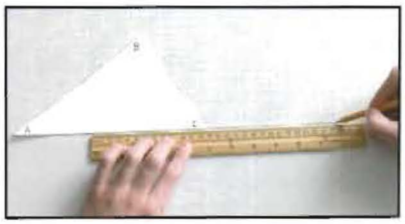
حلّل النتائج:

1) تُسمى الزوايا A , B , C زوايا داخلية في المثلث ABC . ما اسم الشكل الهندسي الناتج بعد التقاء الرؤوس A , B , C في الخطوة 3؟

2) خمِّن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في المثلث.

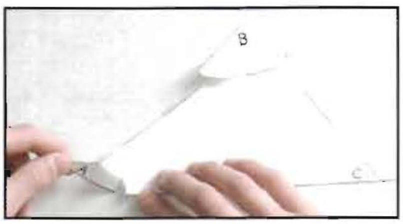
النشاط 2 الزوايا الخارجية للمثلث

الخطوة 1:



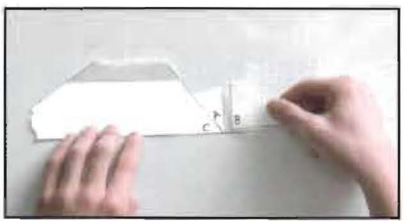
ابسط المثلثات التي استعملتها في النشاط 1 وضع كل مثلث على ورقة منفصلة. مُدّ $\overline{AC}$ كما في الشكل.

الخطوة 2:



افصل الزاويتين $\angle B$, $\angle A$ في كل مثلث.

الخطوة 3:



ضع $\angle B$, $\angle A$ على أن تشكّلا الزاوية المجاورة لِـ $\angle C$ كما في الشكل.

حلّل النتائج:

3) تُسمّى الزاوية المجاورة لـ $\angle C$ زاوية خارجية للمثلث ABC. خمِّن العلاقة بين الزاويتين $\angle B$, $\angle A$ من جهة، والزاوية الخارجية عند C.

4) كرِّر خطوات النشاط 2 بالنسبة للزاويتين الخارجيتين عند $\angle B$, $\angle A$ في كل مثلث.

5) خمِّن العلاقة بين قياس الزاوية الخارجية ومجموع قياسي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة لها.

3-2 زوايا المثلثات
Angles of Trangles

فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

والآن:

- أطبق نظرية مجموع زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات:

المستقيم المساعد
auxiliary line

الزاوية الخارجية
exterior angle

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

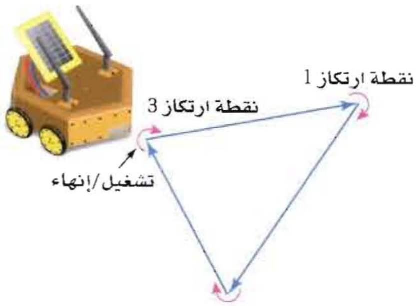
البرهان التسلسلي
flow proof

النتيجة
corollary

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمم الطلاب إنسانًا آليًا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمت برمجة هذا الإنسان الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على صورة مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف بها الإنسان الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.



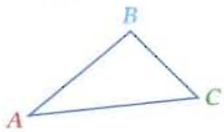
نظرية مجموع زوايا المثلث: تُعبر نظرية مجموع زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

نظرية 3.1 نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$.

مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$



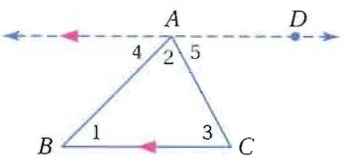
يتطلب برهان نظرية مجموع زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعِد. و**المستقيم المساعد** هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية. وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعِد يجب تبريرها.

برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

البرهان: ارسم من النقطة A المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لـ $\overline{BC}$.

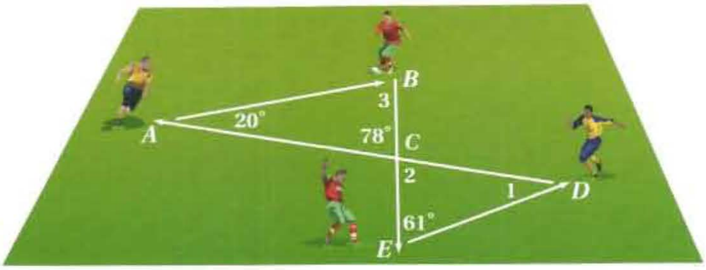


العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	**1)** مُعطى
2) $\angle BAD$, $\angle 4$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	**2)** تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle BAD$, $\angle 4$ متكاملتان.	**3)** الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180°$	**4)** تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	**5)** مسلّمة جمع الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	**6)** بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1,\ \angle 5 \cong \angle 3$	**7)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
8) $m\angle 4 = m\angle 1,\ m\angle 5 = m\angle 3$	**8)** تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	**9)** بالتعويض

يمكن استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة في المثلث إذا عُلم قياسا زاويتيه الأُخريين.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على التمريرات نفَّذها أربعة لاعبين.



افهم: تفحّص المعلومات المعطاة في الشكل أعلاه، تعرف قياسي زاويتين من زوايا أحد المثلثين وقياس زاوية واحدة من زوايا المثلث الآخر. وتعرف كذلك أن $\angle 2$, $\angle ACB$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسيْ الزاويتين الأُخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$. وعندها يمكنك إيجاد $\angle 1$ في $\triangle CDE$.

حُلّ:

$$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle 3 + 20° + 78° = 180°$$ بالتعويض

$$m\angle 3 + 98° = 180°$$ بالتبسيط

$$m\angle 3 = 82°$$ اطرح 98 من الطرفين

$\angle 2$, $\angle ACB$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78°$.

استعمل $m\angle 2$ و $\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180°$$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle 1 + 78° + 61° = 180°$$ بالتعويض

$$m\angle 1 + 139° = 180°$$ بالتبسيط

$$m\angle 1 = 41°$$ اطرح 139 من الطرفين

تحقّق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ مساويًا لـِ 180.

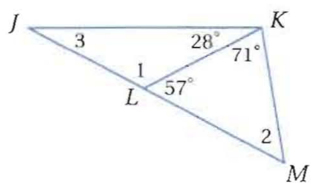
$\triangle ABC:\ m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82° + 20° + 78° = 180°$ ✓

$\triangle CDE:\ m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41° + 78° + 61° = 180°$ ✓

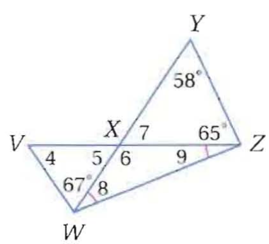
تحقق من فهمك

أوجد قياسات الزوايا المرقَّمة فيما يأتي:

(1A



(1B



الربط مع الحياة

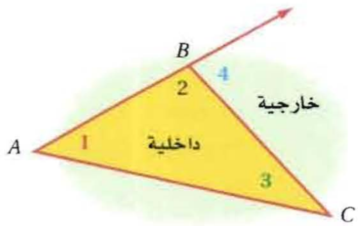
يدمج تمرين "مرِّر وتحرَّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير. حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على صورة مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

إرشادات للدراسة

تجزئة المسألة

تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كل منها بسهولة، مما يساعد على حلها. فمثلًا في المثال 1: عليك أن تجد أولًا $m\angle 2$ قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$.

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** تتشكل كل منها من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.



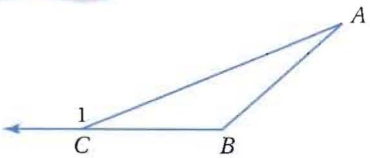
$\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$، وزاويتاها الداخليتان البعيدتان هما $\angle 3$ ، $\angle 1$.

نظرية 3.2 نظرية الزاوية الخارجية

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسيْ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

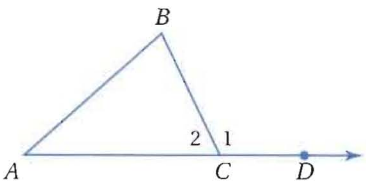


تستعمل في **البرهان التسلسلي** عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيِّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرِّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليّ كما يأتي.

البرهان نظرية الزاوية الخارجية

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



برهان تسلسلي:

$\triangle ABC$
معطى

$\angle 1, \angle 2$ زاويتان متجاورتان على مستقيم
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم

$\angle 1, \angle 2$ متكاملتان
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
تعريف الزاويتين المتكاملتين

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$
بالتعويض

$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
خاصية الطرح في المعادلات

قراءة الرياضيات

البرهان بالمخطط التسلسلي

يُسمّى البرهان التسلسلي أحيانًا البرهان بالمخطط التسلسلي.

إرشادات للدراسة

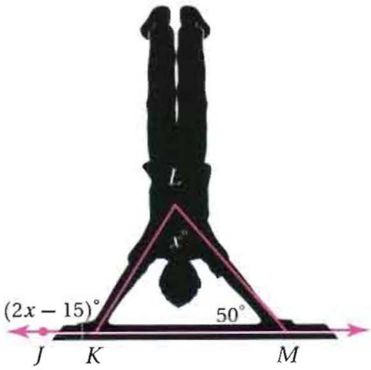
البرهان التسلسلي

يمكن أن يكتب البرهان التسلسليّ بصورةٍ رأسيّة أو أفقيّة.

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظرية الزاوية الخارجية

اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة:

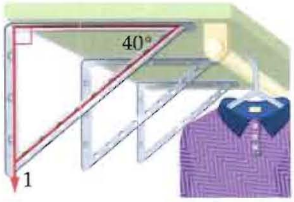


$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	بالتعويض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	أضف 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)° = 115°$.

تحقق من فهمك

2) تنظيم خزانة الملابس: تثبّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟



الربط مع الحياة

المدرب الخاص يعلّم مدربو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها. من المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.

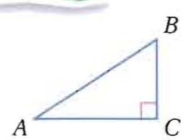
النتيجة هي نظرية يكون برهانها نتيجة مباشرة لنظرية أخرى. ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهان آخر أو حلّ أسئلة ذات علاقة. وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

نتيجتان — مجموع زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

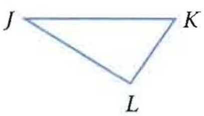
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان متتامتان.



3.2 يوجد زاوية قائمة واحدة أو منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة فإن $\angle J$, $\angle K$ زاويتان حادتان.



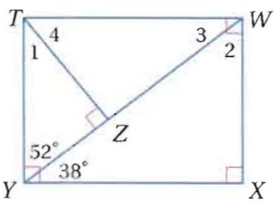
سوف تبرهن النتيجتين 3.2 , 3.1 في السؤالين 24 , 23.

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية
عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي °180.

مثال 3 — إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.



$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90°$	زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية
$m\angle 1 + 52° = 90°$	بالتعويض
$m\angle 1 = 38°$	اطرح 52 من الطرفين

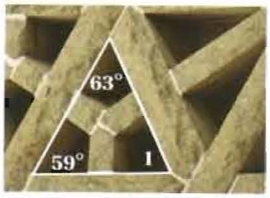
تحقق من فهمك

3A) $\angle 2$ **3B)** $\angle 3$ **3C)** $\angle 4$

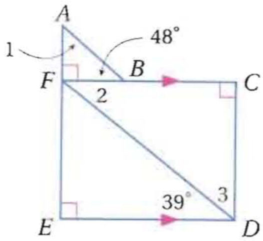
تأكــد

المثال 1 أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1



(2



المثال 2 **كراسي الشاطئ:** تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

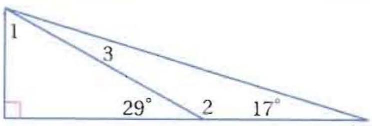
(3 $m\angle 4$

(4 $m\angle 6$

(5 $m\angle 2$

(6 $m\angle 5$

المثال 3 معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:



(7 $m\angle 1$

(8 $m\angle 3$

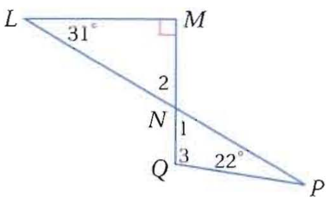
(9 $m\angle 2$

تدرب وحل المسائل

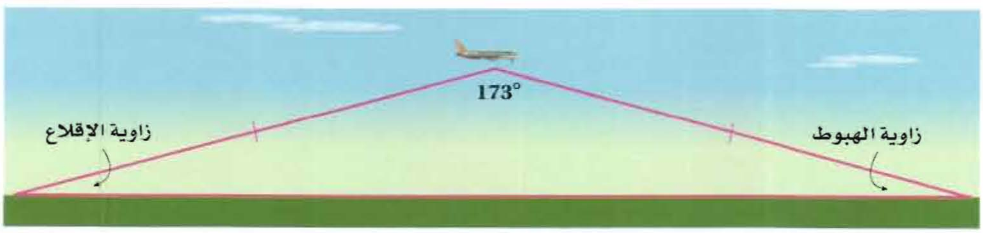
المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كل من السؤالين الآتيين:

(10

(11



(12 **طائرات:** يمكن تمثيل خطّ الطيران في رحلة ما باستعمال ضلعي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.

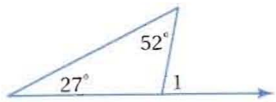


a) صنِّف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.

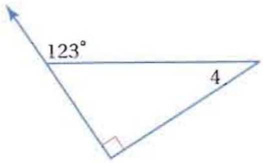
b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كل منهما.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

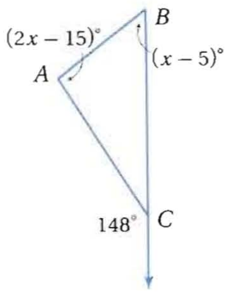
13) $m\angle 1$



14) $m\angle 4$



15) $m\angle ABC$



المثال 3 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

16) $m\angle 1$

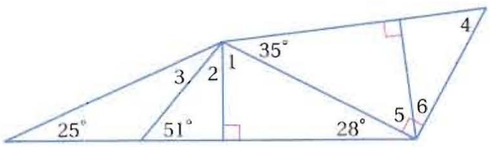
17) $m\angle 2$

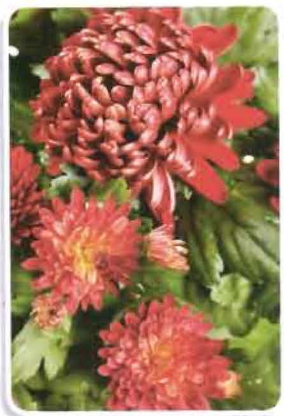
18) $m\angle 3$

19) $m\angle 4$

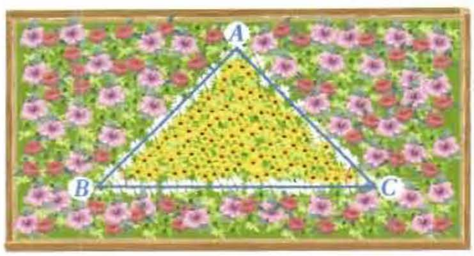
20) $m\angle 5$

21) $m\angle 6$





22) **بستنة:** استَنْبَتَ مهندس زراعيّ زهور أقحوان في حوض على صورة مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كل من $\angle B$, $\angle C$، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟



الربط مع الحياة

يصل طول ساق زهرة الأقحوان إلى 30in ، وتنقسم هذه النباتات إلى 13 صنفًا بحسب أشكال أزهارها.

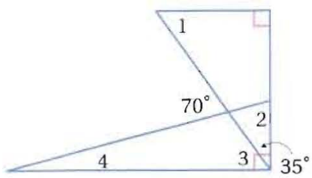
براهين: برهن كلًّا مما يأتي مستعملًا طريقة البرهان المذكورة.

23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي

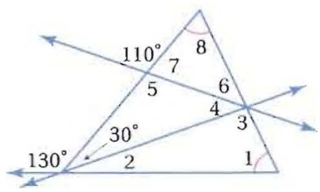
24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة فيما يأتي:

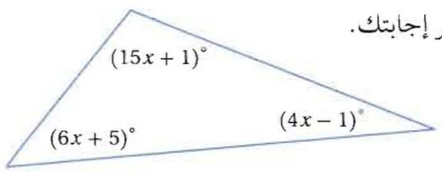
25)



26)



27) **جبر:** صنّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لزواياه. وفسّر إجابتك.



28) قرّر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأً، واذكر مثالًا مضادًا لها إذا كانت خطأً، ودعِّم استنتاجك إذا كانت صحيحة:

" إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90 ، فإن المثلث حادّ الزوايا ".

29) **سيارات:** انظر إلى الصورة المجاورة:

a) أوجد $m\angle 1 , m\angle 2$.

b) إذا كانت دعامة رفع غطاء السيارة أقصر من الدعامة التي تظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 1$ ؟ فسِّر إجابتك.

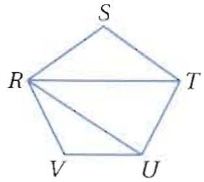
c) إذا كانت دعامة رفع غطاء السيارة أقصر من الدعامة التي تظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$ ؟ فسِّر إجابتك.

برهان: برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

30) برهان ذو عمودين

المعطيات: $RSTUV$ شكل خماسيّ.

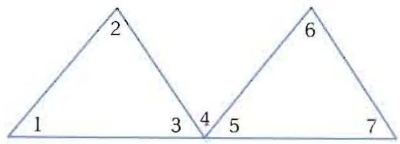
المطلوب: $m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV +$ $m\angle V + m\angle VRS = 540°$



31) برهان تسلسلي

المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 5$

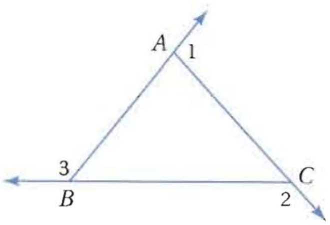
المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$



تنبيه!

قياس الزوايا
عند استعمال المنقلة لقياس زاوية ما، اجعل خطَّ التدريج 0 منطبقًا على أحد ضلعي الزاوية.

32) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.



a) **هندسيًّا:** ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمِّ الزوايا كما في الشكل المجاور. على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.

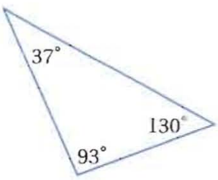
b) **جدوليًّا:** قِس الزوايا الخارجية لكل مثلث. وسجِّل القياسات ومجموعها لكل مثلث في جدول.

c) **لفظيًّا:** خمِّن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

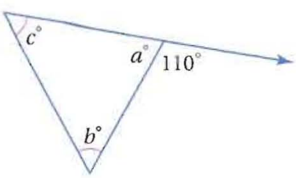
d) **جبريًّا:** عبِّر عن التخمين الذي وصلتَ إليه في الجزء c جبريًّا.

e) **تحليليًّا:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات التخمين الذي توصلتَ إليه.

مسائل مهارات التفكير العليا

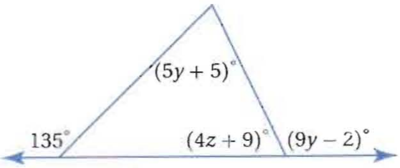


33) **اكتشف الخطأ:** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إنّ هناك خطأً في هذه القياسات. وضِّح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف توصّل عادل إلى هذه النتيجة.



34) **اكتب:** فسِّر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟

35) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كل من y, z في الشكل المجاور.



36) **تبرير:** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حادّ الزوايا أو قائم الزاوية أو منفرج الزاوية أو أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضح إجابتك.

تدريب على الاختبار المعياري

37) **جبر:** أي المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟

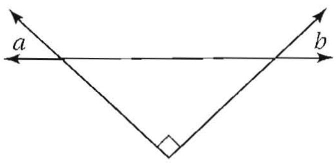
A $2x - 6 = 8$

B $22x - 6 = 8x$

C $-8x - 6 = 8x$

D $22x + 6 = 8x$

38) أي العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل أدناه؟



A $a + b < 90^\circ$

B $a + b > 90^\circ$

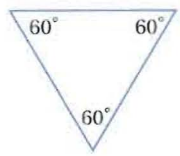
C $a + b = 90^\circ$

D $a + b = 45^\circ$

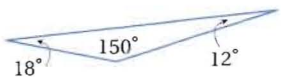
مراجعة تراكمية

صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: (الدرس 3-1)

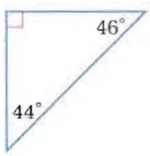
39)



40)



41)



هندسة إحداثية: أوجد المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ في كل من السؤالين الآتيين. (الدرس 3-2)

42) يمرّ المستقيم ℓ بالنقطتين $(1, 3)$, $(0, -2)$، وإحداثيا النقطة P هما $(-4, 4)$.

43) يمرّ المستقيم ℓ بالنقطتين $(3, 0)$, $(-3, 0)$، وإحداثيا النقطة P هما $(4, 3)$.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

44) $\angle 1 \cong \angle 1 , \overline{AB} \cong \overline{AB}$

45) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

46) إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 2 , \angle 2 \cong \angle 3$، فإن $\angle 4 \cong \angle 3$.

3-3 المثلثات المتطابقة
Congruent triangles

فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

والآن:

- أُسمّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أُثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

المفردات

التطابق
Congruent

المضلعات المتطابقة
Congruent Polygons

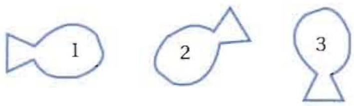
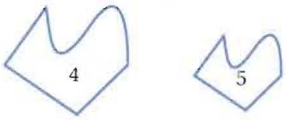
العناصر المتناظرة
Corresponding Parts

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق تمامًا شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما **متطابقان**.

متطابقة	غير متطابقة
	
الأشكال 3 ,2 ,1 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.	الشكلان 5 ,4 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.

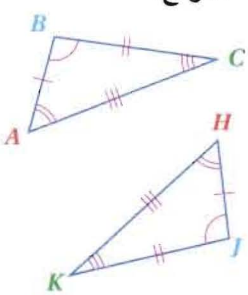
في أي **مضلعين متطابقين** تتطابق **العناصر المتناظرة**. وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع.

مفهوم أساسي — تعريف المضلعات المتطابقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

نموذج:



مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\quad$ $\angle B \cong \angle J$ $\quad$ $\angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\quad$ $\overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\quad$ $\overline{CA} \cong \overline{KH}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

هناك عباراتُ تطابقٍ أخرى للمثلثين أعلاه. وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

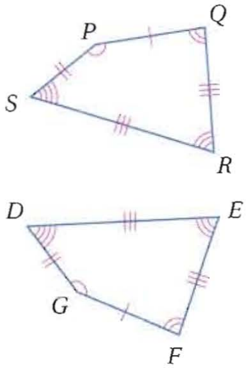
$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

عبارة غير صحيحة

$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

مثال 1 تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

بيّن أنّ المضلعين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.



الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$

$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

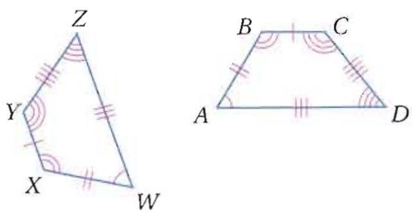
الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$

$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

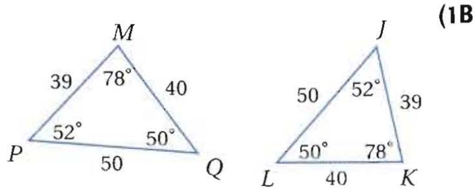
وبما أنّ جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة، فإنّ المضلع $PQRS \cong$ المضلع $GFED$.

تحقق من فهمك

1A)



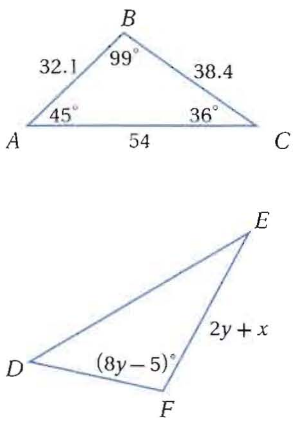
1B)



أداة الربط "إذا وفقط إذا" التي وردت في تعريف المضلعات المتطابقة تعني أن كلًّا من العبارة الشرطيّة وعكسها صحيحتان؛ لذا إذا كان المضلعان متطابقين، فإنّ عناصرهما المتناظرة متطابقة. وفي المثلثات نقول: إن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة.

مثال 2 تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

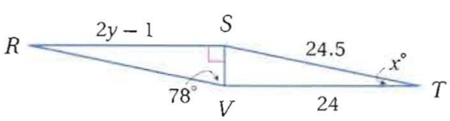
في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كل من x, y .



$\angle F \cong \angle B$	العناصر المتناظرة متطابقة
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	بالتعويض
$8y = 104$	بإضافة 5 إلى الطرفين
$y = 13$	بقسمة الطرفين على 8
$FE \cong BC$	العناصر المتناظرة متطابقة
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	بالتعويض
$2(13) + x = 38.4$	بالتعويض
$26 + x = 38.4$	بالتبسيط
$x = 12.4$	بطرح 26 من الطرفين

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$، فأوجد قيمة كل من x, y .



تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك جاوس (1777م – 1855م)

قدّم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتّى ولو كانا مختلفين شكلًا. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهانًا للنظرية الأساسية في الجبر.

إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق

يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.

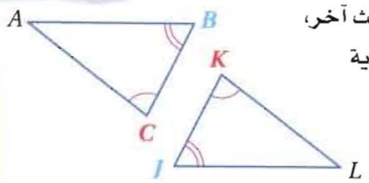
$\triangle ABC \cong \triangle DFE$

$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2–3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.3 نظريّة الزاوية الثالثة

أضف إلى مطويتك

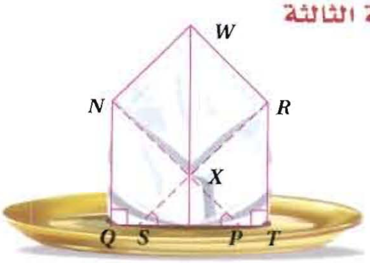


التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإنّ الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كانت $\angle B \cong \angle J$ ، $\angle C \cong \angle K$ ، فإنّ $\angle L \cong \angle A$.

ستبرهن هذه النظرية في السؤال 17.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية الزاوية الثالثة



تنظيم الحفلات: قرّر منظمو حفلة مدرسيّة أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه. إذا كانت: $\angle NPQ \cong \angle RST,\ m\angle NPQ = 40°$ ، فأوجد $m\angle SRT$.

بما أنّ $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة $(\angle NQP \cong \angle RTS)$ ، فإنّ $\angle QNP \cong \angle SRT$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle SRT$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90°$ الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان

$m\angle QNP + 40° = 90°$ بالتعويض

$m\angle QNP = 50°$ بطرح °40 من الطرفين

وبالتعويض فإن $m\angle SRT = m\angle QNP = 50°$.

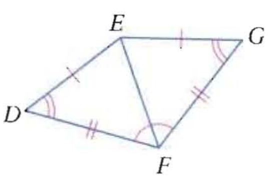
تحقق من فهمك

3) في الشكل أعلاه إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$، وكان $\overline{WX}$ منصِّفًا لـ $\angle NXR$ ، وكان $m\angle NXW = 49°$ ، $m\angle WNX = 88°$ ، فأوجد $m\angle NWR$. وفسِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسة من الجمال والأناقة لأي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

مثال 4 إثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$
$\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

البرهان:

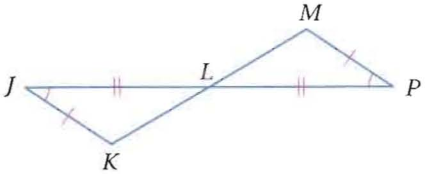
العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$	**1)** معطيات
2) $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	**2)** خاصية الانعكاس للتطابق
3) $\angle D \cong \angle G,\ \angle DFE \cong \angle GFE$	**3)** معطيات
4) $\angle DEF \cong \angle GEF$	**4)** نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	**5)** تعريف المضلعات المتطابقة

إرشادات للدراسة

خاصيّة الانعكاس
عندما يشترك مثلثان في ضلع، فاستعمل خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

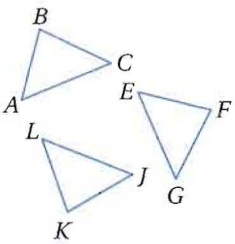
$\overline{JL} \cong \overline{PL}$ ، L تنصف $\overline{KM}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدٍّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

النظرية 3.4 خصائص تطابق المثلثات

أضف إلى مطويتك



خاصيّة الانعكاس للتطابق

$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ ، فإنّ $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

خاصيّة التعدّي للتطابق

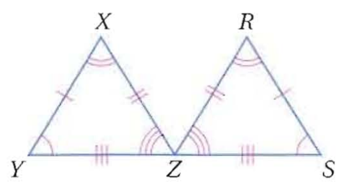
إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG, \triangle EFG \cong \triangle JKL$ ، فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

ستبرهن عناصر هذه النظرية في الأسئلة 21 ، 20 ، 18

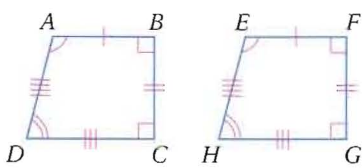
تأكد

المثال 1 في كل من السؤالين الآتيين، بيّن أنّ المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق:

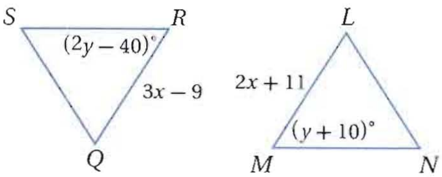
1)



2)



المثال 2 في الشكلين المجاورين، إذا كان $\triangle LMN \cong \triangle QRS$ فأوجد:

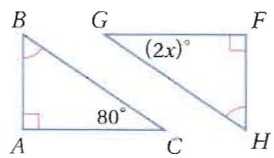


3) قيمة x.

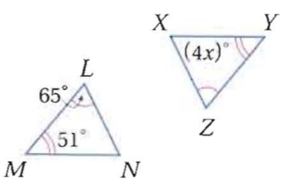
4) قيمة y.

المثال 3 في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x، وفسِّر إجابتك.

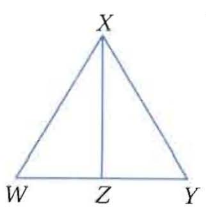
5)



6)



المثال 4 7) **برهان:** اكتب برهانًا حرًا.



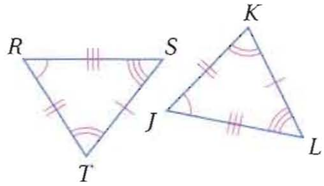
المعطيات: $\angle WXZ \cong \angle YXZ, \angle XZW \cong \angle XZY, \overline{WX} \cong \overline{YX}, \overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

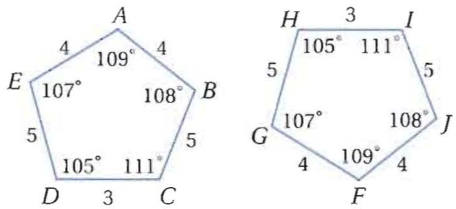
تدرب وحل المسائل

المثال 1 في كل من السؤالين الآتيين، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق.

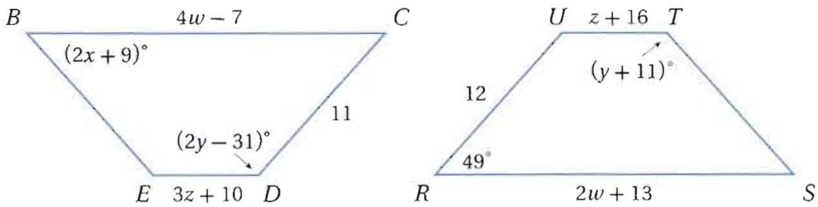
8)



9)



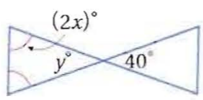
المثال 2 إذا كان المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:



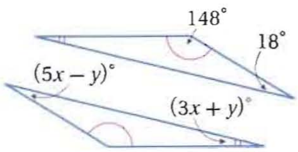
10) x **11)** y **12)** z **13)** w

المثال 3 أوجد قيمة كل من x, y في الأسئلة الآتية:

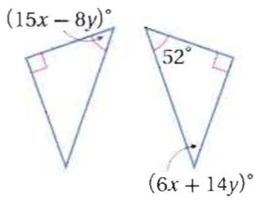
14)



15)



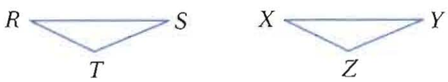
16)



المثال 4 **17)** **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 3.3.

18) **برهان:** رتّب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيبًا صحيحًا. وقدّم تبريرًا لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)



المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

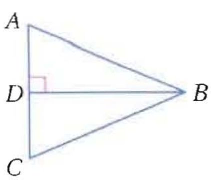
البرهان:

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T, \overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y, \angle T \cong \angle Z, \overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ}, \overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
?	?	?	?

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\overline{BD}$ تنصّف $\angle B$.
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$



برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

20) تطابق المثلثات علاقة تعدٍّ. (برهان حرّ)

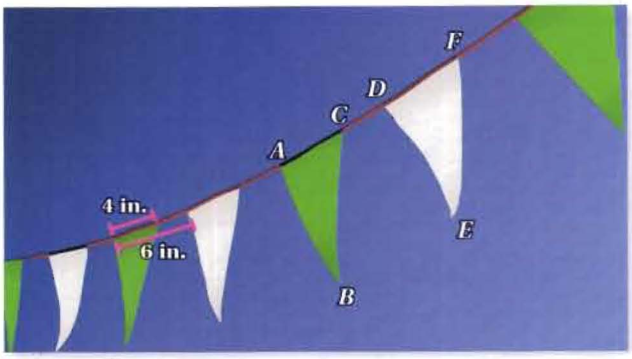
21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي)

جبر: ارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين في كل من السؤالين الآتيين وسمِّه، ثم أوجد قيمة x, y:

22) $\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7, BC = 25, AC = 11 + x, DF = 3x - 13, DE = 2y - 5$

23) $\triangle LMN \cong \triangle RST, m\angle L = 49°, m\angle M = (10y)°, m\angle S = 70°, m\angle T = (4x + 9)°$

24) **رايات:** في مهرجان رياضي كان سعيد مسؤولًا عن إحاطة منطقة مساحتها 100 قدم مربّعةٍ مخصصة لجلوس المُعلقين والإعلاميين فاستعمل حبلًا وثبّت عليه رايات على صورة مثلثات متطابقة، كل منها متطابق الضلعين.



a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

b) إذا كانت المنطقة التي أحاطها سعيد بحبل الرايات مربّعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟

25) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:

a) **لفظيًا:** اكتب عبارة شرطيّة تمثل العلاقة بين مساحتي مثلثين متطابقين.

b) **لفظيًا:** اكتب عكس عبارتك الشرطيّة. وهل العبارة العكسيّة صحيحة أم خطأ؟ وضّح تبريرك.

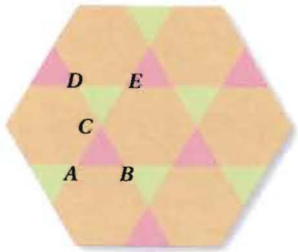
c) **هندسيًا:** ارسم - إنْ أمكن - مثلثين متطابقي الأضلاع لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين. وإذا كان ذلك غير ممكن فوضّح السبب.

d) **هندسيًا:** ارسم - إنْ أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها ولكنّهما غير متطابقين. وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

e) **هندسيًا:** ارسم - إنْ أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها ولكنّهما غير متطابقين. وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

f) **لفظيًا:** اكتب عبارة شرطية تبين العلاقة بين مساحتي مضلعين منتظمين متطابقين، ثم اكتب عكسها.

26) **أنماط:** صُمِّم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.



a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استعملا في التصميم؟

b) سمِّ زوجًا من المثلثات المتطابقة.

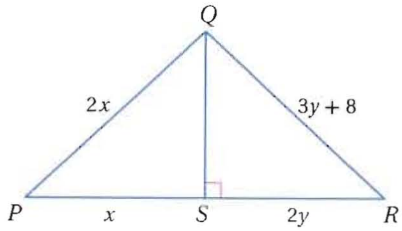
c) سمِّ زوجًا من الزوايا المتطابقة.

d) إذا كان $CB = 2$ in ، فكم يكون AE؟ وضح إجابتك.

e) ما قياس $\angle D$؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **تحدٍ:** إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. فأوجد قيمة كلٍّ من x, y.

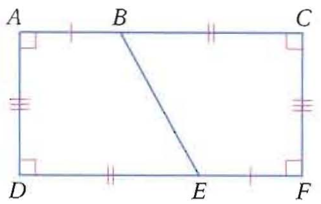


تبرير: **حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأً. وإذا كانت خطأً، فأعطِ مثالاً مضادًا. أما إذا كانت صحيحة، فوضح إجابتك.**

28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة فإنّ المثلثين متطابقان.

29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان.

30) **تحدٍ:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.



31) **اكتب:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين"

تدريب على الاختبار المعياري

32) إذا علمت أن المثلث ABC يطابق $\triangle HIJ$ ، ورؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-1, 2), B(0, 3), C(2, -2)$ ، فما طول الضلع HJ ؟

A 5 **C** $\sqrt{2}$

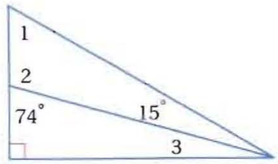
B $\sqrt{29}$ **D** 25

33) **جبر:** أيّ مما يأتي عامل لـ $x^2 + 19x - 42$؟

A $x + 14$ **C** $x - 2$

B $x + 2$ **D** $x - 14$

مراجعة تراكمية



في الشكل المجاور أوجد كلًا من القياسات الآتية: (الدرس 2-3)

34) $m\angle 2$

35) $m\angle 1$

36) $m\angle 3$

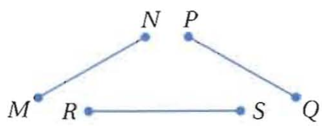
37) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$،
وصنّفه وفقًا لأطوال أضلاعه: (الدرس 1-3)

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا: (الدرس 5-1)

38) تكون الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم متكاملتين.

39) إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإن إحداهما منفرجة.

استعد للدرس اللاحق



40) انقل البرهان الآتي وأكمله:

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ____؟____	a) معطيات
b) $MN = PQ, PQ = RS$	b) ____؟____
c) ____؟____	c) ____؟____
d) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

3-4

إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS
Proving Triangles Congruent-SSS, SAS

فيما سبق:

إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

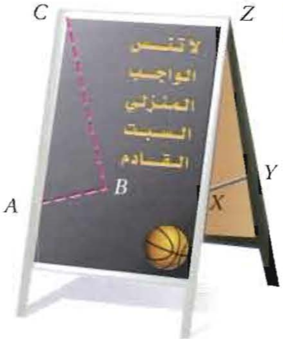
والآن:

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.

المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

تُعدّ السبورة المزدوجة على صورة الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنّها تكون ثابتةً تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

مسلمة SSS: ستكتشف في هذا الدرس أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبيّن السبورة المزدوجة أنّه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنصّ عليه المسلمة الآتية:

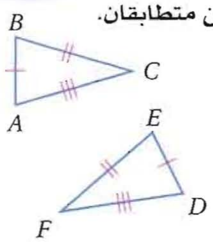
مسلمة 3.1 التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

أضف إلى مطويتك

إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

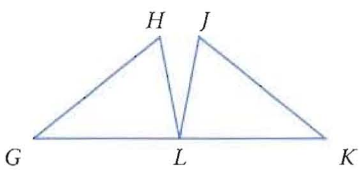
مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



مثال 1 استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ ، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:

$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$
معطى

$\overline{HL} \cong \overline{JL}$
معطى

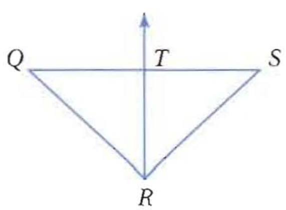
L هي نقطة منتصف $\overline{GK}$
معطى

$\overline{GL} \cong \overline{KL}$
نظرية نقطة المنتصف

$\triangle GHL \cong \triangle KJL$
SSS

تحقق من فهمك

1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.
$\overline{RT}$ تنصّف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

مثال 2 على اختبار معياري

إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$. ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

a) مثّل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

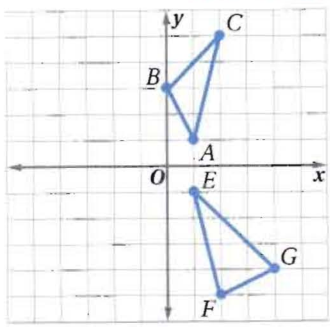
c) اكتب برهانًا منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

يُطلب إليك في هذه المسألة عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلًّا من $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ في مستوى إحداثي واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أم لا اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليك في الجزء c أن تثبت صحّة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

a)



b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمن أنهما ليسا متطابقين.

c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

وبما أن $AB = FG, AC = EF$, على حين أن $BC \neq EG$. فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

قراءة الرياضيات

الرموز

تقرأ العبارة $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ المثلث ABC لا يطابق المثلث EFG.

تحقق من فهمك

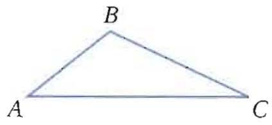
2) إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5), K(1, 1), L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي $N(-3, 0), P(-7, 1), Q(-4, 4)$.

A) مثّل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

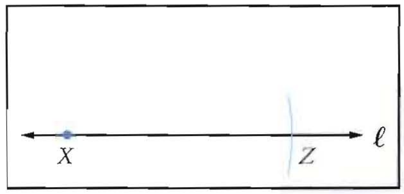
B) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

C) اكتب برهانًا منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء **B**.

إنشاء هندسي: إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال الأضلاع (SSS)

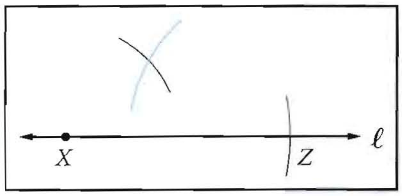


ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SSS لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

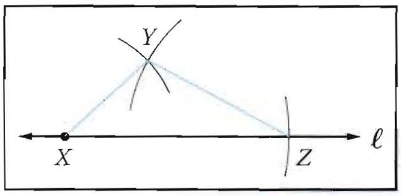


الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم ℓ. ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة A، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها ركز رأس الفرجار في X وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ وسم نقطة التقاطع Z.

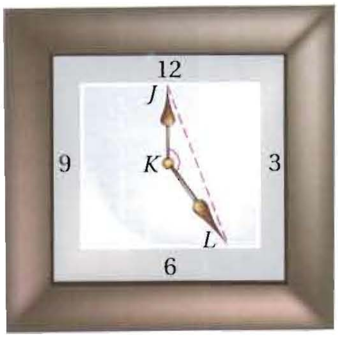


الخطوة 2 أنشئ قوسًا طول نصف قطره AB، ومركزه X، وقوسًا آخر طول نصف قطره BC، ومركزه Z .



الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين Y . وارسم $\overline{XY}, \overline{ZY}$ لتشكل $\triangle XYZ$.

المسلمة SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمّل الزاوية المحصورة JKL والمتكونة من عقربي الساعة الأولى. وكلما شكّل العقربان زاوية لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفي العقربين $\overline{PR}$, $\overline{JL}$ متساويتين.



$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

أي مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

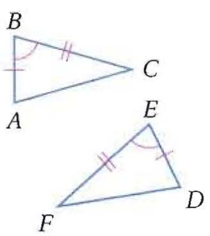
مسلمة 3.2

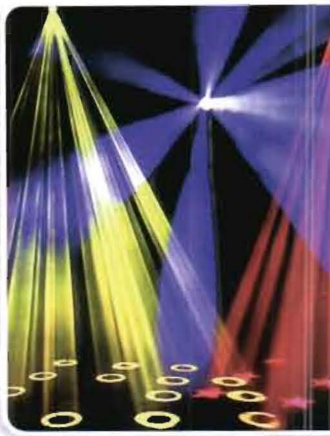
أضف إلى مطويتك

التطابق بضلع - زاوية - ضلع (SAS)

التعبير اللفظي: **إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.**

مثال: **إذا كان** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

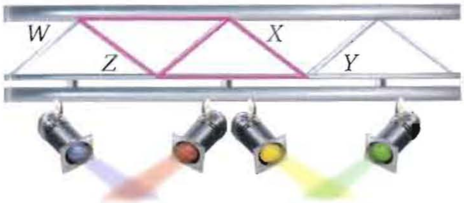




الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة يقوم فنيو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات

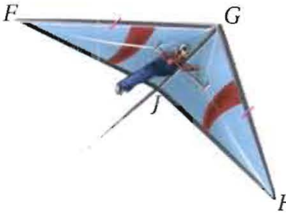


إضاءة: تبدو دعامات السقّالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنّها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WZ} \cong \overline{YX}, \overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ، فاكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WZ} \cong \overline{YX}$	**1)** معطى
2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	**2)** معطى
3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$	**3)** نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	**4)** خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	**5)** SAS

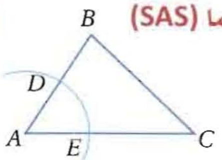
تحقق من فهمك



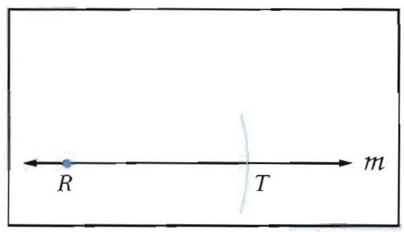
3) رياضة: يبدو جناحا الطائرة الشراعية في الصورة المجاورة أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$ ، فأثبت أنّ $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

يمكنك أيضًا أن تنشئ مثلثات متطابقة إذا عُلم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

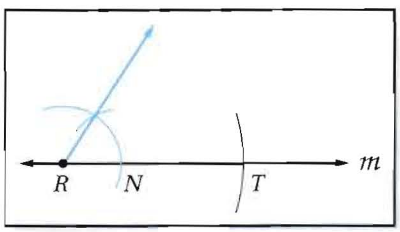
إنشاء هندسي إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS)



ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

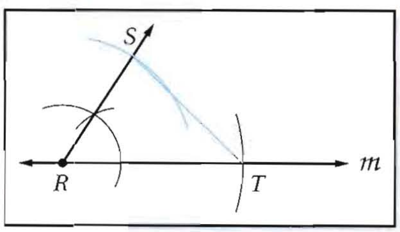


الخطوة 1: عيِّن النقطة R على المستقيم m . ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m .



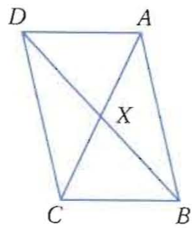
الخطوة 2: أنشئ $\angle R \cong \angle A$ ، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعًا للزاوية، والنقطة R رأسًا لها كما يأتي:

- ضع رأس الفرجار على النقطة A ، وارسم قوسًا يقطع ضلعي $\angle A$. سمِّ نقطتي التقاطع D, E .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوسًا يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمِّ نقطة التقاطع N .
- ضع رأس الفرجار عند E وعدِّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N ، وارسم قوسًا يقطع القوس الذي رسمته سابقًا.



الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.

مثال 4 استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين



اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يلي.

المعطيات: X منتصف $\overline{BD}$

و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

البرهان:

X هي منتصف $\overline{DB}$ (معطى) ← $\overline{DX} \cong \overline{BX}$ (نظرية نقطة المنتصف) ← $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

X هي منتصف $\overline{AC}$ (معطى) ← $\overline{CX} \cong \overline{AX}$ (نظرية نقطة المنتصف) ← $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

$\angle DXC \cong \angle BXA$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان) ← $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

$\triangle DXC \cong \triangle BXA$ (SAS)

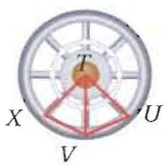
إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية

يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًّا أو أفقيًّا.

تحقق من فهمك

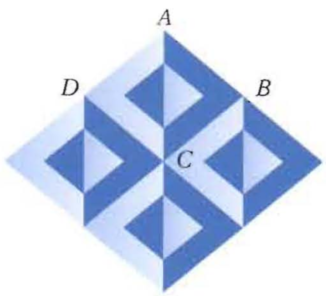
4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ و $\angle XTV \cong \angle UTV$، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.



تأكد

المثال 1

1) **الخداع البصري:** الشكل $ABCD$ مربع، فيه $AB = CD$, $DA = BC$. والمربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكّل النمط.



a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استُعملت لعمل هذا النمط؟

b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

المثال 2

2) **إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-3, -5)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, -5)$. ورؤوس $\triangle XYZ$ هي $X(5, -5)$, $Y(3, -1)$, $Z(3, -5)$.

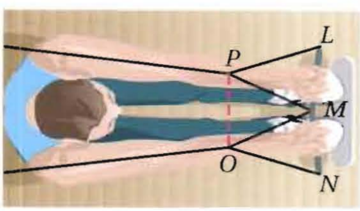
a) مثّل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع **b**.

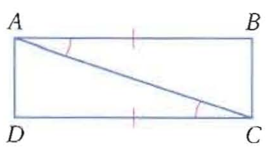
المثال 3

3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان $\angle LPM \cong \angle NOM$, $\overline{LP} \cong \overline{NO}$، $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.



المثال 4

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}, \angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

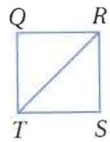
تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المذكور في كل من السؤالين الآتيين:

5) برهان حرّ

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, $\overline{ST} \cong \overline{QT}$

المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

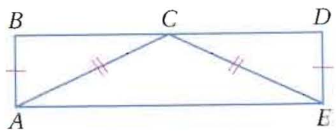


6) برهان ذو عمودين

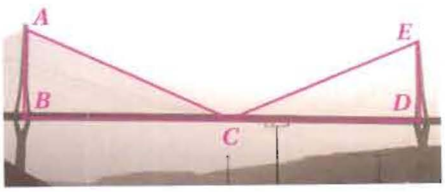
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$

$\overline{AC}$ تنصّف $\overline{BD}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله 763 مترًا، وهو مثبت بحبال معدنيّة معلقة بِدعامتين خرسانيتين. فإذا كان ارتفاع الدعامتين فوق الطريق العلوية هو نفسه، وكانتا عموديتين على الطريق، ويلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في نقطة عند منتصف المسافة بين الدعامتين، فأثبت أن المثلثين المبيّنين في الصورة المجاورة متطابقان.



المثال 2 **حدّد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ في كل من السؤالين الآتيين، ووضّح إجابتك:**

8) $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$

9) $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3)$

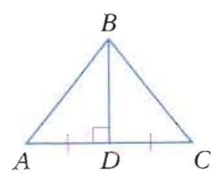
المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين:

10) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,

$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

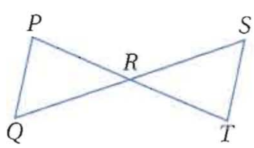
المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



11) برهان حرّ

المعطيات: R نقطة المنتصف لكل من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$

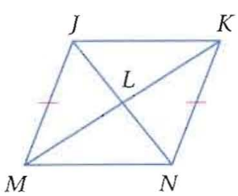
المطلوب: $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$



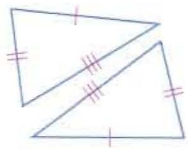
المثال 4 **12)** **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًا

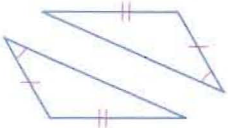
المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ؛ L نقطة المنتصف لكل من $\overline{JN}$, $\overline{KM}$

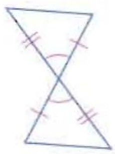
المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$



حدّد المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أنّ المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقان. وإذا كانا غير متطابقين، فاكتب " غير ممكن ".

13) 

14) 

15) 

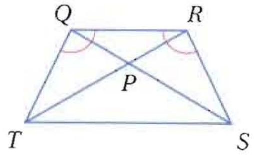
16) **إشارة تحذيرية:** استعمل الشكل المجاور.

a) حدّد المجسم الذي تمثّله إشارة التحذير.

b) إذا كان $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، فأثبت أنّ $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟

17) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًا.

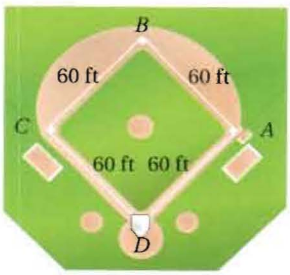


المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$

18) في الشكل المجاور؛ $ABCD$ مربع.



a) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $BD = AC$.

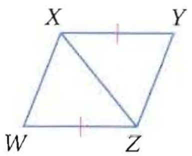
b) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّ $\angle BDC \cong \angle BDA$.

إرشادات للدراسة

الأشكال

عند كتابة البراهين أو حل المسائل التي تتضمن مثلثات متطابقة، من المفيد أن ترسم شكلاً خاصًا بك، وتعيّن عليه الأضلاع والزوايا المتطابقة التي تجدها.

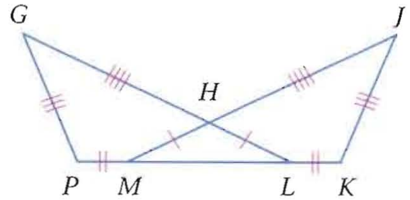
19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

المطلوب: $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$

20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.



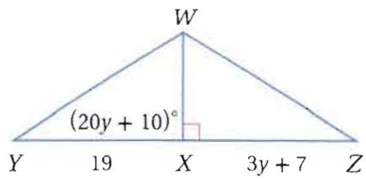
المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{HM}$, $\overline{PM} \cong \overline{KL}$,

$\overline{PG} \cong \overline{KJ}$, $\overline{GH} \cong \overline{JH}$

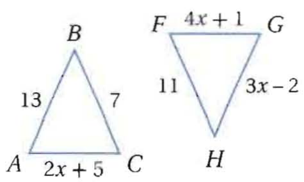
المطلوب: $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين، وفسّر إجابتك:

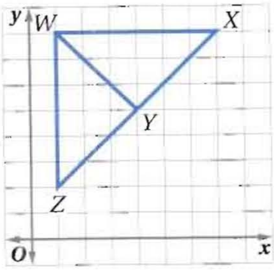
21) $\triangle WXY \cong \triangle WXZ$



22) $\triangle ABC \cong \triangle FGH$



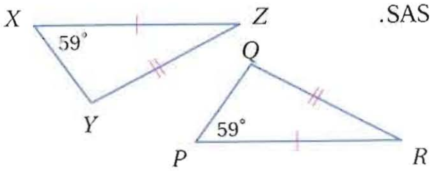
مسائل مهارات التفكير العليا



23) **تحدٍ:** في الشكل المجاور:

a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أنّ $\triangle WYZ$ يطابق $\triangle WYX$. علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأيّ طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.

b) أثبت أن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ ووضّح إجابتك.

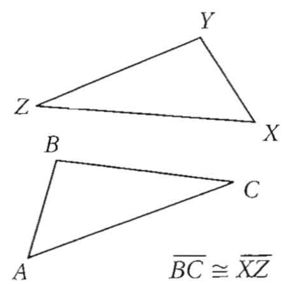


24) **اكتشف الخطأ:** قال أحمد: إنّ $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$ بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

25) **اكتب:** إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

تدريب على الاختبار المعياري

26) في الشكلين المجاورين، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$. ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟



A $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

B $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

C $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$

D $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

27) إذا كان $-2a + b = -7$، فما قيمة a إذا علمت أن $b = -1$؟

A -1

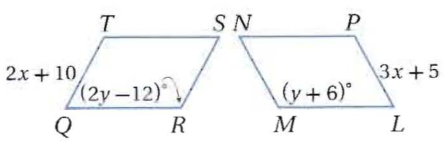
B 2

C 3

D 4

مراجعة تراكمية

في الشكلين المجاورين، إذا علمت أن $\square QRST \cong \square LMNP$، فأوجد: (الدرس 3-3)



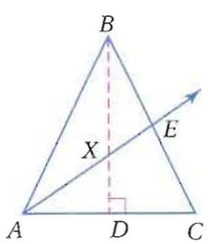
28) قيمة x.

29) قيمة y.

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة: "الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان". وحدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا. (الدرس 1-3)

استعد للدرس اللاحق

إذا علمت أن $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:



31) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{EC}$

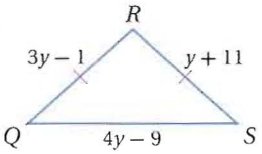
32) زاوية تطابق $\angle ABD$

33) زاوية تطابق $\angle BDC$

34) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{AD}$

1) هندسة إحداثية: صنّف $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-2, -1), B(-1, 3), C(2, 0)$ إلى مختلف الأضلاع أو متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين. (الدرس 3-1)

2) اختيار من متعدد: أيّ مما يأتي يمثل أطوال أضلاع المثلث المتطابق الضلعين QRS؟ (الدرس 3-1)



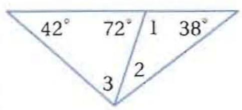
A 17, 17, 15

B 15, 15, 16

C 14, 15, 14

D 14, 14, 16

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)

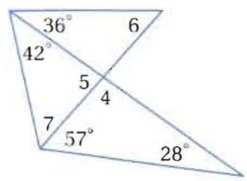


3) $m\angle 1$

4) $m\angle 2$

5) $m\angle 3$

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)



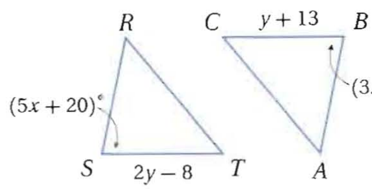
6) $m\angle 4$

7) $m\angle 5$

8) $m\angle 6$

9) $m\angle 7$

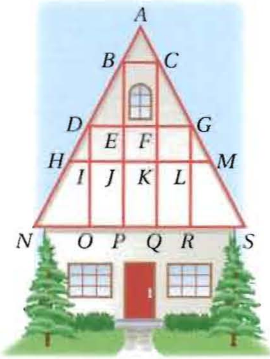
في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد: (الدرس 3-3)



10) قيمة x.

11) قيمة y.

12) فن العمارة: يبيّن الشكل المجاور بيتًا واجهته على صورة الحرف A. وتظهر عليه نقاط مختلفة. افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو أنها متطابقة هي متطابقة فعلاً. اكتب المثلثات المتطابقة. (الدرس 3-3)



13) اختيار من متعدد: إذا كان $\triangle CBX \cong \triangle SML$، فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟ (الدرس 3-3)

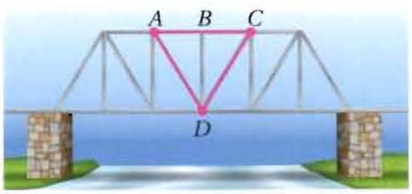
A $\overline{MO} \cong \overline{SL}$

B $\overline{XC} \cong \overline{ML}$

C $\angle X \cong \angle S$

D $\angle XCB \cong \angle LSM$

14) جسور: يُظهر الجسر في الشكل أدناه أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$، وأن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات أنّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$؟ (الدرس 3-4)



حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

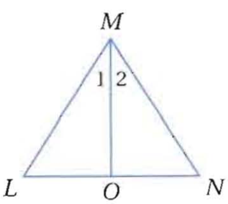
15) $P(3, -5), Q(11, 0), R(1, 6), X(5, 1), Y(13, 6), Z(3, 12)$

16) $P(-3, -3), Q(-5, 1), R(-2, 6), X(2, -6), Y(3, 3), Z(5, -1)$

17) اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\triangle LMN$ متطابق الضلعين. فيه، $\overline{LM} \cong \overline{NM}$ ، $\overline{MO}$ تنصّف $\angle LMN$.

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS
Proving Triangles Congruent - ASA, AAS

فيما سبق:

درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SSS , SAS .

والآن:

- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.

المفردات:

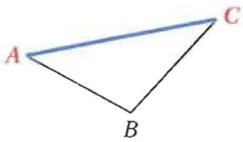
الضلع المحصور
Included Side

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، وكلّ منهم يدفع مجدافًا. ويتطلب السباق عادة مسطّحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل. ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة. مثل طول مضمار سباق الزوارق.

المسلّمة ASA: يُسمى الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلع **الضلع المحصور**.
ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$, $\angle C$.



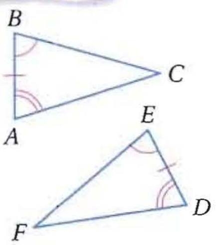
مسلمة 3.3

أضف إلى مطويتك

التطابق بزاوية - ضلع - زاوية (ASA)

إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

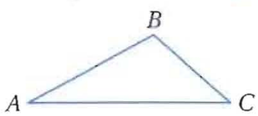
مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



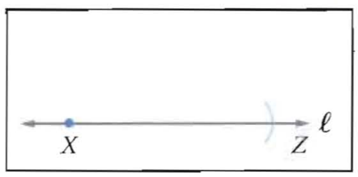
إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال زاويتين والضلع المحصور (ASA)

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلّمة ASA لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

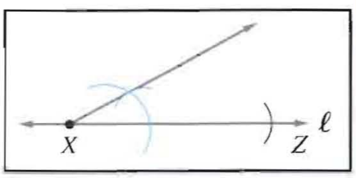


الخطوة 1:



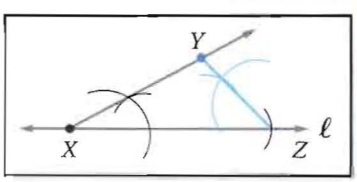
ارسم مستقيمًا ℓ، واختر عليه نقطة X. وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2:



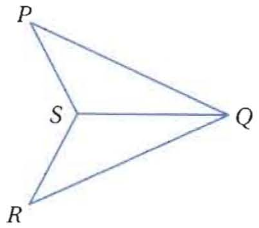
أنشئ زاوية مطابقة لِـ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية.

الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لِـ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية. وسمِّ نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.

مثال 1 استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$

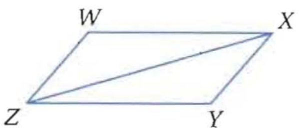
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	**(1** معطيات
(2 $\angle PQS \cong \angle RQS$	**(2** تعريف منصّف الزاوية
(3 $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	**(3** خاصية الانعكاس للتطابق
(4 $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	**(4** ASA

تحقق من فهمك



(1 اكتب برهاناً حرًّا.

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصّف $\angle WZY$، $\overline{XZ}$ تنصّف $\angle YXW$.

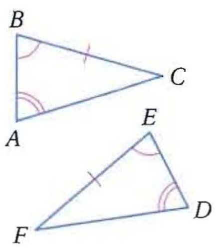
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$

النظريّة AAS: تطابقُ زاويتين وضلع غير محصور يكفي لإثبات أنّ المثلثين متطابقان. وتُعدّ علاقة التطابق هذه نظرية؛ لأنه يمكن إثبات صحتها باستعمال نظرية الزاوية الثالثة.

نظريّة 3.5 التطابق بزاوية - زاوية - ضلع (AAS)

أضف إلى مطويتك

إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



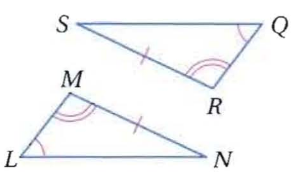
مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle D,$

$\angle B \cong \angle E,$

$\overline{BC} \cong \overline{EF},$

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

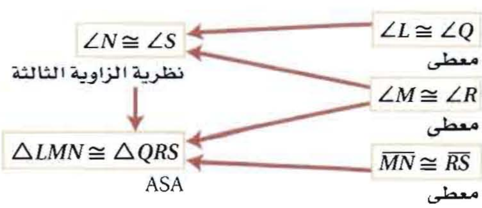
برهان نظرية التطابق بزاوية - زاوية - ضلع (AAS)



المعطيات: $\angle L \cong \angle Q, \angle M \cong \angle R, \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:

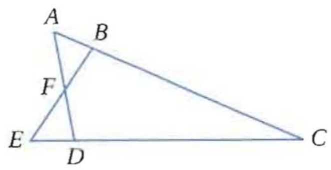


إرشادات للدراسة

ضلع - ضلع - زاوية

طولا ضلعين وقياس زاوية غير محصورة لايكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.

مثال 2 استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا حرًا.

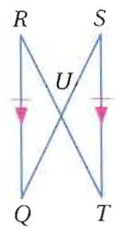
المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$, $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن $\angle DAC \cong \angle BEC, \overline{DC} \cong \overline{BC}$ ، وأن $\angle C \cong \angle C$ بحسب خاصية الانعكاس، فإن $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ بحسب النظرية AAS .

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا تسلسليًا:



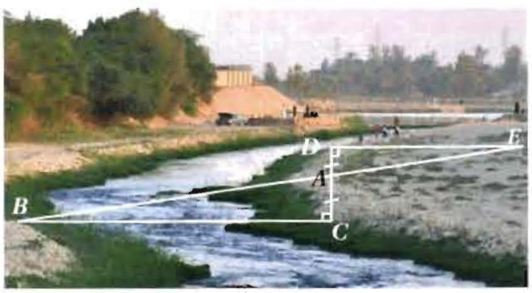
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال تطابق المثلثات في حساب مسافات يصعب قياسها مباشرة

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين C , B. فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطةً مرجعية بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين C , B.



لتحديد طول $\overline{CB}$ ، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن $\overline{CD}$ عمودية على كل من $\overline{CB}, \overline{DE}$ كما هو مبيّن في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة. لذا $\angle BCA \cong \angle EDA$.
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
- $\angle BAC, \angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس فهما متطابقتان. وبحسب ASA ينتج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$.

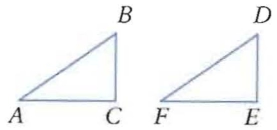
وبما أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{CB}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول $\overline{DE}$ يساوي 8 ft فإن طول $\overline{CB}$ يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين C, B .

إرشادات للدراسة

زاوية - زاوية - زاوية

$\angle B, \angle E$ في المثال 3 متطابقتان بحسب نظرية الزاوية الثالثة. إن تطابق الزوايا الثلاث المتناظرة غير كاف لإثبات تطابق مثلثين.

تحقق من فهمك



3) في المثلثين المجاورين:

$\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overline{FE} \perp \overline{DE}, \angle BAC \cong \angle DFE, \overline{AB} \cong \overline{FD}$

اكتب برهانًا حرًّا يبيّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

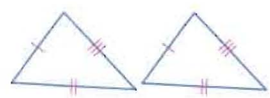
تعلمت طرائق عديدة لإثبات تطابق المثلثات.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

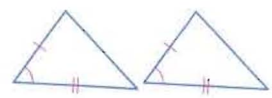
إثبات تطابق المثلثات

SSS



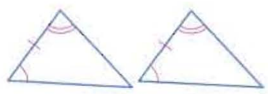
الأزواج الثلاثة من الأضلاع المتناظرة متطابقة.

SAS



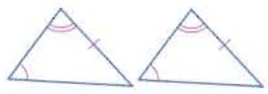
تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما.

ASA



تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما.

AAS



تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة وضلعين غير محصورين.

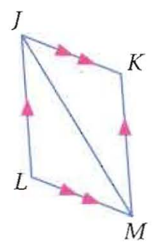
تأكد

المثال 1 **برهان:** برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

1) برهان تسلسلي

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}, \overline{JL} \parallel \overline{KM}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$

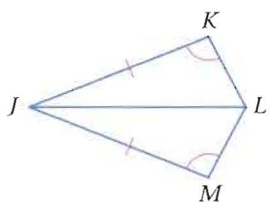


2) برهان حرّ

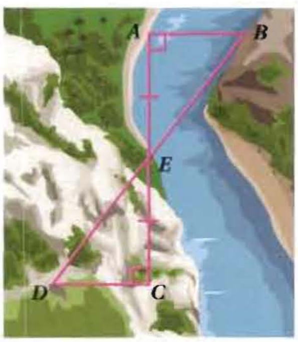
المعطيات: $\angle K \cong \angle M, \overline{JK} \cong \overline{JM}$ ،

$\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$.

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$



المثال 3 **3)** **بناء جسور:** يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبينتين في الشكل المجاور. فوضعَ وتدًا عند A، ووضع زميله وتدًا عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدًا رابعًا عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا وضع وتدًا عند النقطة D، بحيث $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقاط D, E, B تقع على مستقيم واحد.

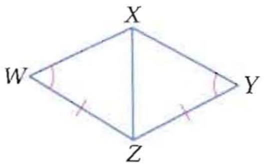


a) وضّح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B.

b) إذا كان $AC = 160\text{ m}, DC = 60\text{ m}, DE = 100\text{ m}$، فأوجد المسافة بين النقطتين A, B. ووضّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

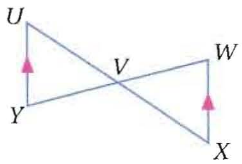


4) **المعطيات:** $\overline{YZ} \cong \overline{WZ}$, $\angle Y \cong \angle W$

$\overline{XZ}$ تنصف $\angle WZY$

المطلوب: $\triangle XWZ \cong \triangle XYZ$

المثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

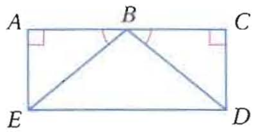


5) **المعطيات:** V نقطة منتصف $\overline{WY}$

$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$

المطلوب: $\triangle UVY \cong \triangle XVW$

6) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا.

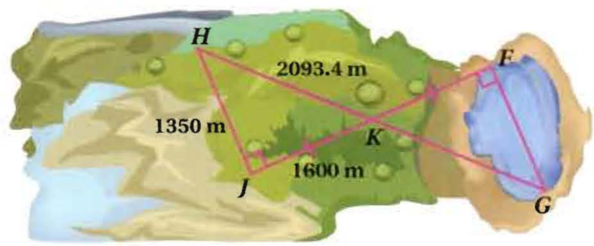


المعطيات: $\angle A$, $\angle C$ زاويتان قائمتان.

$\angle ABE \cong \angle CBD$, $\overline{AE} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$

المثال 3 7) **سباق زوارق:** يرغب المشرفون في إقامة سباق زوارق لمسافة 1500 متر في بحيرة، لكنهم غير متأكدين إن كان طول البحيرة كافيًا لإجراء السباق. ولقياس طول البحيرة حدّدوا رؤوس المثلثين المبينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$.

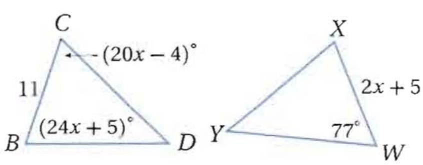


a) وضّح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة.

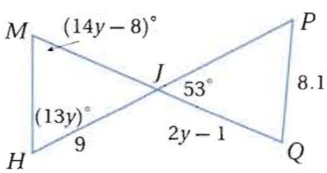
b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضّح إجابتك.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

8) $\triangle BCD \cong \triangle WXY$



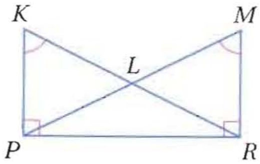
9) $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين

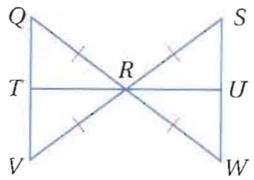
10) **المعطيات:** $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\overline{MR} \perp \overline{PR}$

المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



11) **المعطيات:** $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

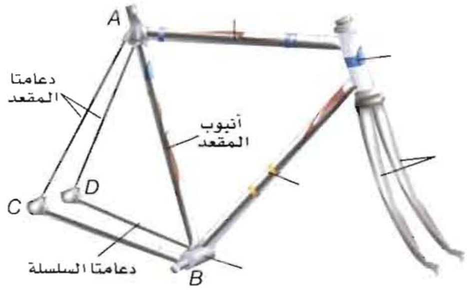
المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$



الربط مع الحياة

يعتمد حجم الدراجة الهوائية على طول أنبوب المقعد فيها. ويتراوح قياسها في الدراجات الهوائية للشباب ما بين 12 in إلى 26 in. وتعتبر ملائمة للراكب إذا استطاع أن يركب الدراجة بسهولة وهو واقف على الأرض.

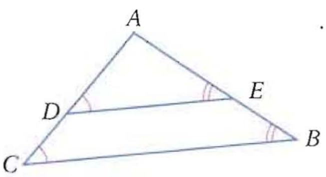
12) **لياقة بدنية:** يشكل أنبوب مقعد الدراجة مثلثًا مع كل من دعامتي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها °68 مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكل دعامة سلسلة تشكل زاوية قياسها °44 مع أنبوب المقعد، فبيّنْ أن دعامتي المقعد لهما الطول نفسه.



مسائل مهارات التفكير العليا

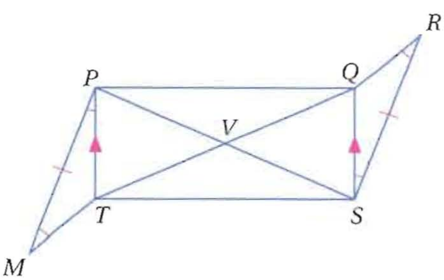
13) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وسمِّهما.

14) **اكتشف الخطأ:** يقول عمر إنه لا يمكن أن تبيِّن أن $\triangle ADE \cong \triangle ACB$. فخالفه حسن بقوله: بما أن $\angle ADE \cong \angle ACB$، وأن $\angle AED \cong \angle ABC$، وأن $\angle A \cong \angle A$ بحسب خاصية الانعكاس، فإن $\triangle ADE \cong \triangle ACB$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



15) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا يوضّح لماذا لا تستعمل SSA (ضلع – ضلع – زاوية) لإثبات تطابق مثلثين.

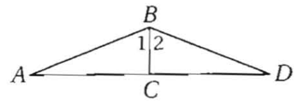
16) **تحدٍّ:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانًا تسلسليًّا لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.



17) **اكتب:** لخّص الطرائق الواردة في الدروس من 3–3 إلى 3–5 لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحًا متى تُستعمل كل طريقة.

تدريب على الاختبار المعياري

18) في الشكل أدناه، $\overline{BC} \perp \overline{AD}, \angle 1 \cong \angle 2$.



أي نظرية أو مسلّمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟

A) AAS
B) ASA
C) SAS
D) SSS

19) ما قيمة $\sqrt{121 + 104}$ ؟

A) 15
B) 21
C) 125
D) 225

مراجعة تراكمية

20) إذا علمت أن $A(6, 4), B(1, -6), C(-9, 5), X(0, 7), Y(5, -3), Z(15, 8)$ ، فبيّن ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ أم لا. ووضّح إجابتك. (الدرس 4-3)

21) **جبر:** إذا كان $\triangle RST \cong \triangle JKL, RS = 7, ST = 5, RT = 9 + x, JL = 2x - 10, JK = 4y - 5$ ، فارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين، وسمّه. ثمّ أوجد قيمة كل من x, y . (الدرس 3-3)

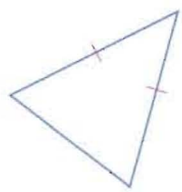
22) أكمل جدول الصواب المجاور (الدرس 2-1)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	T		
T	T		
F	F		
T	F		

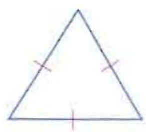
استعد للدرس اللاحق

صنف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

23)



24)

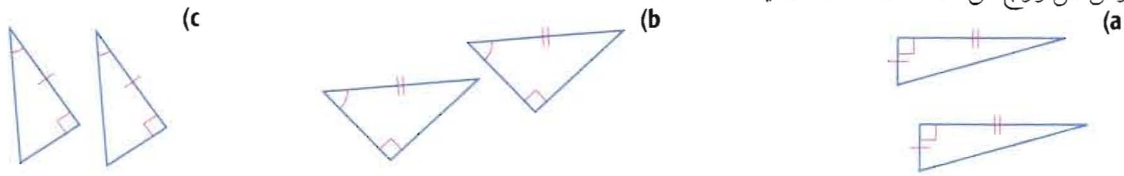


توسّع **معمل الهندسة**

3-5 تطابق المثلثات القائمة

تعلمت في الدرسين 5 - 3 ,3 - 4 نظريات ومسلّمات تُثبت تطابق المثلثات. فكيف تطبّق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

ادرس كل زوج من المثلثات القائمة الآتية:



حلّل:

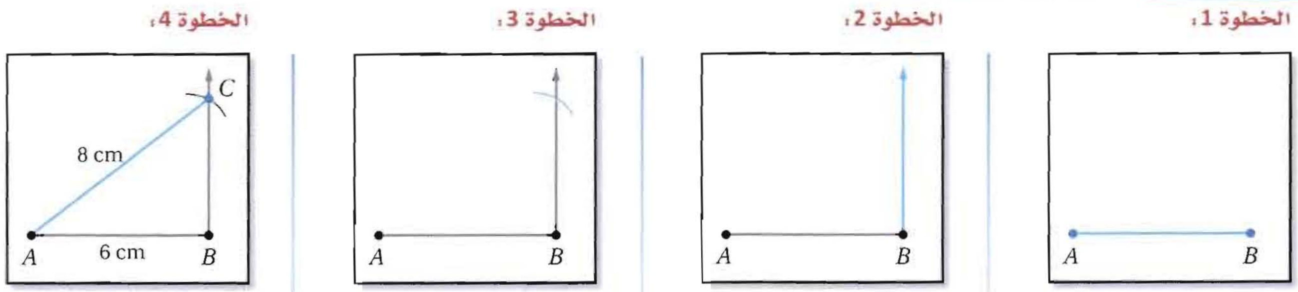
1) هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إن كان ذلك صحيحًا، فأي نظرية تطابق أو مسلمة استعملت؟

2) أعد كتابة قواعد التطابق في التمرين 1 باستعمال الساق (L)، أو الوتر (H) ليحل محل الضلع (S). واحذف A لكل زاوية قائمة؛ لأن كل مثلث قائم الزاوية يحوي زاوية قائمة. وأن جميع الزوايا القوائم متطابقة.

3) **خمّن:** إذا علمت أن ضلعي الزاوية القائمة المتناظرين في المثلثات القائمة متطابقان، فما المعلومات الأخرى الضرورية حتى تؤكد تطابق المثلثات؟ وضّح إجابتك.

درست في الدرس 5–3 أن الحالة SSA ليست كافية لتحديد تطابق مثلثين، فهل يمكن استعمالها لبرهنة تطابق مثلثين قائمين؟

نشاط SSA والمثلثات القائمة



الخطوة 1: ارسم $\overline{AB}$ على أن يكون $\overline{AB} = 6\text{ cm}$

الخطوة 2: استعمل المنقلة لرسم نصف مستقيم من B عمودي على $\overline{AB}$.

الخطوة 3: افتح الفرجار فتحة تساوي 8 cm. وركّزه عند النقطة A ، ثمّ ارسم قوسًا يقطع نصف المستقيم.

الخطوة 4: سمّ نقطة التقاطع C ، ثم ارسم $\overline{AC}$ لإكمال $\triangle ABC$.

حلّل:

4) هل يؤدي النموذج إلى رسم مثلث وحيد؟

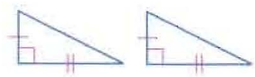
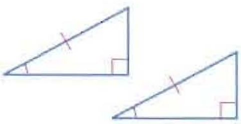
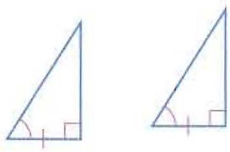
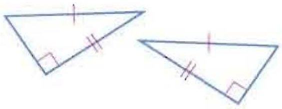
5) هل يمكنك استعمال طولي الوتر والضلع لتبيّن تطابق مثلثين قائمين؟

6) خمّن حالة SSA الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية.

يبيّن النشاط السابق أربع طرائق لإثبات تطابق المثلثات القائمة وهي:

نظريات ومسلّمات — تطابق المثلثات القائمة

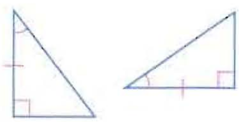
أضف إلى مطويتك

نظرية 3.6: التطابق ضلع - ضلع إذا طابق ضلعان (ساقان) في مثلث قائم نظيريهما في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار:** LL.	
نظرية 3.7: التطابق وتر - زاوية حادة إذا طابق وتر وزاوية حادة في مثلث قائم الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار:** HA.	
نظرية 3.8: التطابق ضلع - زاوية حادة إذا طابق ضلع (ساق) وزاوية حادة في مثلث قائم الضلع (الساق) المناظر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار:** LA.	
نظرية 3.9: التطابق وتر - ضلع إذا طابق وتر وضلع في مثلث قائم وترًا وضلعًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار:** HL.	

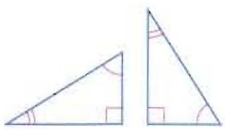
تمارين:

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقان أم لا. وإذا كانت الإجابة "نعم"، فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

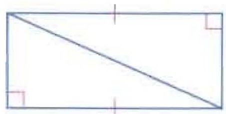
(7



(8



(9

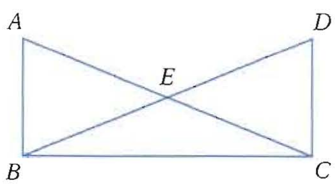


برهان: اكتب برهانًا لكل مما يأتي:

10) النظرية 3.6 **11)** النظرية 3.7

12) النظرية 3.8 (إرشاد: توجد حالتان ممكنتان) **13)** النظرية 3.9 (إرشاد: استعمل نظرية فيثاغورس)

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 14.



14) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع
Isosceles and Equilateral Triangles

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

الساقان
legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس
vertex angle

زاويتا القاعدة
base angles

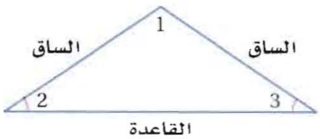
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يوجد للسكة الحديدية للعبة القاطرة السريعة في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها. والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكّر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها على الأقل ضلعان متطابقان، وأن لعناصره أسماءً خاصة.

يُسمّى الضلعان المتطابقان **بالساقين**، وتُسمّى الزاوية التي ضلعاها الساقان **زاوية الرأس**. و يُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدةَ. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتي القاعدة**.



ففي الشكل المجاور ، $\angle 1$ هي زاوية الرأس،

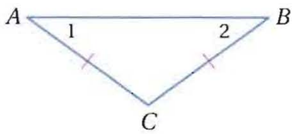
وزاويتا القاعدة هما $\angle 3$, $\angle 2$.

نظريات — المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى مطويتك

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

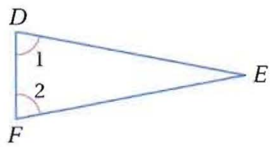
إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.



مثال: إذا كان $\overline{BC} \cong \overline{AC}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

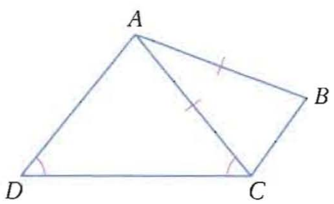
إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.



مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

مثال 1 القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة



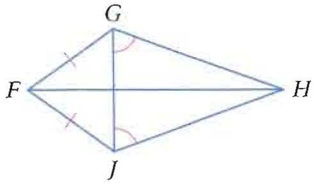
a) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$ ؛

لذا فإن $\angle B \cong \angle ACB$.

b) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\overline{AD}$ تقابل $\angle ACD$، $\overline{AC}$ تقابل $\angle D$ ، لذا فإن $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.



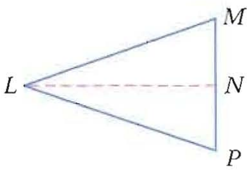
تحقق من فهمك

1A) سمِّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

1B) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

لإثبات نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ارسم مستقيمًا مساعدًا ثم استعمل المثلثين الناتجين.

البرهان نظرية المثلث المتطابق الضلعين



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

العبارات	المبرِّرات
1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	**1)** كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.
2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.	**2)** كل نقطتين تحددان مستقيمًا.
3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$	**3)** نظرية نقطة المنتصف.
4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	**4)** خاصية الانعكاس في التطابق.
5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	**5)** معطى
6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	**6)** مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.
7) $\angle M \cong \angle P$	**7)** العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

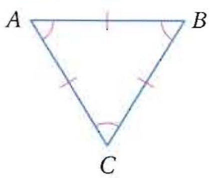
خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: تقود نظرية المثلث المتطابق الضلعين إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

مراجعة المفردات

المثلث المتطابق الأضلاع:
هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

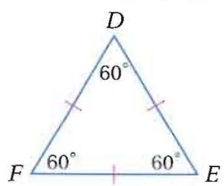
نتيجتان المثلث المتطابق الأضلاع

أضف إلى مطويتك



3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: إذا كان $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ، فإن
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$



3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

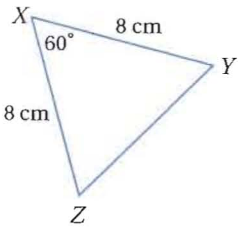
مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ، فإن
$m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$.

ستبرهن النتيجتين 3.3, 3.4 في السؤالين 22, 23

مثال 2 إيجاد القياسات غير المعلومة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

$m\angle Y$ (a

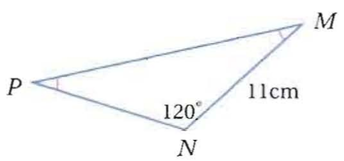


بما أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$, $XY = XZ$. وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Z, Y متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Z = m\angle Y$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle Y + m\angle Y = 180°$	$m\angle X = 60°, m\angle Z = m\angle Y$
$60° + 2(m\angle Y) = 180°$	بالتبسيط
$2(m\angle Y) = 120°$	بطرح 60 من كل طرف
$m\angle Y = 60°$	بقسمة كل طرف على 2

YZ (b

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن $m\angle Z = 60°$. وبما أن $m\angle X = 60°$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث $60°$ ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا $XY = XZ = ZY$. وبما أن $XY = 8\,\text{cm}$ ، فإن $YZ = 8\,\text{cm}$



تحقق من فهمك

$m\angle M$ (2A **PN (2B**

إرشادات للدراسة

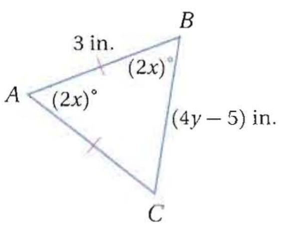
المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2 ، أي مثلث متطابق الضلعين فيه الزاوية 60° يكون مثلثًا متطابق الأضلاع.

يمكنك استعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والجبر لتجد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

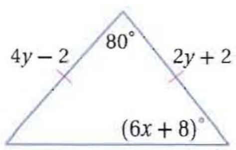
جبر : أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور. بما أن $\angle A = \angle B$ فإن $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي $60°$ ؛ لذا فإن $2x = 60 , x = 30$.



وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، فإن جميع الأضلاع متطابقة، وأطوالها متساوية.

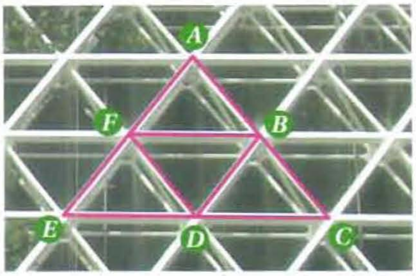
$AB = BC$	تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
$3 = 4y - 5$	بالتعويض
$8 = 4y$	بإضافة 5 إلى كل من الطرفين
$2 = y$	بقسمة كل طرف على 4

تحقق من فهمك



3) أوجد قيمة كل من المتغيرين في الشكل المجاور .

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيق تطابق المثلثات



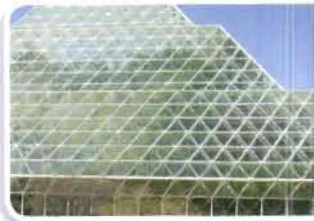
مباني: انظر إلى الصورة المجاورة. $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$ ، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$،و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) F نقطة منتصف $\overline{AE}$ ، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$.	2) معطى
3) $m\angle A = 60°, m\angle C = 60°, m\angle E = 60°$	3) قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$
4) $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	4) تعريف التطابق والتعويض
5) $\overline{AE} \cong \overline{EC} \cong \overline{CA}$	5) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
6) $AE = EC = CA$	6) تعريف التطابق
7) $\overline{AF} \cong \overline{FE}, \overline{ED} \cong \overline{DC}, \overline{CB} \cong \overline{BA}$	7) نظرية نقطة المنتصف
8) $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	8) تعريف التطابق
9) $AF + FE = AE, ED + DC = EC, CB + BA = CA$	9) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
10) $AF + AF = AE, FE + FE = AE, ED + ED = EC, DC + DC = EC, CB + CB = CA, BA + BA = CA$	10) بالتعويض
11) $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = EC, 2DC = EC, 2CB = CA, 2BA = CA$	11) خاصية الجمع
12) $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = AE, 2DC = AE, 2CB = AE, 2BA = AE$	12) خاصية التعويض
13) $2AF = 2ED = 2CB, 2FE = 2DC = 2BA$	13) خاصية التعدي
14) $AF = ED = CB, FE = DC = BA$	14) خاصية القسمة
15) $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	15) تعريف التطابق
16) $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	16) مسلّمة SAS
17) $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	17) العناصر المتناظرة متطابقة.
18) $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.	18) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع



الربط مع الحياة

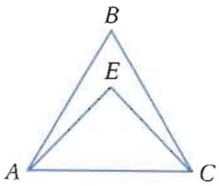
تتكون سقالات المباني الحديديّة وأبراج رافعات البناء من قضبان حديديّة يتم تثبيتها على شكل مثلثات تزيدها دعمًا وقوةً لكي تتحمَل الأوزان الثقيلة.

تحقق من فهمك

4) إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه $\overline{FB} \parallel \overline{EC}, \overline{FD} \parallel \overline{BC}, \overline{BD} \parallel \overline{EF}$ ، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.

تأكـــد

المثال 1 انظر إلى الشكل المجاور.

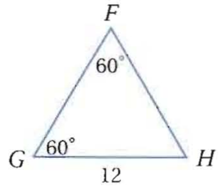


1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

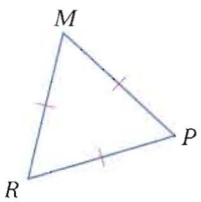
2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2 أوجد كلًا من القياسين الآتيين:

3) FH

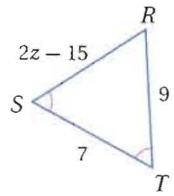


4) $m\angle MRP$

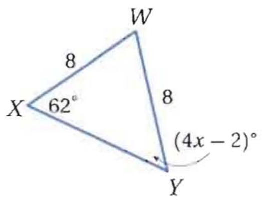


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:

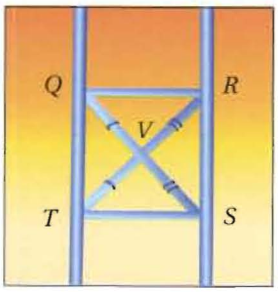
5)



6)



المثال 4 **7)** **القاطرة السريعة:** دعائم سكة القاطرة السريعة المبينة في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات. ويُظهر الشكل المجاور جزءًا منها.

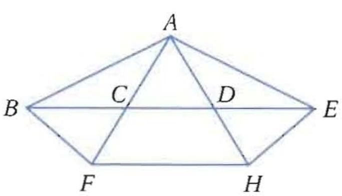


a) إذا كان $\triangle RVS$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{RS}$، $\triangle QVT$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{QT}$ ، فأثبت أن $\triangle QVR \cong \triangle TVS$.

b) إذا كان $\overline{QT} \parallel \overline{SR}, QT = 3.5\text{ m}, SV = 2\text{ m}$ ، فأوجد طول $\overline{TS}$.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 انظر إلى الشكل المجاور



8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

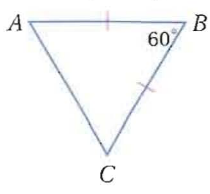
9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

10) إذا كانت $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

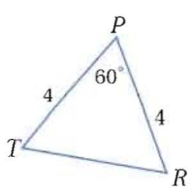
11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2 أوجد كلًا من القياسين الآتيين:

12) $m\angle BAC$

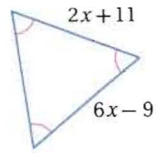


13) TR

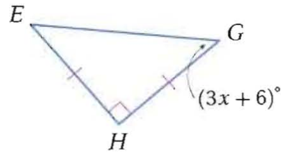


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:

14)



15)



المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

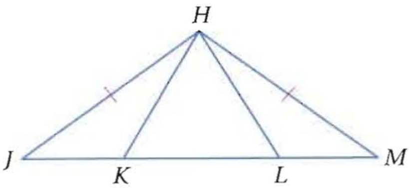
16) **المعطيات:** $\triangle HJM$ متطابق الضلعين،

$\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.

$\angle HKL , \angle JKH$ متكاملتان،

$\angle MLH , \angle HLK$ متكاملتان.

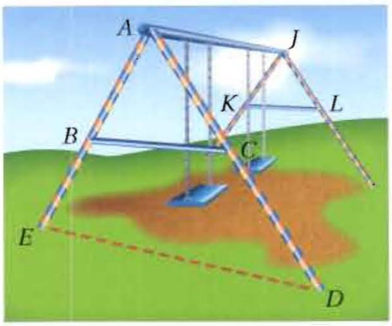
المطلوب: إثبات أن: $\angle JHK \cong \angle MHL$



الربط مع الحياة

مهمة الوالدين اختيار الألعاب التي تناسب أعمار أطفالهم.

17) **حدائق:** اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وباستعمال حبل القفز وجد خالد أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ولكن $\overline{BC} \ncong \overline{AB}$.



a) إذا قدّر خالد أن $m\angle BAC = 50^\circ$، فما قيمة $m\angle ABC$ وفقًا لهذا التقدير؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{CD}$، فبيِّن أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.

c) إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$, $\overline{ED} \cong \overline{AD}$، فبيّن أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع.

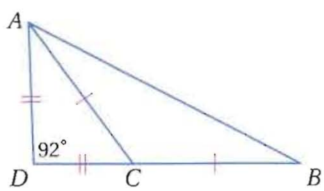
أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

18) $m\angle CAD$

19) $m\angle ACD$

20) $m\angle ACB$

21) $m\angle ABC$

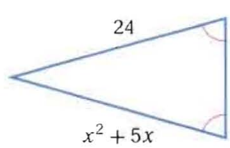


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

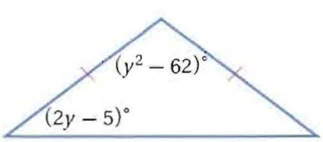
22) النتيجة 3.3 **23)** النتيجة 3.4 **24)** النظرية 3.11

أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:

25)



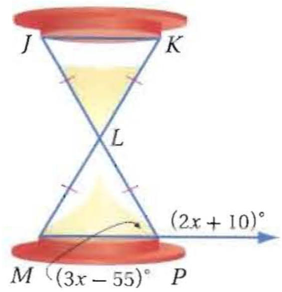
26)



الربط مع الحياة

تعتمد دقة ساعة الرمل الزجاجية على ثبات معدل تدفق الرمل الذي يعتمد على نسبة قطر الثقب إلى قطر حبات الرمل المستعملة.

ألعاب: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



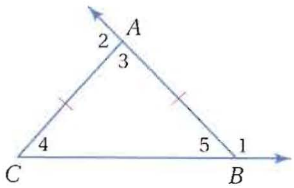
(27 $m\angle LPM$

(28 $m\angle LMP$

(29 $m\angle JLK$

(30 $m\angle JKL$

(31 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين إذا عُلم قياس زاوية خارجية له.



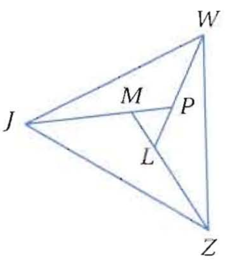
a) هندسيًا: استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كل منها متطابق الضلعين. ومُدّ أحد ضلعي زاوية الرأس ومدّت القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

b) جدوليًا: استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجّله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 5$, $\angle 4$, $\angle 3$. ثم أوجد $m\angle 2$ وسجله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتّب نتائجك في جدولين.

c) لفظيًا: وضّح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 5$, $\angle 4$, $\angle 3$. ثم وضّح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

d) جبريًا: إذا كان $m\angle 1 = x$، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كل من $\angle 5$, $\angle 4$, $\angle 3$. وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كل من الزوايا نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا



(32 **تحدٍّ:** في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضّح إجابتك:

(33 إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عددًا صحيحًا، فإن قياس كل من زاويتي القاعدة عدد صحيح.

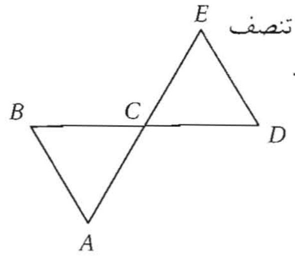
(34 إذا كان قياس كل من زاويتي القاعدة عددًا صحيحًا، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

(35 **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا متطابق الضلعين فيه زاويتا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضّح السبب.

(36 **اكتب:** وضّح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

تدريب على الاختبار المعياري

37) في الشكل المجاور، $\overline{AE}, \overline{BD}$ تنصف كل منهما الأخرى في النقطة C.



أي المعلومات الإضافية الآتية تعد كافية لإثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$؟

A $\angle A \cong \angle BCA$

B $\angle B \cong \angle D$

C $\angle ACB \cong \angle EDC$

D $\angle A \cong \angle B$

38) إذا كان $x = -3$، فإنّ قيمة $4x^2 - 7x + 5$ تساوي:

A 2

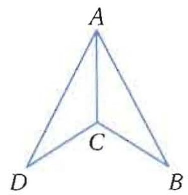
B 20

C 42

D 62

مراجعة تراكمية

39) إذا كان $AB = 27$ in، $AD = 27$ in، $DC = 7$ in، $CB = 7$ in، فحدّد ما إذا كان $\triangle ADC \cong \triangle ABC$. (الدرس 5-3)



اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارات الآتية؟ (الدرس 6-1)

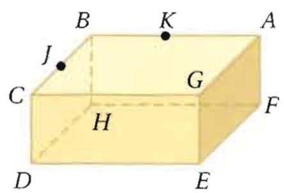
40) إذا كان $x(y + z) = a$، فإنّ $xy + xz = a$.

41) إذا كان $n - 17 = 39$، فإنّ $n = 56$.

42) إذا كان $m\angle P + m\angle Q = 110$ وكانت $m\angle R = 110$، فإنّ $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$.

43) إذا كان $cv = md$, $md = 15$ فإنّ $cv = 15$.

انظر إلى الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



44) ما عدد المستويات الظاهرة في هذا الشكل؟

45) سمِّ ثلاث نقاط خطية.

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يأتي:

46) $A(2, 15)$, $B(7, 9)$

47) $C(-4, 6)$, $D(2, -12)$

48) $E(3, 2.5)$, $F(7.5, 4)$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

والآن:

- أرسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهانًا إحداثيًا.

المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

www.obeikaneducation.com

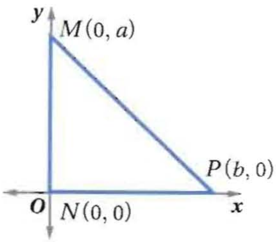
لماذا؟

يستقبل نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) البث من الأقمار الصناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثي يمكنك من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.

مثال 1 تحديد موقع المثلث وتسميته

ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسمّ رؤوسه على أن يكون طول الضلع $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة.



- يحدد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعي القائمة على المحورين x, y.
- اجعل زاوية المثلث القائمة $\angle N$ على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين x, y .
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y ، وبما أن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a.
- ارسم P على المحور x ، وبما أن طول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b.

تحقق من فهمك

1) ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسمِّ رؤوسه على أن يكون طول قاعدته $\overline{JL}$ يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، ويقع الرأس K على المحور y .

مفهوم أساسي رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للمثلث.

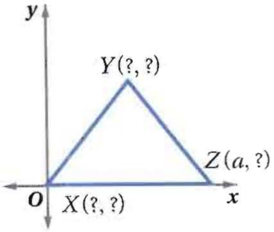
الخطوة 2: ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

مثال 2 إيجاد الإحداثيات المجهولة

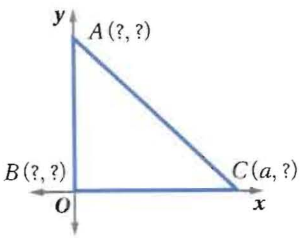
أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.



بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$، ولأن الرأس Z يقع على المحور x، فإن الإحداثي y يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين 0 , a ويكون $\frac{a}{2}$. وأما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدلالة a، وإذا افترضناه b. فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تحقق من فهمك

2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.



إرشادات للدراسة

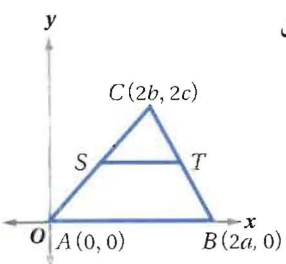
الزاوية القائمة

يشكّل تقاطع المحور x مع المحور y زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.

كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه يمكنك استعمال البرهان الإحداثي للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

مثال 3 كتابة البرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.



اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه A. واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2.

المعطيات: $\triangle ABC$، فيه:

S نقطة منتصف $\overline{AC}$،

T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$.

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$.

وبتطبيق قانون الميل فإن ميل $\overline{ST}$ هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$.

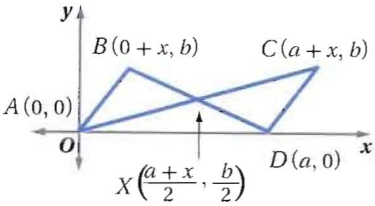
وميل $\overline{AB}$ هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$.

وبما أن ميل $\overline{ST}$ يساوي ميل $\overline{AB}$، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي

تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.



تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن: $\triangle ABX \cong \triangle CDX$.

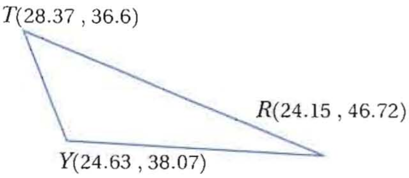
يمكن استعمال طرائق البرهان الإحداثي لحل مسائل من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودا المبين في الخريطة بالمحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدر مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلًا مربعًا.

مثال 4 من واقع الحياة — تصنيف المثلثات

جغرافيا: **إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكل من الرياض وينبع وتبوك هي:**
الرياض 24.15°N 46.72°E، ينبع 24.63°N 38.07°E، تبوك 28.37°N 36.6°E، فاكتب برهانًا إحداثيًا يبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.



الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم. ولتكن R تمثّل الرياض، Y تمثّل ينبع ، T تمثّل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$ فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2}$$
$$\approx 8.66$$

$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2}$$
$$\approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2}$$
$$\approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة فهو مثلث مختلف الأضلاع. أيْ أن **المثلث** الذي رؤوسه الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

تحقق من فهمك

4) **جغرافيا:** يضم مجمع كشفي ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا.
إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي:
تبوك 28.37°N36.6°E، عرعر 30.9°N41.13°E،
حائل 27.43°N41.68°E، فاكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا.

تأكد

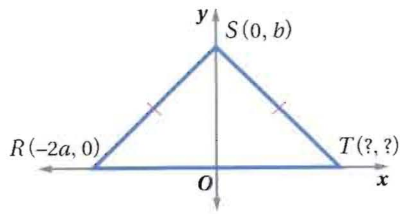
المثال 1 ارسم كلاً من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، وحدّد إحداثيات رؤوسه.

1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه $\overline{AC}, \overline{AB}$ ضلعا القائمة، وطول $\overline{AC}$ يساوي $2a$ وحدة، وطول $\overline{AB}$ يساوي $2b$ وحدة.

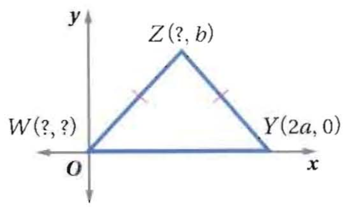
2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FG}$ يساوي $2a$ وحدة.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين:

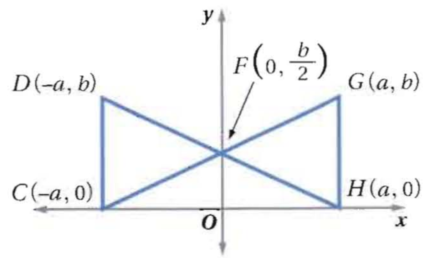
3)



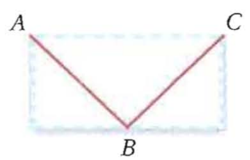
4)



المثال 3 **5)** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن $\triangle FDC \cong \triangle FGH$.



المثال 4 **6)** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين. علمًا بأن بُعدي المظروف هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف.



تدرب وحل المسائل

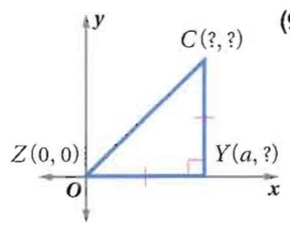
المثال 1 ارسم كل مثلث من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وحدِّد إحداثيات رؤوسه:

7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي a وحدة.

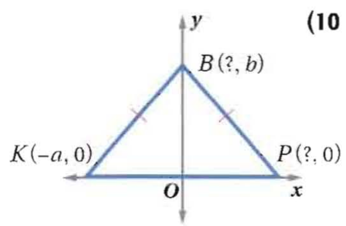
8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره $\overline{YZ}$، وطول الضلع $\overline{XY}$ يساوي b وحدة، وطول $\overline{XZ}$ ثلاثة أمثال طول $\overline{XY}$.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

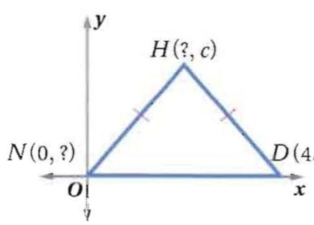
9)



10)



11)



المثالان 3, 4 **برهان:** **اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل عبارة من العبارات الآتية:**

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.

13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

14) **جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جيزان ونجران وخميس مشيط هي: جيزان 16.9°N 42.58°E ، نجران 17.5°N 44.16°E ، خميس مشيط 18.3°N 42.8°E، فبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

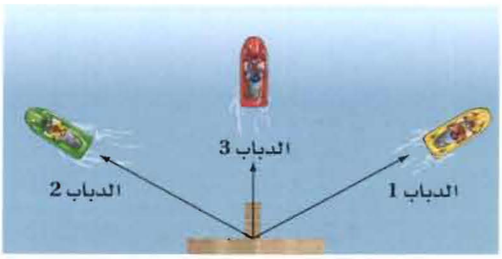
في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضّح إجابتك.

15) $X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0)$

16) $X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0)$

17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزّه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزّه تقع عند النقطة (0 ,0)، وأن إحداثيات موقعي الخيمتين هما (9 ,12) , (0 ,25). فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.

18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة دبابات مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الدباب الثالث فاتجه نحو الشمال.



توقف الدبابان الأول والثاني على بُعد 300 m تقريبًا من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف.

a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة (0 ,0)، فمثّل هذا الوضع بيانيًّا، وأوجد معادلة خط سير الدباب الأول، ومعادلة خط سير الدباب الثاني. وفسّر إجابتك.

b) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الرصيف والدبابين الأول والثاني تُشكّل مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين.

c) أوجد إحداثيات مواقع هذه الدبابات الثلاثة، وفسّر إجابتك.

d) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الدبابات الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد، وأن الدباب الثالث يقع في منتصف المسافة بين الدبابين الأول والثاني.

الربط مع الحياة

تستثمر المنطقة الشرقية وجدة إطلالتيهما على الخليج العربي والبحر الأحمر في توجيه برامج رياضية بحرية متنوعة للسياح الذين يتقاطرون على الواجهات البحرية من مختلف مناطق المملكة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: **إذا كانت إحداثيات النقطة J هي $(0, 0)$، والنقطة K هي $(2a, 2b)$، فأوجد إحداثيات النقطة L على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كل من الأسئلة الثلاثة الآتية:**

19) مثلث مختلف الأضلاع

20) مثلث قائم الزاوية

21) مثلث متطابق الضلعين

22) **مسألة مفتوحة:** ارسم في المستوى الإحداثي مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين على أن تكون نقطة الأصل نقطة منتصف وتره، ثم أوجد إحداثيات كل رأس من رؤوسه.

23) **تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلث هما: $(0, 0)$, $(a, 0)$. إذا أعطي إحداثي الرأس الثالث بدلالة a ، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدّد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.

24) **اكتب:** وضّح فائدة اتباع كل من الإرشادات الآتية لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

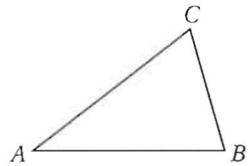
a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.

b) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y.

c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

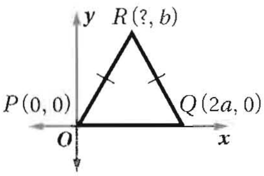
تدريب على الاختبار المعياري

25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76°$. وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle B$، فما $m\angle C$؟



A) 33
B) 38
C) 46
D) 66

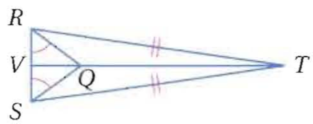
26) ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور؟



A $\left(\frac{a}{2}, b\right)$
B (a, b)
C $(4a, b)$
D $\left(\frac{a}{4}, b\right)$

مراجعة تراكمية

انظر إلى الشكل المجاور. (الدرس 3-6)



27) سمّ زاويتين متطابقتين.

28) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

29) سمِّ مثلثين متطابقين.

30) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6 , 2)$, $(-6 , -2)$. (الدرس 2-3)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، وقرّب الناتج إلى أقرب عُشر:

31) $X(5, 4)$, $Y(2, 1)$

32) $A(1, 5)$, $B(-2, -3)$

33) $J(-2, 6)$, $K(1, 4)$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 1-3)

- يمكن تصنيف المثلث بحسب نوع زواياه، فيكون حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. وكذلك يمكن تصنيفه بحسب أضلاعه، فيكون مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلث (الدرس 2-3)

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

المثلثات المتطابقة (الدرس 3-3 إلى 5-3)

- SSS: يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.
- SAS: يتطابق مثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- ASA: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- AAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (الدرس 6-3)

- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان. ويكون المثلث متطابق الأضلاع إذا تطابقت جميع زواياه.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 7-3)

- يستعمل البرهان الإحداثي الجبر لإثبات بعض المفاهيم الهندسية.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات:

- المثلث الحاد الزوايا (ص 142)
- المثلث المتطابق الزوايا (ص 142)
- المثلث المنفرج الزاوية (ص 142)
- المثلث القائم الزاوية (ص 142)
- المثلث المتطابق الأضلاع (ص 143)
- المثلث المتطابق الضلعين (ص 143)
- المثلث المختلف الأضلاع (ص 143)
- المستقيم المساعد (ص 150)
- الزاوية الخارجية (ص 152)
- الزاويتان الداخليتان البعيدتان (ص 152)
- البرهان التسلسلي (ص 152)
- النتيجة (ص 153)
- التطابق (ص 158)
- المضلعات المتطابقة (ص 158)
- العناصر المتناظرة (ص 158)
- الزاوية المحصورة (ص 168)
- الضلع المحصور (ص 175)
- الساقان (ص 182)
- زاوية الرأس (ص 182)
- زاويتا القاعدة (ص 182)
- البرهان الإحداثي (ص 190)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح صحيحة:

1) المثلث المتطابق الزوايا هو مثال على المثلث الحاد الزوايا.

2) المثلث الذي يحوي زاوية أكبر من $90°$ هو مثلث قائم الزاوية.

3) المثلث المتطابق الأضلاع يكون دائمًا متطابق الزوايا.

4) المثلث المختلف الأضلاع فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

5) الضلع المحصور هو الضلع الذي يقع بين زاويتين متتاليتين في مضلع.

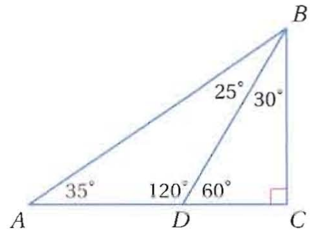
6) يستعمل البرهان التسلسلي الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لبرهنة المفاهيم الهندسية.

7) قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مراجعة الدروس

3-1 تصنيف المثلثات (ص: 148-142)

صنف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



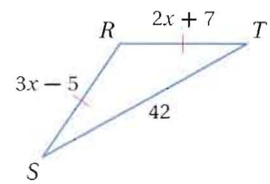
8) $\triangle ADB$

9) $\triangle BCD$

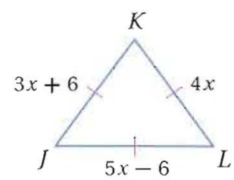
10) $\triangle ABC$

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



12)

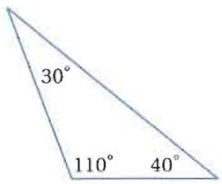


13) **خرائط:** المسافة من الرياض إلى المدينة المنورة ومنها إلى مكة المكرمة ثم إلى الرياض تساوي 2092 km. وتزيد المسافة بين الرياض ومكة المكرمة 515 km على المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة. وتقل المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة 491 km عن المسافة بين الرياض والمدينة المنورة. أوجد المسافة بين كل مدينتين من هذه المدن، وصنّف المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث.

مثال 1

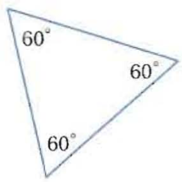
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

(a



بما أن للمثلث زاوية منفرجة، فيكون مثلثًا منفرج الزاوية.

(b



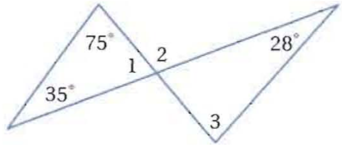
للمثلث ثلاث زوايا حادة جميعها متساوية؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

الفصل

3 دليل الدراسة والمراجعة

3-2 زوايا المثلثات (ص: 150-157)

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة الآتية:



(14) $\angle 1$

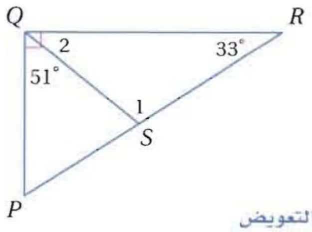
(15) $\angle 2$

(16) $\angle 3$

(17) **منازل:** حديقة منزلية على صورة مثلث متطابق الضلعين كما في الشكل أدناه. أوجد قيمة x .

مثال 2

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة الآتية:



$m\angle 2 + m\angle PQS = 90$

$m\angle 2 + 51 = 90$ بالتعويض

$m\angle 2 = 39$ بطرح 51 من الطرفين

$m\angle 1 + m\angle 2 + 33 = 180$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$m\angle 1 + 39 + 33 = 180$ بالتعويض

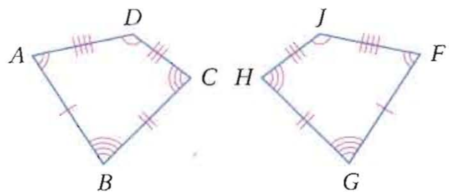
$m\angle 1 + 72 = 180$ بالتبسيط

$m\angle 1 = 108$ بالطرح

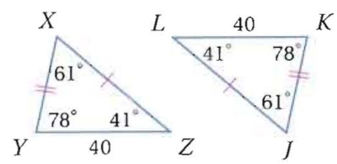
3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 158-165)

بيّن أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق:

(18)



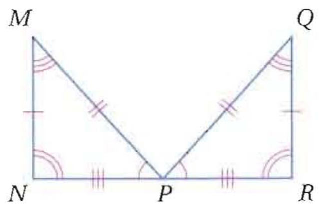
(19)



(20) **فسيفساء:** يُظهر الشكل المجاور جزءًا من تبليط فسيفسائي. سمِّ 4 مثلثات تبدو متطابقة في الشكل.

مثال 3

بيّن أن المثلثين الآتيين متطابقان، وذلك بتحديد جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق:



الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة؛ لذا فإن

$\triangle MNP \cong \triangle QRP$

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS (ص: 173-166)

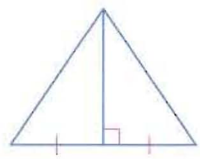
حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$، ووضح إجابتك.

21) $A(5, 2), B(1, 5), C(0, 0), X(-3, 3), Y(-7, 6), Z(-8, 1)$

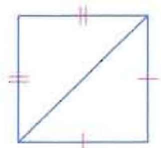
22) $A(3, -1), B(3, 7), C(7, 7), X(-7, 0), Y(-7, 4), Z(1, 4)$

حدّد المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان، وإذا كان إثبات تطابقهما غير ممكن فاكتب "غير ممكن".

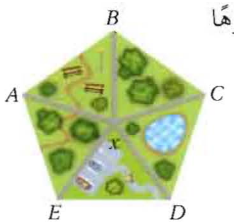
23)



24)

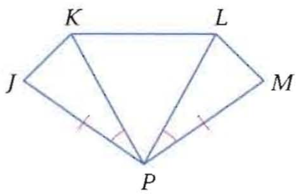


25) متنزهات: يظهر الرسم المجاور متنزّهًا على صورة خماسي فيه خمسة ممرات مُشاة لها الطول نفسه، تؤدي إلى نقطة المركز. فإذا كانت جميع الزوايا المركزية متساوية القياس، فأي مسلمة (نظرية) تستعمل لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle DCX$؟



مثال 4

اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.

$\overline{JP} \cong \overline{MP}$

$\angle JPK \cong \angle MPL$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JPK \cong \triangle MPL$.

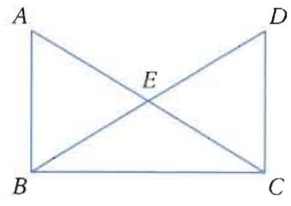
العبارات	المبررات
1) $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) $\overline{PK} \cong \overline{PL}$	2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
3) $\overline{JP} \cong \overline{MP}$	3) معطى
4) $\angle JPK \cong \angle MPL$	4) معطى
5) $\triangle JPK \cong \triangle MPL$	5) SAS

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS (ص: 179-175)

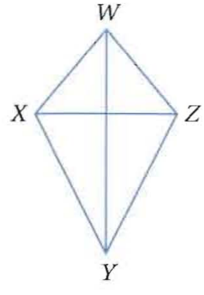
اكتب برهانًا ذا عمودين.

26) **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABE \cong \triangle CDE$.



27) الطائرة الورقية: يظهر الشكل المجاور طائرة عثمان الورقية. إذا علمت أن $\overline{WY}$ تنصف كلًّا من $\angle XWZ, \angle XYZ$، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.



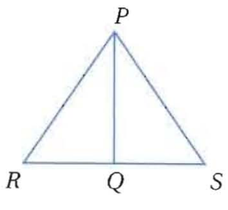
مثال 5

اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{PQ}$ تنصف $\angle RPS$

$\angle R \cong \angle S$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$.



البرهان التسلسلي:

$\boxed{\overline{PQ}\text{ تنصف } \angle RPS}$ معطى ← $\boxed{\angle RPQ \cong \angle SPQ}$ تعريف منصّف الزاوية

$\boxed{\angle R \cong \angle S}$ معطى

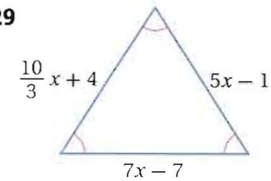
$\boxed{\overline{PQ} \cong \overline{PQ}}$ خاصية الانعكاس

← $\boxed{\triangle RPQ \cong \triangle SPQ}$ AAS

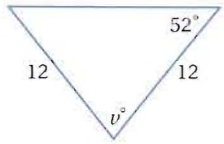
3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (ص: 182-189)

أوجد قيمة كل من المتغيرين فيما يأتي:

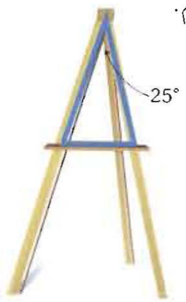
28)



29)

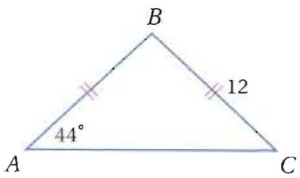


30) **رسم:** يستعمل وليد حاملًا خشبيًا للرسم. تشكل القطعة الداعمة الأفقية في الحامل مثلثًا متطابق الضلعين مع الدعامتين الأماميتين كما في الشكل المجاور، ما قياس كلٍّ من زاويتي قاعدة المثلث؟



مثال 6

أوجد كل قياس فيما يأتي:



a) $m\angle B$

بما أن $AB = BC$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، وبتطبيق نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون زاويتا القاعدة A, C متطابقتين؛ إذن $m\angle A = m\angle C$. استعمل نظرية مجموع قياس زوايا المثلث لكتابة معادلة، ثم حلها لتجد $m\angle B$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle B + 44 + 44 = 180$	$m\angle A = m\angle C = 44°$
$m\angle B + 88 = 180$	بالتبسيط
$m\angle B = 92°$	بالطرح

b) AB

$AB = BC$؛ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وبما أن $BC = 12$، فإن $AB = 12$ أيضًا.

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 190-195)

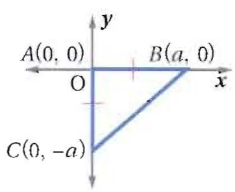
31) ارسم $\triangle MNO$ القائم الزاوية في M، طولا ضلعيه $a, 2a$.

32) **جغرافيا:** عيّن شاكر المدينة المنورة وبريدة وحائل كما هو مبين على الخريطة المجاورة. اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

مثال 7

ارسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كل من ساقي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وسمه.

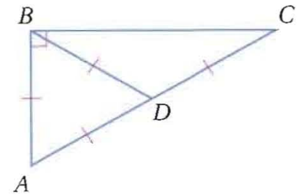
- اجعل نقطة الأصل رأسًا للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعي القائمة على المحور x، والضلع الآخر على المحور y.
- بما أن النقطة B على المحور x فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي a.



وبما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثييها $(0, -a)$ لأنها تقع على الجزء السالب من المحور y، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع.

اختبار الفصل

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



1) $\triangle ABD$

2) $\triangle ABC$

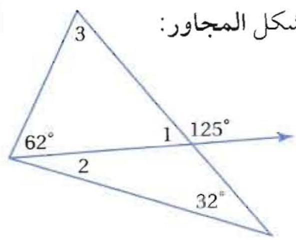
3) $\triangle BDC$

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:

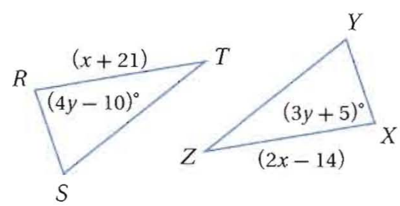
4) $\angle 1$

5) $\angle 2$

6) $\angle 3$



في المثلثين أدناه، إذا كان $\triangle RST \cong \triangle XYZ$ فأوجد:



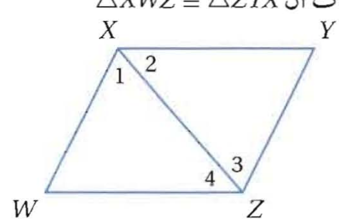
7) قيمة x.

8) قيمة y.

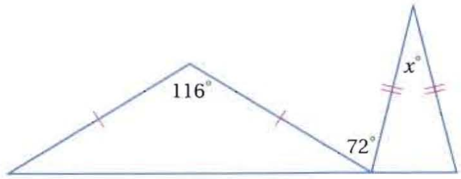
9) **برهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$, $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$



10) **اختيار من متعدد** ما قيمة x في الشكل أدناه؟



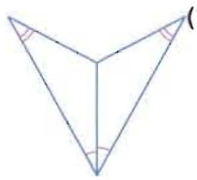
A 36 C 28

B 32 D 22

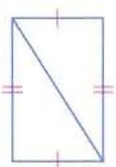
11) إذا علمت أن $T(-4, -2), J(0, 5), D(1, -1), S(-1, 3),$ $E(3, 10), K(4, 4)$. فحدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ أم لا، ووضح إجابتك.

حدد النظرية أو المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل زوج من أزواج المثلثات متطابق. واكتب "غير ممكن" إذا تعذر إثبات التطابق.

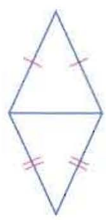
12)



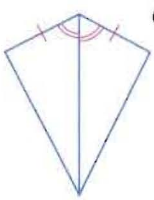
13)



14)



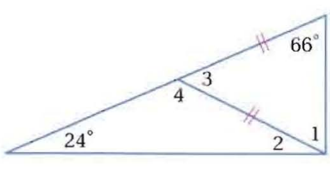
15)



أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

16) $\angle 1$

17) $\angle 2$



18) **برهان** إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين وقائم الزاوية، وكانت M نقطة منتصف وتره $\overline{AB}$. فاكتب برهانًا تسلسليًا لإثبات أن $\overline{CM}$ عمودية على $\overline{AB}$.

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم حلًّا لها متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة وتحدد درجاتها باستعمال سلالم التقدير.

وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

اقرأ السؤال جيدًا؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

الخطوة 2

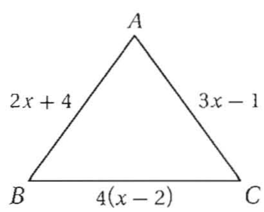
ضع خطة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك، أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبينًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال الآتي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال لحله. واكتب خطوات الحل.

ما محيط المثلث ABC متطابق الضلعين الذي قاعدته $\overline{BC}$ ؟



اقرأ السؤال بعناية. تَعْلَم من السؤال أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{BC}$. والمطلوب أن تجد محيط هذا المثلث.

ضع خطة وحل السؤال.

ضلعا المثلث المتطابق الضلعين متطابقان.

لذا $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ أو $AB = AC$. والآن حل المعادلة لتجد قيمة x.

$$AB = AC$$
$$2x + 4 = 3x - 1$$
$$2x - 3x = -1 - 4$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

$\overline{AB}$: $2(5) + 4 = 14$

$\overline{AC}$: $3(5) - 1 = 14$

$\overline{BC}$: $4(5 - 2) = 12$

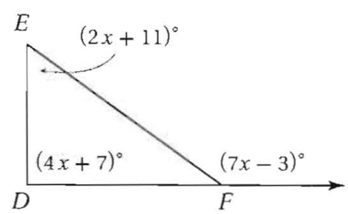
وبما أن $14 + 14 + 12 = 40$، فإن محيط $\triangle ABC$ يساوي 40 وحدة.

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة. وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة؛ إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال. واكتب خطوات الحل:

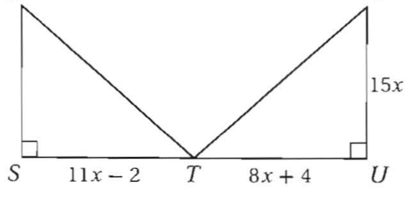
1) صنّف $\triangle DEF$ بحسب زواياه.



2) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(-2, 0)$, $(2, 4)$.

3) يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة لأغنامه مستطيلة الشكل، مساحتها $1000\ m^2$. ويريد أن يوفر المال عن طريق شراء أقل كمية ممكنة من السياج. إذا كانت أبعاد الحظيرة أعدادًا صحيحة، فأوجد بعدي القطعة التي تتطلب أقل كمية من السياج.

4) في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$؟



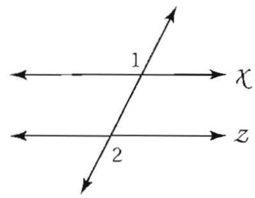
اختبار معياري

تراكمي، الفصول 3-1

أسئلة الاختيار من متعدد

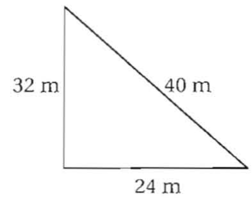
اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كان $m\angle 1 = 110°$، فما قيمة $m\angle 2$ التي تجعل المستقيمين x , z متوازيين؟



A $30°$ B $60°$ C $70°$ D $110°$

2) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه:



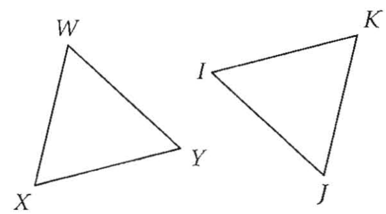
A متطابق الأضلاع

B متطابق الضلعين

C قائم الزاوية

D مختلف الأضلاع

3) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}, \overline{YX} \cong \overline{IK}, \angle X \cong \angle K$



فأيُّ العبارات الآتية تعبر عن تطابق هذين المثلثين؟

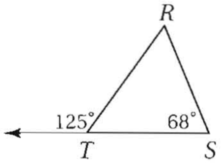
A $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$

B $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$

C $\triangle WXY \cong \triangle JKI$

D $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

4) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟



A $57°$

B $59°$

C $65°$

D $68°$

5) افترض أن قياس إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي $44°$، فما قياس زاوية رأس المثلث؟

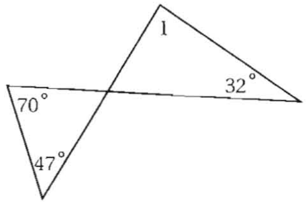
A $108°$

B $92°$

C $56°$

D $44°$

6) أوجد $m\angle 1$ بالدرجات؟



A $85°$

B $63°$

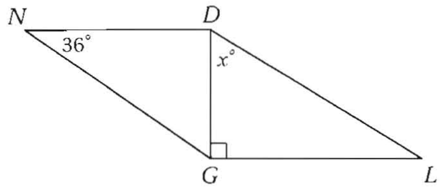
C $47°$

D $32°$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

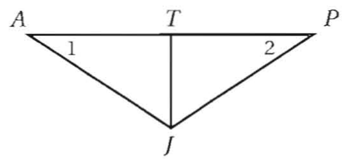
7) **إجابة شبكية،** إذا كان $\triangle LGD \cong \triangle NDG$ في الشكل أدناه، فما قيمة x؟



8) اكتب عكس العبارة الآتية:

"إذا كنتَ الرابحَ، فأنا الخاسر".

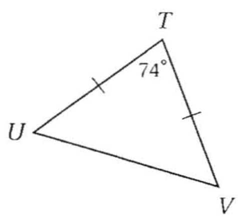
9) في الشكل أدناه $\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\overline{JT} \perp \overline{AP}$



حدد نظرية التطابق التي تبين أن $\triangle ATJ \cong \triangle PTJ$ باستعمال المعطيات الواردة في السؤال فقط، ووضح إجابتك.

10) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-5, 4)$, $(0, 3)$ بصيغة الميل والمقطع الصادي.

11) أوجد $m\angle TUV$ في الشكل أدناه.



12) افترض أن ضلعين في $\triangle ABC$ يطابقان ضلعين في $\triangle MNO$ ، وأن إحدى الزوايا غير المحصورة في $\triangle ABC$ تطابق إحدى الزوايا غير المحصورة في $\triangle MNO$ أيضًا، فهل المثلثان متطابقان، وإذا كانا كذلك فاكتب برهانًا حرًّا يثبت التطابق. وإذا كانا غير متطابقين فارسم مثالًا مضادًّا.

13) إذا علمت أن $\triangle EFG \cong \triangle DCB$، فاكتب الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثين.

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل.

14) استعمل ورقة رسم بياني لكتابة برهان إحداثي للعبارة الآتية:

المثلث الذي رؤوسه $A(0, 0), B(2a, b), C(4a, 0)$ هو مثلث متطابق الضلعين.

a) عيِّن الرؤوس على ورقة الرسم البياني.

b) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثّل AB.

c) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثّل BC.

d) استعمل النتائج التي توصلت إليها في الفرعين b , c ؛ لتدون استنتاجك عن $\triangle ABC$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن...	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس...	2-2	3-1	3-3	3-2	3-6	3-3	1-3	3-5	2-4	3-6	3-4	3-3	3-7

الفصل
4
العلاقات في المثلث
Relationships in Triangle

فيما سبق:

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهانًا غير مباشر.

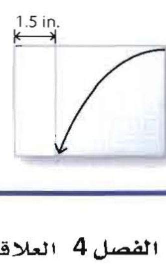
لماذا؟

التصميم الداخلي: تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

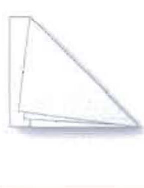
المطويات منظم أفكار

العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئًا بسبع أوراق رسم بياني.

1. **اجمع** الأوراق، واطوِ الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلى لتشكل مثلثات متطابقة وحافة مستطيلة.

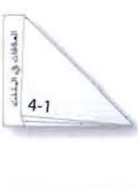


2. **اطوِ** الجزء المستطيل إلى نصفين.



3. **ثبّت** الأوراق على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.

4. **اكتب** عنوان الفصل على الحافة المستطيلة، ورقّم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة للمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.



التهيئة للفصل 4

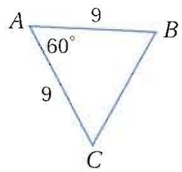
تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

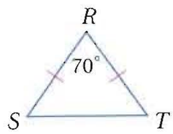
البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين :

1) BC **2)** $m\angle RST$





3) **حدائق:** ينشئ عبد الله حوضًا لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كل من ضلعي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرِّب إلى أقرب عدد صحيح)؟

ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي:

4) $\angle 3$, $\angle 4$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

5) $JKLM$ مربع.

6) $\overrightarrow{BD}$ منصِّف لِـ $\angle ABC$.

7) **تبرير:** حدِّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحًا دائمًا أو صحيحًا أحيانًا أو غير صحيح أبدًا. وفسِّر إجابتك.

المعطيات: D, E, F ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

حل كلًّا من المتباينات الآتية:

8) $x + 13 < 41$ **9)** $x - 6 > 2x$

10) $6x + 9 < 7x$ **11)** $8x + 15 > 9x - 26$

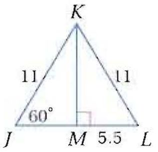
12) **صور:** أضافت نورة 15 صورة إلى ألبوم صورها، فأصبح عدد الصور أكبر من 120، فكم صورة كانت في الألبوم؟

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين :

a) JM **b)** $m\angle JKL$



a) بما أن $Jk = Kl$ (معطى) ، فإن

$m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن

$m\angle KMJ = m\angle KLM = 90°$ (زاويتان متكاملتان)، فإن

هذا يعني أن $\angle KMJ \cong \angle KLM$، ويكون $\triangle KMJ \cong \triangle KLM$

بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين

المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

b) $m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$60° + m\angle JKL + 60° = 180°$ $m\angle J = m\angle L = 60°$

$120° + m\angle JKL = 180°$ بالتبسيط

$m\angle JKL = 60°$ بالطرح

مثال 2

إذا كانت K نقطة منتصف $\overline{JL}$، فضع تخمينًا مبنيًّا على المعطيات الآتية، وارسم شكلًا يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$. وهذا يعني أنها تقع على بُعدين متساويين من J, L .

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

التحقق: ارسم $\overline{JL}$ ، وهذا يوضح التخمين.

مثال 3

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$.

$3x + 5 > 2x$ معطى

$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$ بالطرح

$5 > -x$ بالتبسيط

$-5 < x$ بالقسمة

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

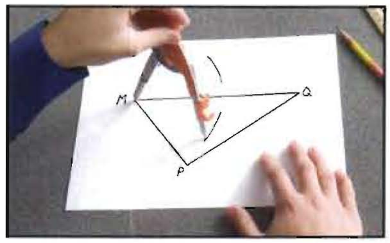
4-1 إنشاء المنصّفات
Constructing Bisectors

يمكنك استعمال فكرتي الأعمدة المنصّفة ومنصّفات الزوايا لرسم قطع مستقيمة خاصّة في المثلثات.

إنشاء هندسي 1 العمود المنصّف

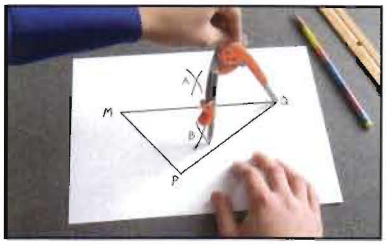
إنشاء العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث.

الخطوة 1:



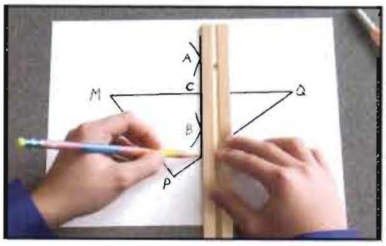
ارسم $\triangle MPQ$. ثم افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}MQ$ ، وارسم قوسًا من الرأس M فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها.

الخطوة 2:



استعمل فتحة الفرجار نفسها. وارسم من الرأس Q قوسًا فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها. وسمِّ نقطتي تقاطع القوسين A , B.

الخطوة 3:



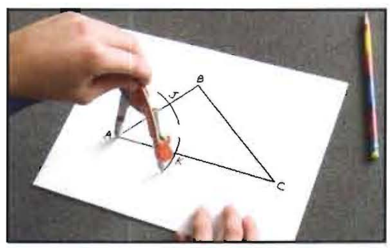
استعمل مسطرة غير مدرّجة وارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$. وسمّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}, \overline{MQ}$ بالحرف C.

منصّف زاوية في مثلث هو مستقيم يمر بأحد رؤوس المثلث وينصّف تلك الزاوية.

إنشاء هندسي 2 منصّف الزاوية

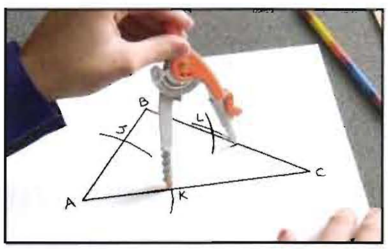
إنشاء منصّف زاوية في مثلث.

الخطوة 1:



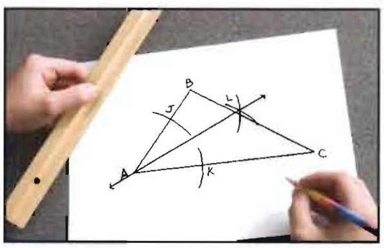
ثبّت الفرجار عند الرأس A ، وارسم قوسًا يقطع $\overline{AB}, \overline{AC}$. وسمِّ نقطتي التقاطع J , K .

الخطوة 2:



ثبّت الفرجار عند J ، وارسم قوسًا داخل الزاوية A ، وارسم من K قوسًا آخر، مستعملًا فتحة الفرجار نفسها، على أن يقطع القوس الأول في نقطة سمِّها L .

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overrightarrow{AL}$ ، فتكون $\overline{AL}$ منصّفة للزاوية A في $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ العمودين المنصّفين للضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. ثم أنشئ منصّفي الزاويتين الباقيتين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ حول نقطة التلاقي في الحالتين؟

كرّر الإنشاءين السابقين لكل نوع من المثلثات الآتية:

2) حادّ الزوايا

3) منفرج الزاوية

4) قائم الزاوية

4-1 المنصّفات في المثلث
Bisectors of Triangle

فيما سبق:

درستُ منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن:

- أتعرّف الأعمدة المنصّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرّف منصّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث
circumcenter

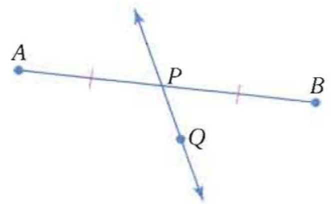
مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

www.obeikaneducation.com

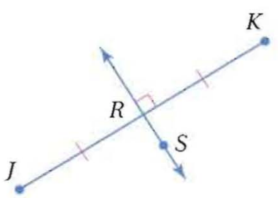
لماذا؟

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كل من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها. وإذا كان المنصّف عموديًا على القطعة سُمِّي **عمودًا منصّفًا**.



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لـ $\overline{AB}$



$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لـ $\overline{JK}$

تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط في المستوى تقع كل منها على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة. وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

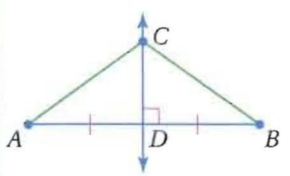
نظريتان — الأعمدة المنصّفة

أضف إلى مطويتك

4.1 نظريّة العمود المنصّف

كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.

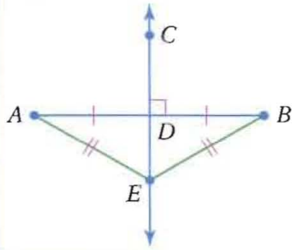
مثال: إذا كانت $\overline{CD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AB}$، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظريّة العمود المنصّف

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$، فإنّ E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$، وهو العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$.

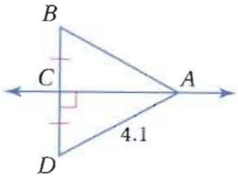


سوف تبرهن النظريتين 4.1, 4.2 في السؤالين 27, 29.

مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصّف

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

a) AB

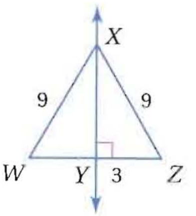


من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لـ $\overline{BD}$.

$AB = AD$ نظريّة العمود المنصّف

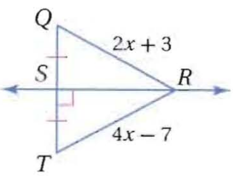
$AB = 4.1$ بالتعويض

b) WY



بما أنّ $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$ ، $WX = ZX$ فإن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لِـ $\overline{WZ}$ بحسب عكس نظرية العمود المنصّف.
ومن تعريف منصّف القطعة المستقيمة ينتج أن $WY = YZ$. وبما أن $YZ = 3$، فإن $WY = 3$.

c) RT



$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ نظريّة العمود المنصّف

$4x - 7 = 2x + 3$ بالتعويض

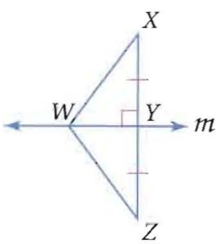
$2x - 7 = 3$ بطرح $2x$ من الطرفين

$2x = 10$ بإضافة 7 إلى الطرفين

$x = 5$ بقسمة الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

تحقق من فهمك

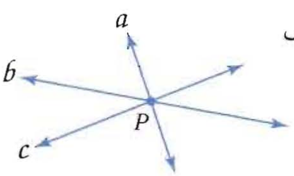


1A) إذا كان $WX = 25.3$, $YZ = 22.4$, $WZ = 25.3$ ، فأوجد طول XY.

1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$، فأوجد طول WX .

1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15$, $WZ = a + 12$
فأوجد طول WX.

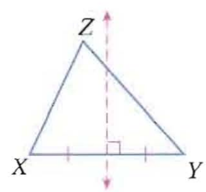
عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة فإنّ هذه المستقيمات تُسمى **مستقيمات متلاقية**. وتسمّى النقطة التي تلتقي فيها المستقيمات **نقطة التلاقي**.
وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **بمركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث**.



تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

إرشادات للدراسة

العمود المنصّف
ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل .
فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمَر بالرأس Z.

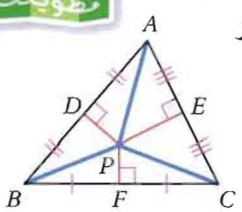


نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

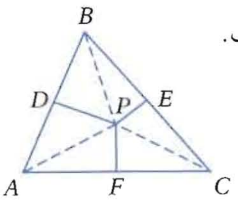
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمّى مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعادٍ متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، فإنّ $PB = PA = PC$.



برهان نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث



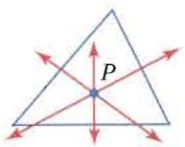
المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

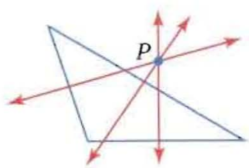
برهان حرّ:

بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لِـ $\overline{AC}$ فإنها متساوية البُعد عن A, C. وبحسب تعريف تساوي البعد يكون $AP = CP$. والعمود المنصّف لِـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$؛ إذن $AP = CP = BP$.

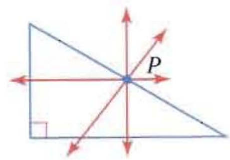
يمكن أن يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية

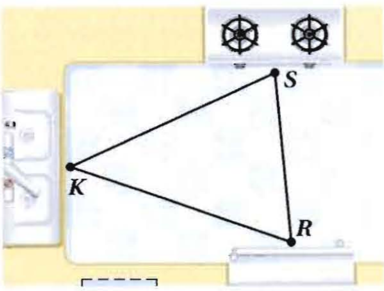


مثلث قائم الزاوية

الربط مع الحياة

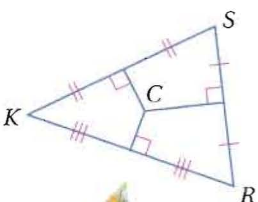
يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب أن **لا** يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظريّة مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث



تصميم داخلي: وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R.

بحسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.

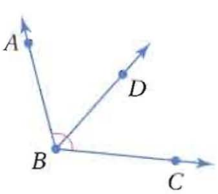


انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle SKR$. وهي النقطة المطلوبة.

تحقق من فهمك

2) يريد عليّ أن يضع مرشّ الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل. فأين يتعين عليه وضع المرشّ؟

منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصّف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. ويمكن أن يكون منصّف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم. كما يمكن أن يوصف منصّف الزاوية بأنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين.

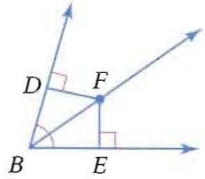


$\overrightarrow{BD}$ منصف لِـ $\angle ABC$.

أضف إلى مطويتك

نظريتان منصّفات الزوايا

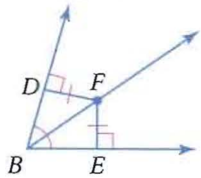
4.4 نظرية منصّف الزاوية



كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ فإن $DF = FE$.

4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية



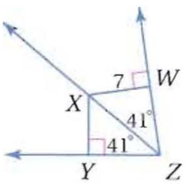
كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ ، فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$.

ستبرهن النظريتين 4.4, 4.5 في السؤالين 32,30

مثال 3 استعمال نظريتي منصّفات الزوايا

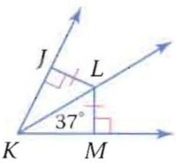
أوجد كل قياس مما يأتي :



a) XY

$XY = XW$	نظريّة منصّف الزاوية
$XY = 7$	بالتعويض

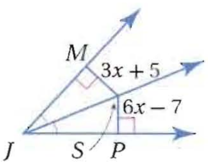
b) $m\angle JKL$



بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}, \overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}, \overline{LJ} = \overline{LM}$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.

$\angle JKL \cong \angle LKM$	تعريف منصّف الزاوية
$m\angle JKL = m\angle LKM$	تعريف الزوايا المتطابقة
$m\angle JKL = 37°$	بالتعويض

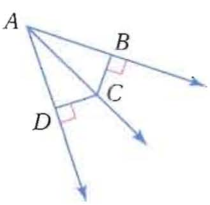
c) SP



$SP = SM$	نظريّة منصّف الزاوية
$6x - 7 = 3x + 5$	بالتعويض
$3x - 7 = 5$	نطرح $3x$ من الطرفين
$3x = 12$	بإضافة 7 إلى الطرفين
$x = 4$	بقسمة الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

تحقق من فهمك



3A) إذا كان $m\angle BAC = 38°, BC = 5, DC = 5$ ، فأوجد $m\angle DAC$

3B) إذا كان $m\angle BAC = 40°, m\angle DAC = 40°, DC = 10$ ، فأوجد BC .

3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، $BC = 4x + 8, DC = 9x - 7$ فأوجد BC

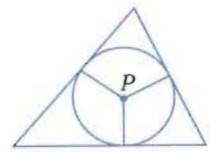
إرشادات للدراسة

منصّف الزاويـة
لا تعدّ المعلومة $JL = LM$ في الفرع b لوحدها كافية لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.

قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع دائمًا داخل المثلث.



وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

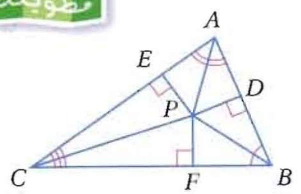
نظريّة 4.6

أضف إلى مطويتك

نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

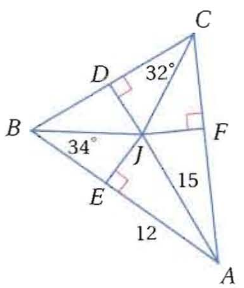
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC، فإنّ $PD = PE = PF$.



ستبرهن النظرية 4.6 في السؤال 28

مثال 4 استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.



a) JF

بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$ بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$ نظريّة فيثاغورس

$JE^2 + 12^2 = 15^2$ بالتعويض

$JE^2 + 144 = 225$ $12^2 = 144, 15^2 = 225$

$JE^2 = 81$ بطرح 144 من الطرفين

$JE = \pm 9$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ لذا نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.
وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$.

b) $\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$؛ إذن $m\angle CBE = 2(34°) = 68°$.
وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$؛ إذن $m\angle DCF = 2(32°) = 64°$.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$68° + 64° + m\angle FAE = 180°$ $m\angle CBE = 68°; m\angle DCF = 64°$

$132° + m\angle FAE = 180°$ بالتبسيط.

$m\angle FAE = 48°$ بطرح 132 من الطرفين.

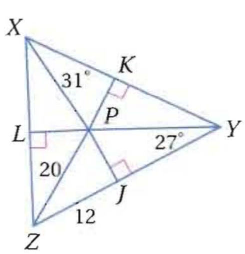
وبما أنّ $\overrightarrow{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48°) = 24°$.

تحقق من فهمك

إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

4A) PK

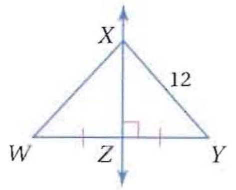
4B) $\angle LZP$



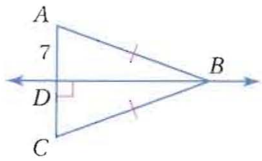
تأكـد

المثال 1 أوجد قياس كلٍّ مما يأتي:

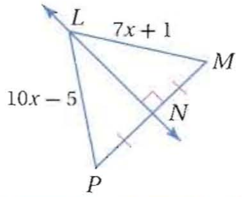
1) XW



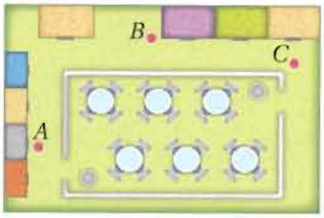
2) AC



3) LP

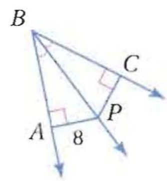


المثال 2 4) **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أمّا الرابع فهو الذي يزودهم بالإعلانات. انقل المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعادٍ متساوية من أصدقائه الثلاثة.

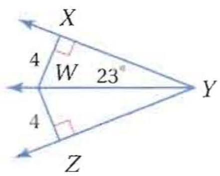


المثال 3 أوجد قياس كلٍّ مما يأتي :

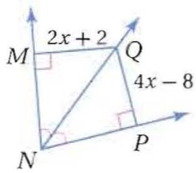
5) CP



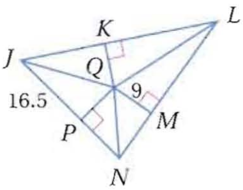
6) $\angle WYZ$



7) QM



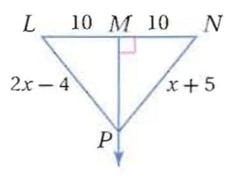
المثال 4 8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.



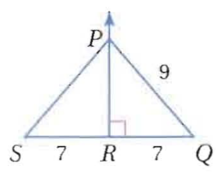
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قياس كلٍّ مما يأتي :

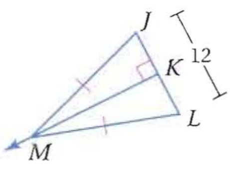
9) NP



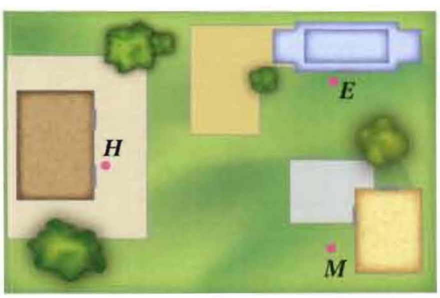
10) PS



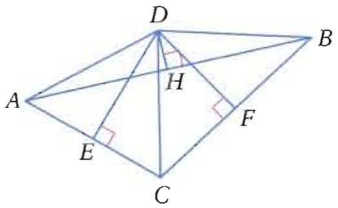
11) KL



المثال 2 12) **مدرسة :** يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة. انقل مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

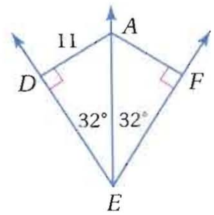


13) $\overline{AD}$

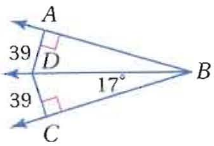
14) $\overline{AH}$

المثال 3 أوجد قياس كل مما يأتي :

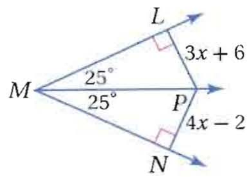
15) AF



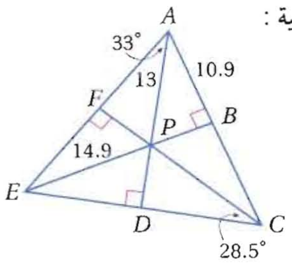
16) $\angle DBA$



17) PN



المثال 4 إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :



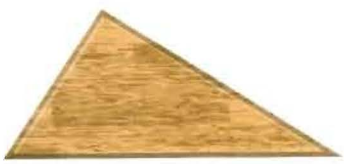
18) PB

19) DE

20) $\angle DAC$

21) $\angle DEP$

22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيّة عند مركز الطاولة المبينة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافها. انقل الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.



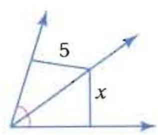
الربط مع الحياة

مهندس التصميم الداخلي

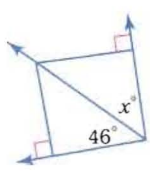
يزيّن مهندس التصميم الداخلي المكان؛ بحيث يجعله بهيج المنظر ومريحًا للإقامة أو العمل فيه. ويجب على مهندسي التصميم الداخلي أن يكونوا على معرفة بالألوان وتصاميم الإنارة وتخطيط المكان.

حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضّح إجابتك.

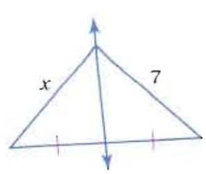
23)



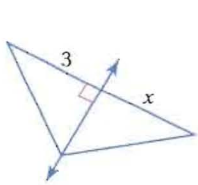
24)



25)



26)

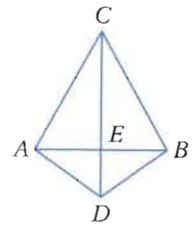


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

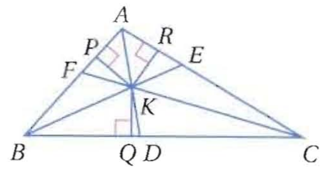
المطلوب: النقطتين C, D تقعان على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$.



28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصّفات لزوايا $\triangle ABC$،
$\overline{KP} \perp \overline{AB}$, $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$
$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $KP = KQ = KR$



مراجعة المفردات

المحل الهندسي
مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا.

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

29) النظرية 4.1

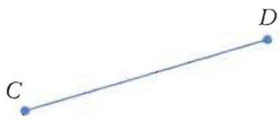
30) النظرية 4.5

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي إحداثيّا نقطتي طرفيها هما $A(-3, 1)$, $B(4, 3)$. ووضّح إجابتك.

32) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4.

33) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك.

34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$. صف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كل منها بُعدين متساويين عن C, D.



مسائل مهارات التفكير العليا

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له بداخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتي التلاقي.

تبرير: **حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك بإعطاء مثال مضاد أو كتابة برهان.**

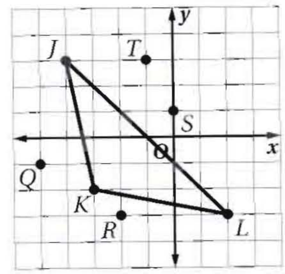
36) تتقاطع منصّفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

37) يكون العمود المنصّف للقاعدة في المثلث المتطابق الضلعين منصّفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتي التلاقي.

تدريب على الاختبار المعياري

39) بأيّ نقطتين يمر العمود المنصّف للضلع JL في $\triangle JKL$؟



A T, K **C** J, R

B L, Q **D** S, K

40) إذا كانت $x \neq -3$ ، فإن $\frac{3x+9}{x+3}$ يساوي:

A $x + 9$

B $x + 3$

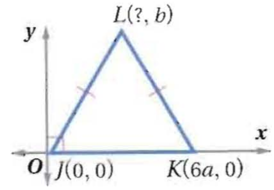
C x

D 3

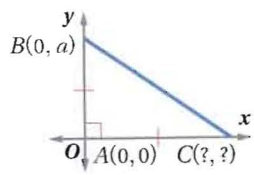
مراجعة تراكمية

عيّن الإحداثي المجهول في كل من المثلثات الآتية : (الدرس 3-7)

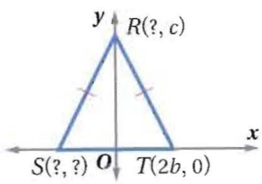
41)



42)



43)



أوجد البعد بين المستقيم والنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي : (الدرس 6-2)

44) $y = 5, (-2, 4)$

45) $y = 2x + 2, (-1, -5)$

46) $2x - 3y = -9, (2, 0)$

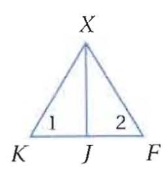
استعد للدرس اللاحق

47) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع.

$\overline{XJ}$ تنصّف $\angle X$.

المطلوب: J نقطة منتصف $\overline{KF}$.



استكشاف

معمل الهندسة:

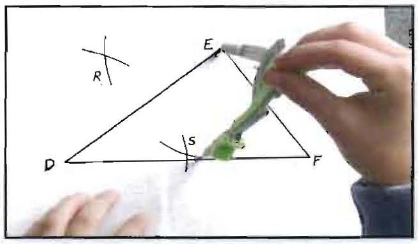
4-2 إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات
Constructing Medians and Altitudes

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ويمكنك استعمال طريقة تعيين نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة لإنشاء قطعة متوسطة.

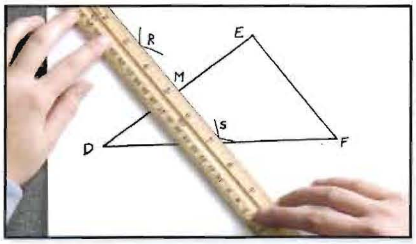
إنشاء هندسي 1
قطعة متوسطة لمثلث

الخطوة 1:



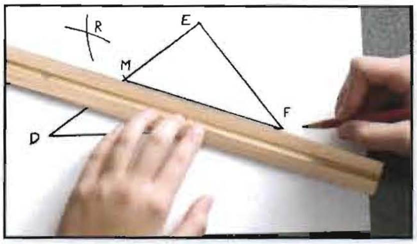
ارسم أقواسًا متقاطعة فوق $\overline{DE}$ وتحتها، وسمّ نقطتي التقاطع R, S.

الخطوة 2:



استعمل مسطرة غير مدرجة لإيجاد نقطة تقاطع $\overline{RS}, \overline{DE}$، وسمّ نقطة المنتصف M.

الخطوة 3:

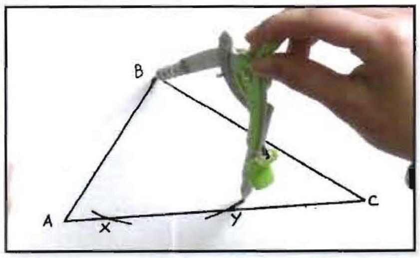


ارسم مستقيمًا يمّر بالنقطتين F, M فتكون $\overline{FM}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل، وتكون عموديّة عليه.

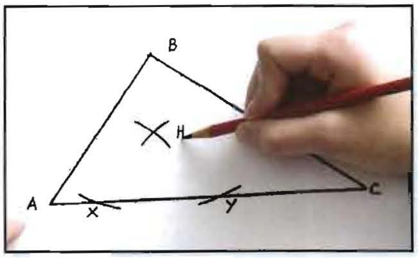
إنشاء هندسي 2
ارتفاع المثلث

الخطوة 1:



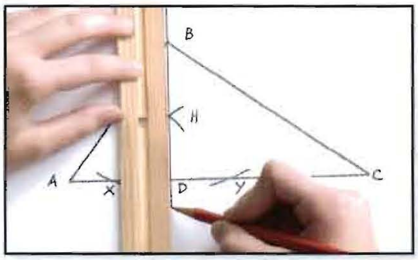
ثبّت الفرجار عند الرأس B، وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ في النقطتين X, Y.

الخطوة 2:



عدّل فتحة الفرجار على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبّته عند X، وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$، ثم استعمل الفتحة نفسها وارسم قوسًا آخر من Y، وسمّ نقطة تقاطع القوسين H.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$، وسمّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BH}, \overline{AC}$ بالحرف D. فتكون $\overline{BD}$ ارتفاعًا لِـ $\triangle ABC$ وهي عموديّة على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ القطعتين المتوسطتين على الضلعين الآخرين في $\triangle DEF$. ماذا تلاحظ بالنسبة للقطع المتوسطة للمثلث؟

2) أنشئ الارتفاعين الآخرين على الضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
Medians and Altitudes of Triangles

فيما سبق:

درستُ الأعمدة المنصِّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن:

- أتعرَّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرَّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

القطعة المتوسطة
median
مركز المثلث
centroid
الارتفاع
altitude
ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

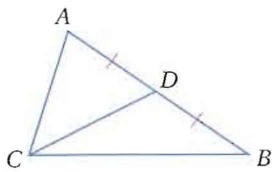
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يتزن على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو بحاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها. ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسطة: **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع دائمًا بداخله.



$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

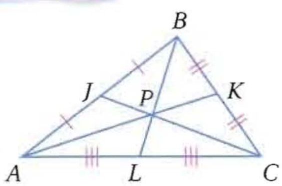
نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$، فإنّ

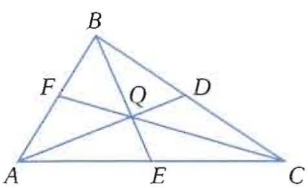
$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$



ستبرهن النظرية 4.7 في السؤال 23

مثال 1 استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من BQ , QE .



$BQ = \frac{2}{3}BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	بطرح 6 من الطرفين

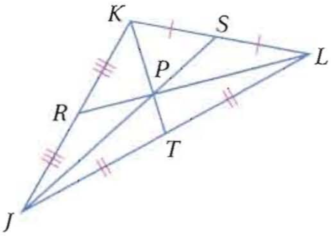
تحقق من فهمك

في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولي القطعتين الآتيتين :

(1A FQ

(1B QC

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث



في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$، فأوجد KP.

بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$. وبالمثل نستنتج أن S, T نقطتا منتصفي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{JS}$ ، $\overline{KT}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$. لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصية التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	بطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين
$KP = 4$	بضرب الطرفين في 3

تحقق من فهمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $RP = 3.5$ ، $JP = 9$ ، فأوجد طولي القطعتين الآتيتين:

2A) PL **2B)** PS

إرشادات للدراسة

استعمال الحس العددي

في المثال 2، يمكنك أيضًا استعمال الحسّ العددي لإيجاد KT. بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$؛ لذا فإذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

جميع المضلعات لها نقطة اتزان أو مركز، ومركز المثلث هو نقطة الاتزان له.

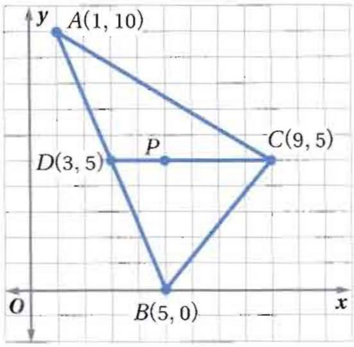
مثال 3 من واقع الحياة إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

فن الأداء: يُخطط عبدالعزيز في مهرجان رياضي لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور. وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$.
فما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة. وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$. وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ لذا استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثلثي طول القطعة المتوسطة.

حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .



أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10), B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة. والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$، أيْ 6 وحدات.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$، أو 4 وحدات إلى اليسار من C. وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$، أيْ 7.5 وحدات. وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5، إذن P تقع على بعد 5 وحدات إلى الأعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓

تحقق من فهمك

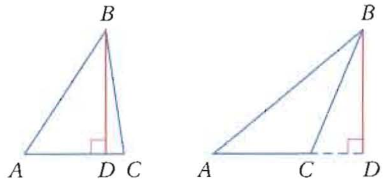
3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(0, 4)$, $(6, 11.5)$, $(12, 1)$ فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضّح إجابتك.

قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس. ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{BD}$ **هو الارتفاع من** B **إلى** $\overline{AC}$.

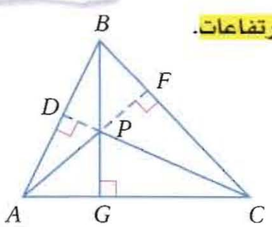
ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحتويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي — ملتقى الارتفاعات

أضف إلى مطويتك

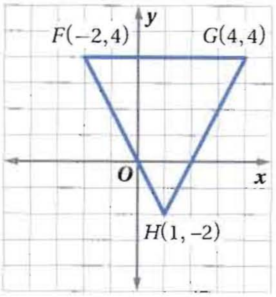
تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيّ مثلث في نقطة تُسمَّى **ملتقى الارتفاعات**.

مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC.



مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثية: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2,4)$ ، $G(4,4)$ ، $H(1,-2)$ ، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًّا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$.

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $2=\frac{4-(-2)}{4-1}$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y-4=-\frac{1}{2}[x-(-2)]$ ، $(x_1,y_1)=F(-2,4)$, $m=-\frac{1}{2}$

$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$ بالتبسيط

$y-4=-\frac{1}{2}x-1$ خاصية التوزيع

$y=-\frac{1}{2}x+3$ بإضافة 4 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $-2=\frac{-2-4}{1-(-2)}$ ، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$.

$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y-4=\frac{1}{2}(x-4)$ ، $(x_1,y_1)=G(4,4)$, $m=\frac{1}{2}$

$y-4=\frac{1}{2}x-2$ خاصية التوزيع

$y=\frac{1}{2}x+2$ بإضافة 4 إلى الطرفين

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x ، فينتج أن $2y=5$ ، ومن ثم فإن $y=\frac{5}{2}$.

$y=\frac{1}{2}x+2$ معادلة الارتفاع من G

$\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x+2$ ، $y=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x$ بطرح $\frac{4}{2}$ ، أو 2 من الطرفين

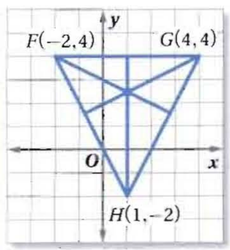
$1=x$ بضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle JKL$ هي $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1,2\frac{1}{2}\right)$.

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

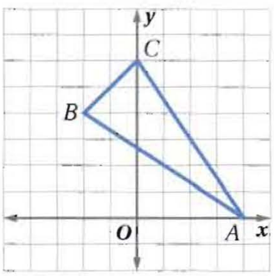
استعمل ركن ورقة لرسم الارتفاع لكل ضلع من أضلاع المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1,2\frac{1}{2}\right)$ ؛ لذا فالجواب معقول.

تحقق من فهمك

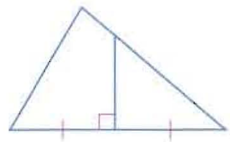
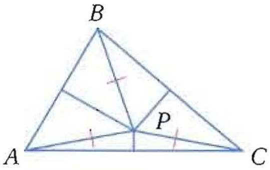
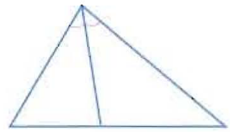
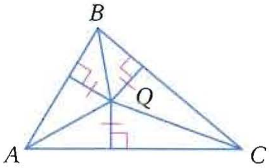
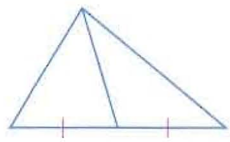
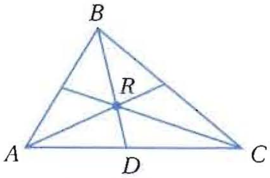
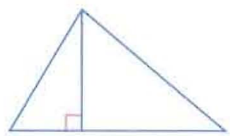
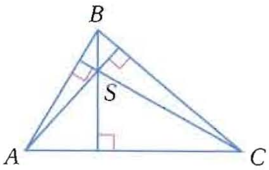
4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.



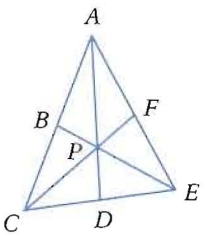
ملخص المفاهيم

قطع مستقيمة ونقاط خاصّة في المثلث

أضف إلى مطويتك

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصّية	مثال
العمود المنصّف		مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصّف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ،وتبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

تأكد



المثالان 1, 2 إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $AD = 15$ ، $PF = 6$.
فأوجد طولي القطعتين الآتيتين:

1) PC

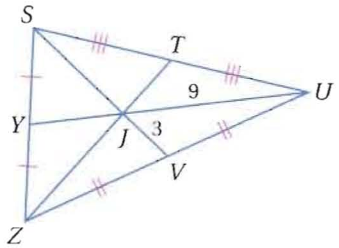
2) AP

المثال 3 **3)** **تصميم داخلي:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6), (5, 2), (7, 10)$. فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟

المثال 4 **4)** **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 ,1



في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد طول كلٍّ مما يأتي:

5) YJ

6) SJ

7) YU

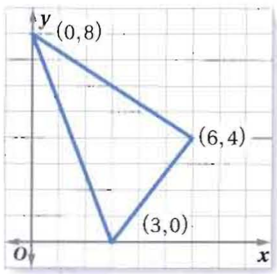
8) SV

9) JT

10) ZJ

المثال 3

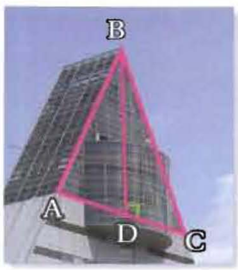
11) **تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحة مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبّت الخيط؟



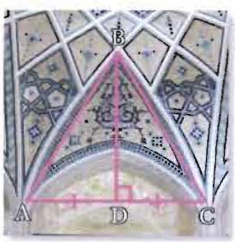
المثال 4

12) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه $J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

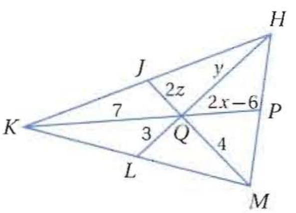
صنّف $\overline{BD}$ في كل من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13) 

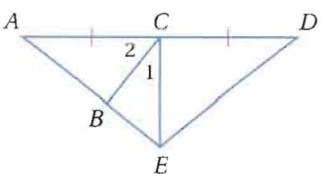
14) 

15) 

16) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$, $\overline{HM}$, $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z.



17) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعًا لِـ $\triangle AED$، $m\angle 1 = (2x+7)^\circ$, $m\angle 2 = (3x+13)^\circ$، فأوجد كلًّا من $m\angle 1, m\angle 2$.



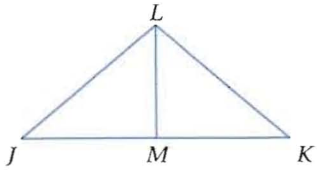
الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم سواءً كان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح، ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودًا منصّفًا، أو قطعة متوسطة ، أو ارتفاع لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



18) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$

19) $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

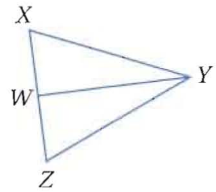
20) $\overline{JM} \cong \overline{KM}$

21) $\overline{LM} \perp \overline{JK}\ ,\ \overline{JL} \cong \overline{KL}$

22) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$، $\angle Y$ تتصّف $\overline{WY}$

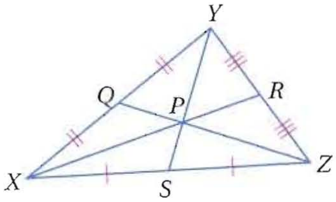
المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



23) **برهان:** اكتب برهانًا جبريًّا.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$ (النظرية 4-7)



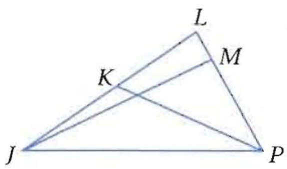
24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

a) **عمليًّا:** أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة ومتطابقة الأضلاع على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِ كل مثلث لتحدّد موقع مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

b) **لفظيًّا:** خمّن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

c) **بيانيًّا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث، ومركز الدائرة الداخلية ، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطة منها.

جبر: في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = (3x - 6)^\circ\ , JK = 3y - 2\ , LK = 5y - 8$.

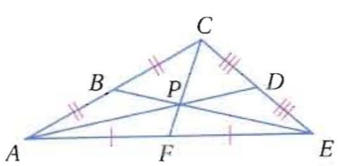


25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعًا لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور.
ولكن عبد الكريم لم يوافقه على ذلك. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



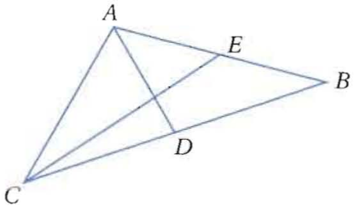
28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالًا مضادًّا.
"ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة".

تاريخ الرياضيات

بيير دو فيرما
(1601م – 1665م)

هناك مركز آخر للمثلث هو نقطة فيرما التي مجموع أبعادها عن رؤوس المثلث أقل ما يمكن. ويُعد فيرما واحدًا من أشهر الرياضيين في كتابة البراهين.

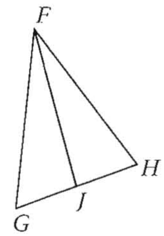
29) تحدٍّ: إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ في الشكل المجاور قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $\overline{AD} \perp \overline{CE}$, $AB = 10$, $CE = 9$. فأوجد CA .



30) اكتب: استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

تدريب على الاختبار المعياري

31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ، فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟



A $\overline{FJ}$ ارتفاع لـ $\triangle FGH$

B $\overline{FJ}$ منصّف زاوية في $\triangle FGH$

C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في $\triangle FGH$

D $\overline{FJ}$ عمود منصّف في $\triangle FGH$

32) ما المقطع x للمستقيم $4x - 6y = 12$ ؟

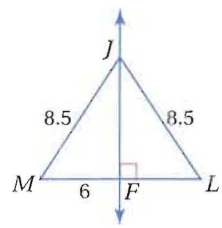
A 3 **C** -3

B 2 **D** -2

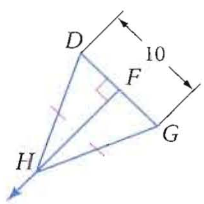
مراجعة تراكمية

أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي : (الدرس 1-4)

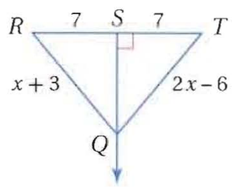
33) LM



34) DF



35) TQ



36) ارسم المثلث المتطابق الضلعين QRT الذي طول قاعدته $\overline{QR}$ يساوي b وحدة، وسمِّه: (الدرس 7-3)

37) بيّن ما إذا كان $\overleftrightarrow{JK}$, $\overleftrightarrow{RS}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك حيث $R(1, 1), S(9, 8), J(-6, 1), K(2, 8)$. ارسم كل مستقيم لتتحقق من إجابتك. (الدرس 3-2)

استعد للدرس اللاحق

اكتب < أو > داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة.

38) $\frac{19}{27} \bigcirc -\frac{18}{25}$

39) $\frac{5}{16} \bigcirc \frac{3}{8}$

40) $\frac{3}{5} \bigcirc 2.7$

41) $-\frac{19}{4} \bigcirc -4.25$

4-3 المتباينات في المثلث
Inequalities in One Triangle

فيما سبق:
درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:
- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمىّ التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع. ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

مفهوم أساسي — تعريف المتباينة
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$.

مثال إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإنَ $5 > 3$ وَ $5 > 2$.

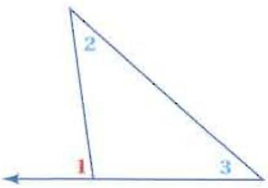
وفي الجدول أدناه قائمة ببعض خصائص المتباينات التي درستها.

مفهوم أساسي — خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية
أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c.

خاصيّة المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b, b > c$ فإن $a > c$.
خاصية الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.

يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.



تأمّل $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ في الشكل المجاور.

تعلم من نظرية الزاوية الخارجيّة أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$.

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة نستنتج أن:

$$m\angle 1 > m\angle 3 \quad \text{وَ} \quad m\angle 1 > m\angle 2$$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

مراجعة المفردات

الزاويتان الداخليتان البعيدتان

لكل زاوية خارجيّة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.

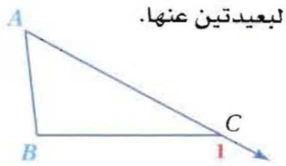
نظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجيَّة

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

مثال: $m\angle 1 > m\angle A$

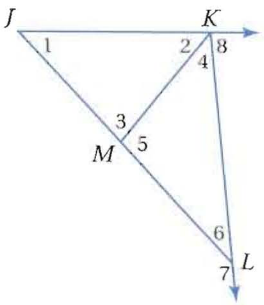
$m\angle 1 > m\angle B$



ستبرهن هذه النظرية في الدرس 4-4.

مثال 1 استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجيَّة

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 5$, $\angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

$m\angle 7 > m\angle 4$, $m\angle 7 > m\angle 5$.

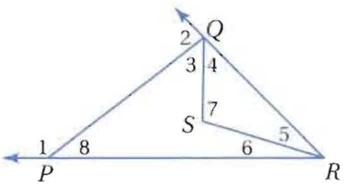
وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لـ $\triangle JKL$، والزاويتان $\angle 1$, $\angle JKL$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle JKL$. وبما أنّ $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$، وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أن $\angle 8$ زاوية خارجيّة لـ $\triangle JKL$، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$؛ لذا فقياس كل من $\angle 8$, $\angle 3$ أكبر من $m\angle 6$.

تحقق من فهمك



1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

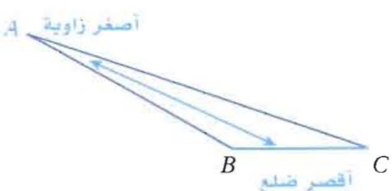
1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$

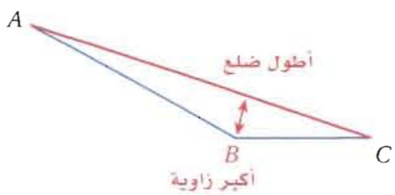
متباينتا زاوية-ضلع: تعلمت في الدرس 6-3، أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان. ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

تنبيه!

تحديد الضلع المقابل

انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة. فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.





لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا.

تنبيه !

رمزا الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$)، وخاصّة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

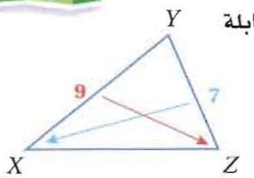
إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات. ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

نظريتان العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

أضف إلى مطويتك

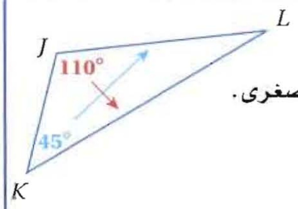
4.9 **إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.**

مثال بما أنّ $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.

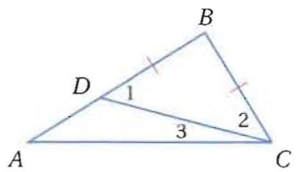


4.10 **إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.**

مثال بما أنّ $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.



برهان النظرية 4.9



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين. وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 1 \cong \angle 2$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

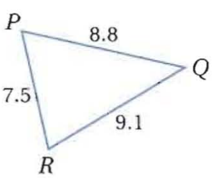
واعتمادًا على مسلمة جمع الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1 , m\angle 1 > m\angle A$، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.

ستبرهن النظرية 4.10 في الدرس 4-4

مثال 2 ترتيب زوايا المثلث وفقًا لقياساتها

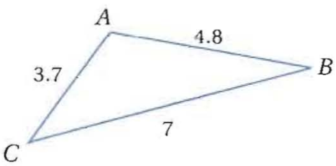
اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.



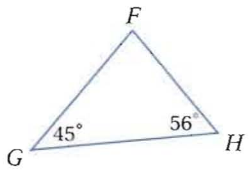
الأضلاع مرتّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle P$, $\angle R$, $\angle Q$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle P$, $\angle R$, $\angle Q$

تحقق من فهمك

2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ وأضلاعه مرتبّةً من الأصغر إلى الأكبر.



مثال 3 ترتيب أضلاع المثلث وفقًا لأطوالها



اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتّبة من الأقصر إلى الأطول.

أجد أولًا قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

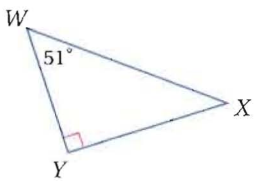
$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$ على الترتيب.

إذن فالأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$.

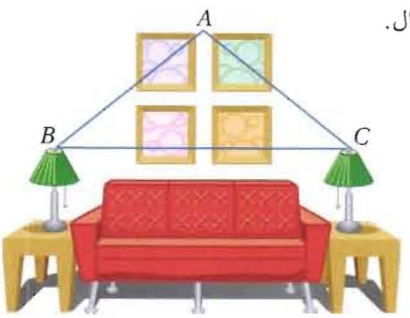
تحقق من فهمك



3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

ويمكنك استعمال العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة العلاقات بين الزوايا والأضلاع



تصميم داخلي: يستعمل مصمّم التثليث؛ لترتيب غرفة الاستقبال. فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسِّر إجابتك

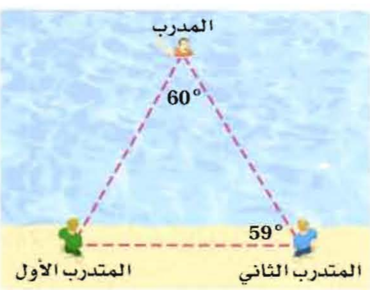
بحسب النظرية 4.10، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لِـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$، فإنّ $AC < BC$؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبر من المسافة بين النقطتين A, C.

الربط مع الحياة

تتضمن برامج إعداد المنقذين في السباحة تدريبًا على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدّة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعة تبعًا لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.

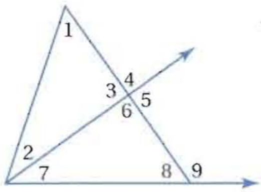
تحقق من فهمك

4) **سبّاحو الإنقاذ:** يُمثّل المدرّب في أثناء التدريب على الإنقاذ، شخصًا في خطر ليتمكن المتدربان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدربان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأي المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟



تأكد

المثال 1 استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :



1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

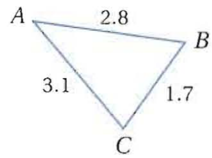
2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$.

3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

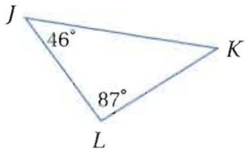
4) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

المثالان 2, 3 اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين :

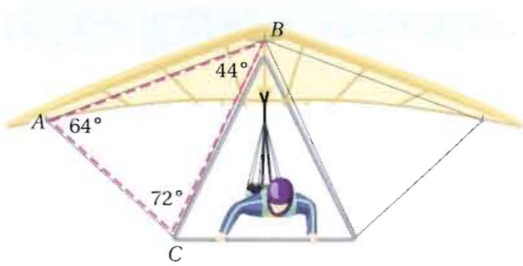
5)



6)

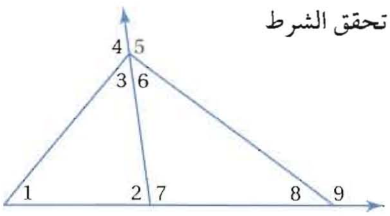


المثال 4 **7)** **طيران شراعي:** تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي:



8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

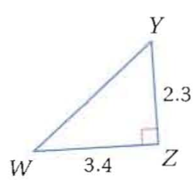
9) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

10) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

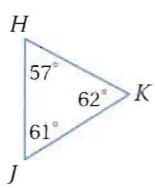
11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.

المثالان 2, 3 اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في كل مما يأتي:

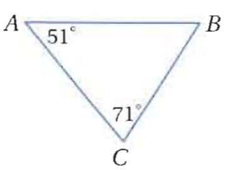
12)



13)



14)



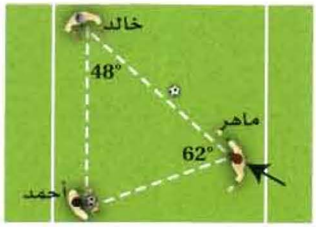
المثال 4

الربط مع الحياة

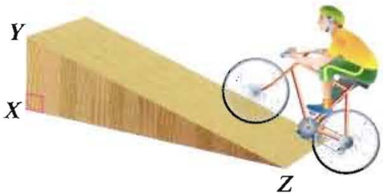
بينت إحدى الدراسات أن فريق كرة القدم يصبح في حالة الهجوم ما بين 45—65 مرة في المباراة الواحدة.

والفريق المتميز هو الذي يتميز بقدرته على تنفيذ الهجمات بشكل جيد، وفي الوقت نفسه يستطيع الاحتفاظ بدفاع متماسك.

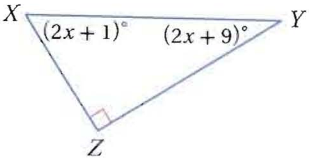
15) **كرة قدم:** يقف أحمد وخالد وماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه. ويريد ماهر أن يمرر الكرة إلى أحد زميليه على أن تكون مسافة التمريرة أقصر. أيهما يختار: خالد أم أحمد؟



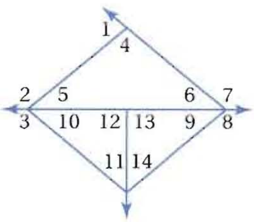
16) **منحدرات:** يمثّل المنحدر طريقًا للدراجات الهوائية. فأيّهما أطول: طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$؟ وضّح إجابتك باستعمال النظرية 4.9.



17) اكتب زوايا المثلث المجاور وأضلاعه مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر:



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي:

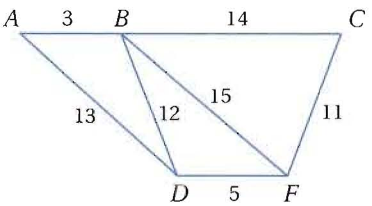


18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ **19)** $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

20) $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ **21)** $\angle 3, \angle 11, \angle 12$

22) $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ **23)** $\angle 8, \angle 10, \angle 11$

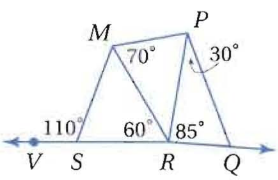
استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كل من الأسئلة الآتية:



24) $\angle ABD, \angle BDA$ **25)** $\angle BCF, \angle CFB$

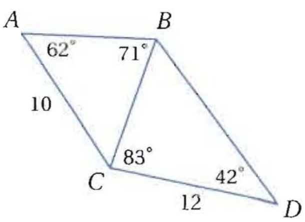
26) $\angle BFD, \angle BDF$ **27)** $\angle DBF, \angle BFD$

استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كل من الأسئلة الآتية:



28) $\overline{SM}, \overline{MR}$ **29)** $\overline{RP}, \overline{MP}$ **30)** $\overline{RQ}, \overline{PQ}$

31) اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتّبة من الأقصر إلى الأطول. ووضّح إجابتك.



32) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث.

المثلث	AB	BC	$AB+BC$	CA
الحاد الزوايا				
المنفرج الزاوية				
القائم الزاوية				

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمّ رؤوس كل مثلث A, B, C.

b) **جدوليًا:** استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انقل الجدول إلى دفترك وأكمله.

c) **جدوليًا:** نظم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع AB, CA في الجدول الآخر.

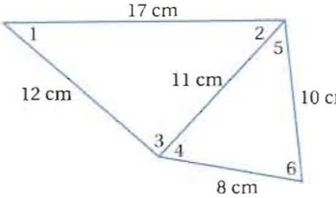
d) **جبريًا:** اكتب متباينة لكل جدول كوّنته تربط بين مجموع طولي الضلعين في مثلث وطول الضلع الثالث.

e) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين مجموع طولي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **تبرير:** هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائمًا أو أحيانًا أو لا تكون أبدًا؟ وضّح إجابتك.

34) **تحدٍّ:** استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛ لترتب قياسات الزوايا المرقّمة من الأصغر إلى الأكبر، إذا علمت أنّ $m\angle 2 = m\angle 5$. ووضّح إجابتك.



35) **اكتب:** وضّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا؟

تدريب على الاختبار المعياري

36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث $45°, 92°$، فما نوع هذا المثلث؟

A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع

B حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع

C منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين

D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين

37) أيُّ عبارة عددية مما يأتي لها أصغر قيمة؟

A $|45|$

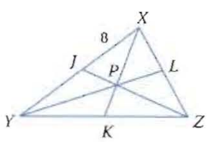
B $|15|$

C $|-28|$

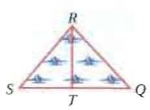
D $|-39|$

مراجعة تراكمية

38) **هندسة إحداثية:** اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$. (الدرس 4-1)



39) **طائرات:** يطير سرب من الطائرات على هيئة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$، إذا كانت النقطة T منتصف $\overline{SQ}$، $SR \cong \overline{QR}$. (الدرس 3-4)



استعد للدرس اللاحق

إذا كان $x = 8, y = 2, z = 3$، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ:

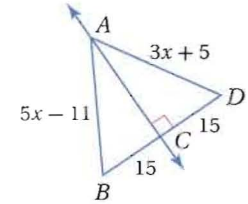
40) $z(x - y) = 13$

41) $2x = 3yz$

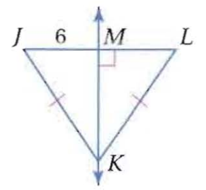
42) $x + y > z + y$

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

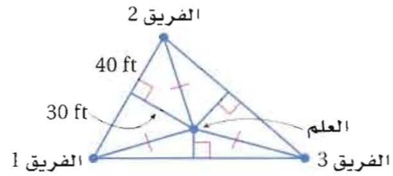
1) AB



2) JL

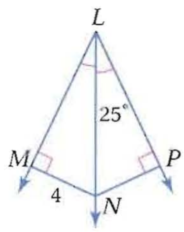


3) **مخيّم:** يلعب المشاركون في مخيَّم كشفي لعبة الفوز بالعلم. إذا كانت الفرق الثلاثة تقف في الأماكن المبينة في الشكل أدناه، والعلم مثبّت عند نقطة متساوية البعد عن الفرق الثلاثة، فما المسافة بين العلم وكل من هذه الفرق؟ (الدرس 4-1)

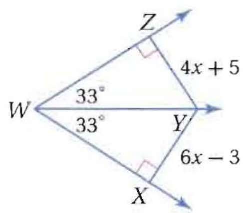


أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

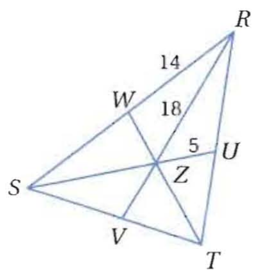
4) $\angle MNP$



5) XY



إذا كانت Z مركز $\triangle RST$، $RZ = 18$.
فأوجد كلًّا من الأطوال الآتية: (الدرس 4-2)



6) ZV

7) SZ

8) SR

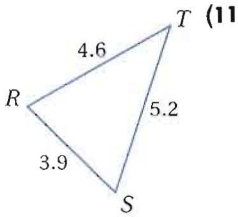
هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيات مركز كل مثلث عُلمت رؤوسه في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-2)

9) $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$

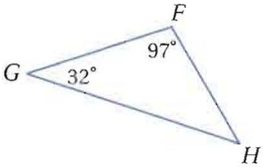
10) $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$

اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

11)



12)

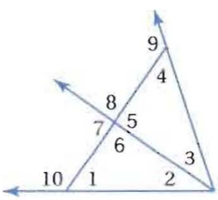


13) **مسافات:** في الخريطة أدناه، إذا علمت أن $m\angle C = 70°$ ، $m\angle A = \frac{2}{3}m\angle B$، فأجب عما يأتي: (الدرس 4-3)

a) أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين A , B .

b) رتِّب أطوال أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول.

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-3)



14) قياسها أقل من $m\angle 8$.

15) قياسها أكبر من $m\angle 3$.

16) قياسها أقل من $m\angle 10$.

4-4 البرهان غير المباشر
Indirect Proof

فيما سبق:
درستُ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

والآن:
- أكْتُب براهين جبريّة غير مباشرة.
- أكْتُب براهين هندسيّة غير مباشرة.

المفردات:
التبرير غير المباشر
indirect reasoning
البرهان غير المباشر
indirect proof
البرهان بالتناقض
proof by contradiction

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يصف شارلوك هولمز أسلوبه في كشف الغموض كالآتي: «تبدأ العملية بافتراض، وعندما تستبعد كل ما هو غير معقول، فما الذي سيبقى؟ ... إنّها الحقيقة». هذه الطريقة التي وصفها شارلوك هولمز مثال على البرهان غير المباشر.

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها التبرير، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة . وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع أيّ حقيقة سابقة كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًا فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة. يسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

مفهوم أساسي — كتابة البرهان غير المباشر

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ عكسها صحيح.

الخطوة 2: استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع حقيقة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريّة.

الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيِّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

مثال 1 صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

a) $\angle ABC \not\cong \angle XYZ$

الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) **إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n ، فإن 2 عامل للعدد n .**

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n . ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n ؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n .

c) **$\angle 3$ زاوية منفرجة.**

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاوية منفرجة.

تحقق من فهمك

1A) $x > 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

قراءة الرياضيات

التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينص على أنه لا يمكن تحقق الافتراض و عكسه في آن واحد.

يمكن أن تُستعمل البراهين غير المباشرة لإثبات صحّة المفاهيم الجبريّة.

مثال 2 كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$.

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

الخطوة 2: كوّن جدولًا بعدّة قيم ممكنة لـ $x > -4$ ، أو $x = -4$.

x	-4	-3	-2	-1	0
$-3x+4$	16	13	10	7	4

عندما تكون $x > -4$ ، فإن $-3x + 4 < 16$. وعندما $x = -4$ ، فإن $-3x + 4 = 16$.

الخطوة 3: في كلتا الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $-3x + 4 > 16$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصليّة $x < -4$ هي الصحيحة.

تحقق من فهمك

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإنّ $x > 8$.

2B) إذا كان $-c$ موجبًا ، فإنّ c سالبٌ.

ويمكنك أن تستعمل البرهان غير المباشر في المواقف الحياتية اليوميّة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تسوق: **اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالًا. وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامد عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.**

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، y ثمن القميص الثاني.

المطلوب: إثبات أن: قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كل من القميصين لا يزيد على 30 ريالًا، أي أنّ $x \leq 30 , y \leq 30$.

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30 , y \leq 30$ ، فإنّ $x + y \leq 60$. وهذا تناقض، لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \leq 30 , y \leq 30$ افتراض خطأ. لذلك يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالًا.

تحقق من فهمك

3) **رحلة:** قطع رياض أكثر من 360 كيلومترًا في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلومترًا في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

تُستعمل البراهين غير المباشرة عادة لإثبات مفاهيم في نظرية الأعداد. ويكون من المفيد في هذه البراهين تذكّر أنّه يمكنك تمثيل العدد الزوجي على الصورة $2k$، والعدد الفردي على الصورة $2k + 1$ حيث k عدد صحيح.

مثال 4 براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًّا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x + 2 = (2k + 1) + 2$	بالتعويض
$= (2k + 2) + 1$	خاصية الإبدال
$= 2(k + 1) + 1$	خاصية التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. بما أن k عدد صحيح فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$، فيكون:

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$	بالتعويض

إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$، حيث m عدد صحيح. ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحة.

تحقق من فهمك

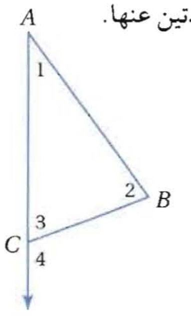
4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كان مربع عدد صحيح فرديًّا فإنّ العدد الصحيح فرديٌّ".

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة.

> **تنبيه!**
> **البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد**
> البرهان بالتناقض واعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يساعدك المثال المضاد على تفنيد تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.

مثال 5 برهان هندسي

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \not> m\angle 1$، أو $m\angle 4 \not> m\angle 2$.
أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ يؤدي إلى تناقض، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 2$ إلى تناقض أيضًا .

الافتراض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ يعني أن $m\angle 1 = m\angle 4$ أو $m\angle 1 < m\angle 4$.

الحالة 1: $m\angle 1 = m\angle 4$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$	بالتعويض
$0 = m\angle 2$	بطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0 ؛ لذا فإن $m\angle 1 \neq m\angle 4$.

الحالة 2: $m\angle 1 < m\angle 4$

بحسب نظرية الزاوية الخارجيّة فإن $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$. وبما أن قياسات الزوايا موجبة، فإنّ تعريف المتباينة يُحتّم أن تكون $m\angle 1 > m\angle 4$. وهذا يناقض الفرض بأن $m\angle 1 < m\angle 4$.

الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصليّة بأنّ $m\angle 4 > m\angle 1$ وأن $m\angle 4 > m\angle 2$ يجب أن تكون صحيحة.

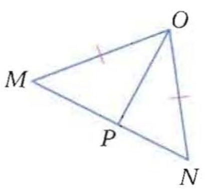
إرشادات للدراسة

تعرّف التناقضات

تذكّر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5 ، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا غير مباشر.



المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$

تأكد

المثال 1 اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$ ، فإنّ $x < 6$.

4) $\angle A$ ليست زاوية قائمة.

المثال 2 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

5) إذا كان $2x + 3 < 7$ ، فإنّ $x < 2$.

6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإنّ $x > 4$.

المثال 3 **7)** **كرة قدم:** سجّل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3 .

المثال 4 **8)** اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $5x - 2$ عددًا فرديًا، فإن x عدد فردي.

المثال 5 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين:

9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنّه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:**

11) إذا كان $2x > 16$ ، فإنّ $x > 8$.

12) $\angle 2$, $\angle 1$ زاويتان غير متكاملتين.

13) إذا كان ميلا مستقيمين متساويين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2 .

المثال 2 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:**

15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.

16) إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإنّ $x < -9$.

المثال 3 **17)** **ألعاب حاسوب:** اشترى منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسابيع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التبرير غير المباشر؛ لتبين أن إحدى اللعبتين على الأقلّ كلّفت أكثر من 200 ريال.

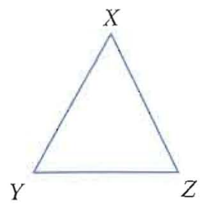
18) **جمع التبرّعات:** أقامت جمعيّة خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحتاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالًا، وللأطفال 12.5 ريالًا. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار.

المثالان 4, 5 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:**

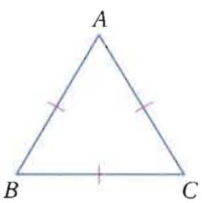
19) **المعطيات:** xy عدد صحيح فردي.
المطلوب: كلًّا من x, y عدد صحيح فردي

20) **المعطيات:** n^2 عدد زوجي.
المطلوب: n^2 يقبل القسمة على 4.

21) **المعطيات:** $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \not\cong \angle Y$



22) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.



23) يمكن أن يكون للمثلث زاوية قائمة واحدة فقط.

24) اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10.

25) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$ ، فإن b عدد سالب.

26) **كرة سلة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قُبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان فريق مدرسته متقدّمًا بـ 28 نقطة مقابل 26 . وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدمًا بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم ذلك أنّ لاعبًا من الفريق المنافس سجّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحّة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.

الربط مع الحياة

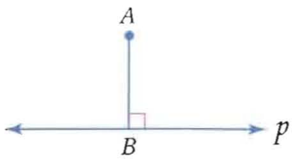
هناك أكثر من طريقة لتسجيل ثلاث نقاط في كرة السلة، منها التسجيل من خارج المنطقة، ومنها أن يسجّل اللاعب نقطتين ويحصل على خطأ يسجل منه نقطة.

27) **ألعاب إلكترونية:** تتضمن لعبة حاسوبية فارسًا في رحلةٍ للبحث عن الكنز. وفي نهاية الرحلة يقترب الفارس من البابين المبيّنين أدناه.

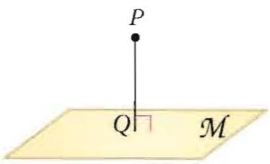
أخبر خادمُ الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحدد أيّ البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك.

حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوٍ يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهانًا لكل منهما

28) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp$ المستقيم p
المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى الخط p .



29) **المعطيات:** $\overline{PQ} \perp$ المستوى $\mathcal{M}$
المطلوب: $\overline{PQ}$ أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى M .



30) **نظريّة الأعداد:** سوف تُخمِّن في هذه المسألة علاقة في نظرية الأعداد، وتُثبت صحة تخمينك.

a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب عددٍ والعدد ثلاثة".

b) كوّن جدولًا يعطي قيم العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لِـ n .

c) اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجيّة.

d) اكتب برهانًا **غير** مباشر لتخمينك.

مراجعة المفردات

مجموعة الأعداد الصحيحة هي:
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة يمكن إثبات صحتها باستعمال البرهان غير المباشر ثم أثبتها.

32) **تحدٍّ:** إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله على الصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي على صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا **غير** مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي هو عدد غير نسبي.

33) اكتشف الخطأ: يحاول أسعد ورضوان أن يُثبتا العبارة التالية باستعمال البرهان غير المباشر. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

"إذا كان مجموع عددين زوجيًا، فإنّ العددين زوجيّان".

أسعد	رضوان
العبارة صحيحة. إذا كان أحد العددين زوجيًا والآخر صفرًا، فإن المجموع زوجي. وبما أنّ الافتراض صحيح حتى عندما تكون النتيجة خطأ، فإن العبارة صحيحة.	العبارة صحيحة. إذا كان العددان فرديين فإنّ مجموعهما زوجي. بما أن الافتراض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ، فإنّ العبارة صحيحة.

34) اكتب اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الموجودة في السؤال 8، واكتب برهانًا مباشرًا للمعاكس الإيجابي. كيف يرتبط البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة بالبرهان غير المباشر للعبارة الأصلية؟

تدريب على الاختبار المعياري

35) إذا كان طولا ضلعين في مثلث 7, 12، فأي مما يأتي **لا** يمكن أن يكون محيط المثلث؟

A 29

B 34

C 37

D 38

36) إذا كان $b > a$، فأي مما يأتي يكون صحيحًا دائمًا؟

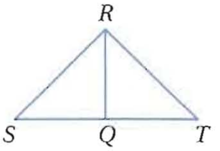
A $-a > -b$

B $3a > b$

C $a^2 < b^2$

D $a^2 < ab$

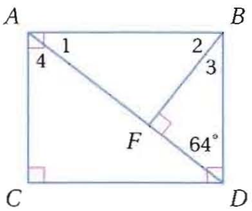
مراجعة تراكمية



37) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصّف $\angle SRT$.

المطلوب: إثبات أنّ $m\angle SQR > m\angle SRQ$



أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 2-3)

38) $m\angle 1$

39) $m\angle 4$

40) هندسة إحداثية: أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين: (الدرس 6-2)

$y = 2x + 2$

$y = 2x - 3$

استعد للدرس اللاحق

حل كلًّا من المتباينات الآتية:

41) $4x + 7 < 180$

42) $8x - 14 < 3x + 19$

43) $3x + 54 < 90$

معمل الحاسبة البيانية:

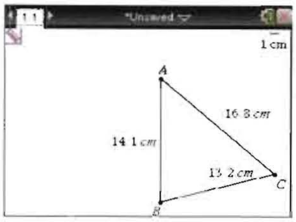
4-5 متباينة المثلث
The Triangle Inequality

الهدف:
أستعمل التقنية لاستقصاء متباينة المثلث.

يمكنك استعمال تطبيق Geometry في الحاسبة TI–nspire لاستكشاف خصائص المثلث.

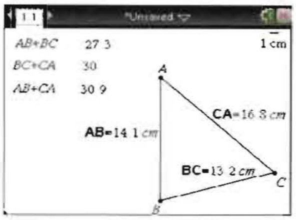
النشاط 1

أنشئ مثلثًا، ولاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الثالث.

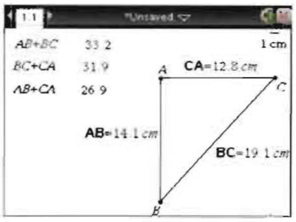


الخطوة 1: أنشئ مثلثًا بالضغط على المفاتيح
on، menu، 9:Shapes، 9:Triangle
ارسم المثلث ثم اضغط esc .

الخطوة 2: سم رؤوس المثلث بالضغط على المفاتيح ctrl، menu، 2:Label
ثم سم الرؤوس A, B, C .



الخطوة 3: حدد طول كل ضلع بالضغط على المفاتيح
ctrl، menu، 8:Measurement ثم اضغط على رأسين في المثلث
لحساب طول كل ضلع.
اكتب اسم الضلع بجانب الطول المقيس بالضغط على
ctrl، menu، 5:Store ثم اكتب اسم الضلع واضغط enter .



الخطوة 4: ولحساب مجموع طولي ضلعين في المثلث اضغط
ctrl، menu، 5:Text واكتب اسم ضلعين مثلًا: $AB + BC$
واضغط ctrl، menu، 4:Calculate ، واضغط على الضلعين AB
ثم BC فيظهر مجموع الضلعين.
كرّر ذلك مع $AB + CA$ ، $BC + CA$.

الخطوة 5: اضغط على أحد الرؤوس واسحبه لتغيّر شكل المثلث، ولاحظ تغيّر مجموع طولي كل ضلعين.

تحليل النتائج:

1) ضع إشارة > أو < أو = داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$CA \bigcirc AB + BC$ $\quad$ $BC \bigcirc AB + CA$ $\quad$ $AB \bigcirc BC + CA$

2) خمّن العلاقة بين مجموع طولي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

3) ضع إشارة >أو < أو = داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$CA \bigcirc |AB - BC|$ $\quad$ $BC \bigcirc |AB - CA|$ $\quad$ $AB \bigcirc |BC - CA|$

4) كيف يمكنك استعمال ملاحظاتك لتحديد مدى طول الضلع الثالث لمثلث إذا علمتَ طولي الضلعين الآخرين؟

4-5 متباينة المثلث
The Triangle Inequality

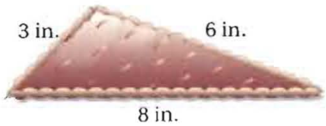
فيما سبق:
درستُ خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

والآن:
- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأُعيِّن الأطوال التي تكوّن مثلثًا.
- أُثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يريد أحد المصممين أن يستعمل قطع الخيوط المجدولة والمتبقية من عمل آخر لتزيين الوسائد المثلثة الشكل. ولتقليل الإهدار، أراد المصمّم أن يستعمل القطع دون قصها. فاختار ثلاث قطع عشوائيًا وحاول أن يشكّل مثلثًا. ويبين الشكلان الآتيان اثنتين من هذه المحاولات.



متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوفر علاقة خاصّة بين أطوال هذه القطع؛ كي تشكل مثلثًا.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث

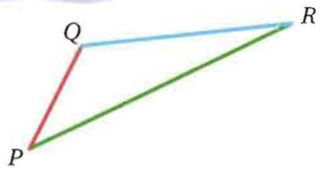
أضف إلى مطويتك

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة $PQ + QR > PR$

$QR + PR > PQ$

$PR + PQ > QR$



ستبرهن النظرية 4.11 في السؤال 19

ولتوضيح عدم إمكانية رسم مثلث من ثلاث قطع عُلمت أطوالها يجب بيان أن إحدى متباينات المثلث الثلاث غير صحيحة.

مثال 1 تعيين المثلثات الممكنة التي عُلمت أطوال أضلاعها

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضح السبب:

a) $8 \text{ in}, 15 \text{ in}, 17 \text{ in}$.

تحقق من صحة كل متباينة.

$8 + 15 \overset{?}{>} 17$	$8 + 17 \overset{?}{>} 15$	$15 + 17 \overset{?}{>} 8$
$23 > 17$ ✓	$25 > 15$ ✓	$32 > 8$ ✓

بما أنّ طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنّ القطع المستقيمة التي أطوالها 17 ,15 ,8 تكوّن مثلثًا.

b) $6 \text{ m}, 8 \text{ m}, 14 \text{ m}$

$6 + 8 \overset{?}{>} 14$

$14 \not> 14$ ✗

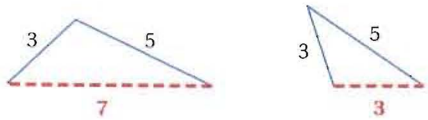
بما أن مجموع طولي قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 14 ,8 ,6 لا يمكن أن تكوّن مثلثًا.

تحقق من فهمك

1A) $15 \text{ cm}, 16 \text{ cm}, 30 \text{ cm}$

1B) $2 \text{ ft}, 8 \text{ ft}, 11 \text{ ft}$

عندما يُعلم طولا ضلعين في مثلث، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباينة المثلث.



مثال 2 من اختبار معياري

إذا كان طولا ضلعين في مثلث 3 cm , 7 cm ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

A 3 cm

B 4 cm

C 5 cm

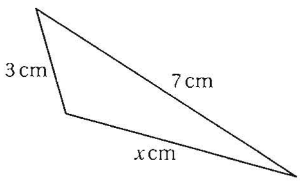
D 10 cm

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب تحديد أصغر قيمة ممكنة لطول الضلع الثالث في مثلث طولا ضلعين من أضلاعه 3 cm , 7 cm .

حل فقرة الاختبار

لتحديد أصغر طول ممكن من بين البدائل المعطاة، حدّد أولًا مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث؛ لذا ارسم شكلًا وافترض أن طول الضلع الثالث يساوي x . ثم اكتب متباينات المثلث الثلاث، وحل كل واحدة منها.



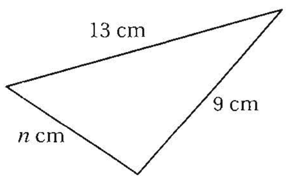
$3 + 7 > x$	$3 + x > 7$	$x + 7 > 3$
$10 > x$ أو $x < 10$	$x > 4$	$x > -4$

لاحظ أن $x > -4$ تكون صحيحة دائمًا لأي قيمة صحيحة موجبة لـ x . وبربط المتباينتين المتبقيتين يكون مدى القيم التي تحقق كلتا المتباينتين هو $x > 4$ وَ $x < 10$ والذي يمكن كتابته على الصورة $4 < x < 10$.

وأقلّ عدد صحيح موجب بين 4 وَ 10 هو 5 ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C .

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور أي الأعداد الآتية **لا** يمكن أن يكون قيمة لـ n؟



A 7

B 13

C 10

D 22

إرشادات للاختبار

اختبار البدائل

إذا كان الوقت غير كافٍ يمكنك اختبار كل بديل لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد البدائل الأخرى.

قراءة الرياضيات

المتباينة المركبة

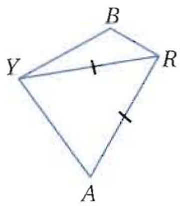
تقرأ المتباينة المركبة $4 < x < 10$ على النحو التالي: تقع x بين 4 وَ 10 أو x أكبر من 4 وأقل من 10 .

استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين: يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان

طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مرورًا بمدينة بريدة يقطع مسافة أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران دون توقّف من الرياض إلى أبها.

ارسم شكلًا تقريبيًّا يمثل المسألة، وضع عليه أسماء المدن، وارسم القطعة $\overline{YA}$ لتشكّل $\triangle YRA$.



المعطيات: $RY = RA$

المطلوب: $RB + BY > RA$

البرهان:

العبارات	المبررات
$RY = RA$ (1	1) معطى
$RB + BY > RY$ (2	2) نظرية متباينة المثلث.
$RB + BY > RA$ (3	3) بالتعويض

الربط مع الحياة

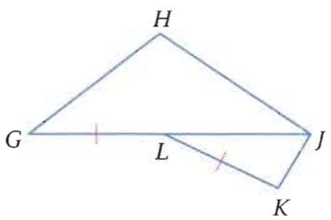
يختلف الطيران المباشر عن الطيران دون توقف. ففي حالة الطيران المباشر لا يغير المسافرون الطائرة، ولكن قد تحط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$



تأكد

المثال 1 حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

1) 5 cm, 7 cm, 10 cm   2) 3 in, 4 in, 8 in   3) 6 m, 14 m, 10 m

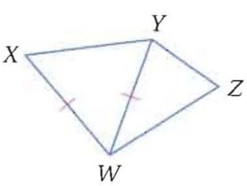
المثال 2 4) **اختيار من متعدد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث 5 m , 9 m ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثّل طول الضلع الثالث فيه؟

A 5 m   B 4 m   C 14 m   D 6 m

المثال 3 5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$



تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد ما إذا كانت كل من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

6) $4\text{ ft}, 9\text{ ft}, 15\text{ ft}$

7) $11\text{ mm}, 21\text{ mm}, 16\text{ mm}$

8) $9.9\text{ cm}, 1.1\text{ cm}, 8.2\text{ cm}$

9) $2\frac{1}{2}\text{ m}, 1\frac{3}{4}\text{ m}, 5\frac{1}{8}\text{ m}$

المثال 2 اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كل مما يأتي:

10) $4\text{ ft}, 8\text{ ft}$

11) $5\text{ m}, 11\text{ m}$

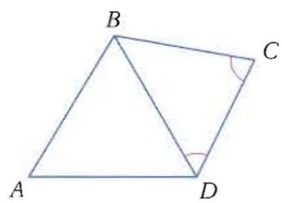
12) $2.7\text{ cm}, 4.2\text{ cm}$

13) $\frac{1}{2}\text{ km}, 3\frac{1}{4}\text{ km}$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يأتي :

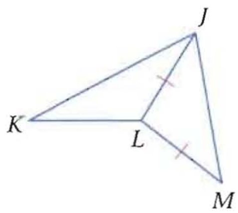
14) **المعطيات:** $\angle BCD \cong \angle CDB$

المطلوب: $AB + AD > BC$



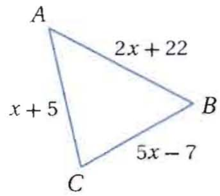
15) **المعطيات:** $\overline{JL} \cong \overline{LM}$

المطلوب: $KJ + KL > LM$

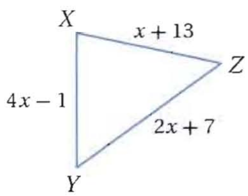


جبر: حدّد القيم الممكنة لـ x في كل من السؤالين الآتيين:

16)



17)



18) **قيادة سيّارة:** يُريد توفيق أن يسلك المسار الأقصر من بيته إلى المجمع الرياضي. و يمكنه أن يسلك الطريق 1 أو الطريق 2 ثم الطريق 3 .

a) أيُّ المسارين أقصر من بيت توفيق إلى المجمع الرياضي؟ وضح إجابتك.

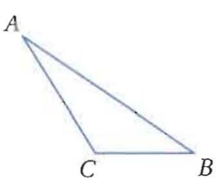
b) افترض أن توفيقًا يقود سيارته بسرعة قريبة جدًا من السرعة القصوى المسموح بها ولا تتعداها. إذا كانت السرعة القصوى على الطريق 1 تساوي 60 km/h ، وعلى كلٍّ من الطريقين 3 , 2 تساوي 100 km/h ، فأيُّ المسارين سيستغرق وقتًا أقل؟ وضح إجابتك.

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

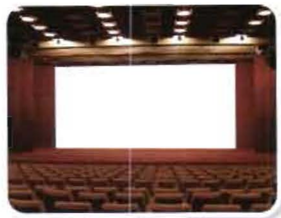
(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{CD}$ ، على أن تكون C بين B, D ويكون $\overline{CD} \cong \overline{AC}$) .



اكتب متباينة تمثِّل مدى القيم الممكنة لِـ x في كل من الأسئلة الآتية إذا كانت كل مجموعة تمثل أطوال أضلاع مثلث.

20) $x, 4, 6$ **21)** $8, x, 12$

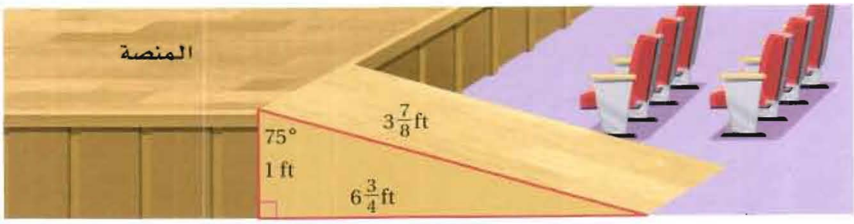
22) $x+1, 5, 7$ **23)** $x+2, x+4, x+6$



الربط مع الحياة

تصمم المسارح وفق نظام هندسي دقيق يُراعى فيه إمكانية مشاهدة جميع الحضور للمنصة، وسماع الصوت بوضوح دون صدى.

24) **مسرح:** يصمم عبد الرحمن وخليل منحدرًا للصعود إلى منصة المسرح. فخطط عبد الرحمن المنحدر كما في الشكل أدناه، ولكن خليل كان قلقًا بشأن القياسات ويريد أن يتحقق منها قبل البدء بقص الخشب. هل يوجد ما يبرر هذا القلق؟ وضح إجابتك.



تقدير: حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي، وذلك دون استعمال الآلة الحاسبة. وضح إجابتك.

25) $\sqrt{8}$ ft, $\sqrt{2}$ ft, $\sqrt{35}$ ft   **26)** $\sqrt{99}$ cm, $\sqrt{48}$ cm, $\sqrt{65}$ cm

27) حدّد ما إذا كانت النقاط $X(1, -3), Y(6, 1), Z(2, 2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

28) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أضلاع مثلثين وزواياهما.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات في كل مثلثين منها زوجان من الأضلاع المتطابقة فقط. ضع إشارات على كل ضلعين متطابقين، وسمِّ كل زوج من المثلثات ABC, DEF حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$.

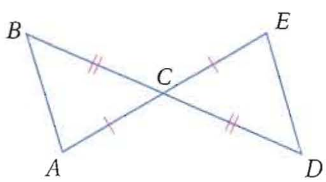
b) **جدوليًّا:** انقل الجدول أدناه في دفترك، ثم أوجد بالقياس قيمة كل من $BC, m\angle A, EF, m\angle D$، وسجّلها في الجدول.

أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1				
2				
3				

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين الزاويتين المقابلتين للضلعين غير المتطابقين في كل زوج من المثلثات التي فيها زوجان من الأضلاع المتطابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تحدٍّ:** ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$ إذا كان $AC = 7, DC = 9$؟ وضحّ إجابتك.



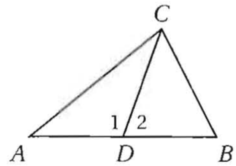
30) **تبرير:** ما مدى طول كل من الضلعين المتطابقين في مثلث طول قاعدته $6\,cm$؟ وضح إجابتك.

31) **مسألة مفتوحة:** طول أحد أضلاع مثلث 5 سم. ارسم مثلثًا يكون الضلع الذي طوله 5 سم أقصر أضلاعه، ومثلثًا آخر يكون الضلع الذي طوله 5 سم أطول أضلاعه. مضمنًا رسمك أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه.

32) **اكتب:** اشرح الطريقة التي تستعملها لإيجاد أصغر قيمة وأكبر قيمة لطول ضلع مثلث إذا علمت طولي الضلعين الآخرين.

تدريب على الاختبار المعياري

33) إذا كانت $\overline{DC}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ وكان $m\angle 1 > m\angle 2$، فأي عبارة مما يأتي **غير** صحيحة؟



A $AD = BD$ **C** $AC > BC$

B $m\angle ADC = m\angle BCD$ **D** $m\angle 1 > m\angle B$

34) أيُّ معادلة مما يأتي تمثل العبارة:
"ناتج طرح 7 من $14w$ يساوي z" ؟

A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

مراجعة تراكمية

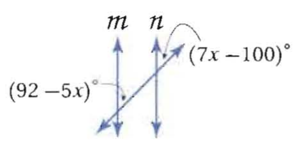
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (الدرس 4-4)

35) إذا كان $4y + 17 = 41$، فإن $y = 6$.

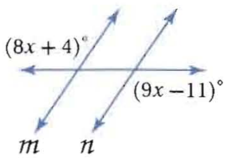
36) إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

أوجد قيمة x على أن يكون $m \parallel n$ في كل مما يأتي، واذكر المسلّمة أو النظرية التي استعملتها: (الدرس 3-5)

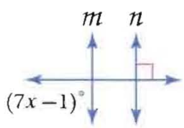
37)



38)



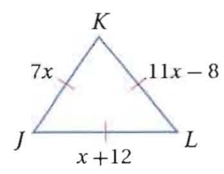
39)



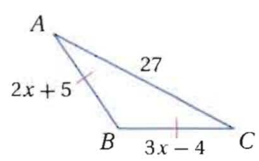
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x، وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي: (الدرس 1-3)

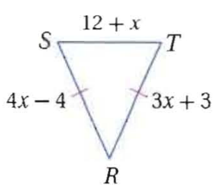
40)



41)



42)



6-4 المتباينات في مثلثين
Inequalities in Two Triaingles

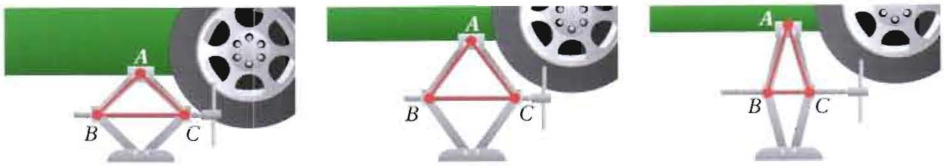
فيما سبق:
درستُ المتباينات في المثلث الواحد.

والآن:
- أطبق متباينة SAS أو عكسها لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- أثبت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل الرافعة عند تغيير إطارات السيارات، والرافعة المبيّنة أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تستعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنه عندما تُنزَّلُ الرافعة فإنّ ساقي $\triangle ABC$ يظلان متطابقين، على حين تزداد الزاوية A اتّساعًا و يزداد طول الضلع $\overline{BC}$ المقابل لِـ $\angle A$.



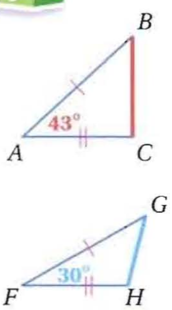
متباينة SAS: الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من المثلثات وتوضّح النظريتين الآتيتين:

نظريتان — المتباينات في مثلثين

أضف إلى مطويتك

4.13 متباينة SAS

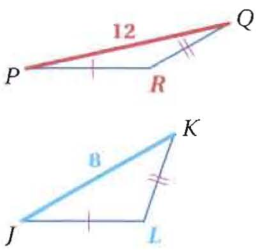
إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنَ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.



مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$ ،
فإنَ $BC > GH$.

4.14 عكس متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنَ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.



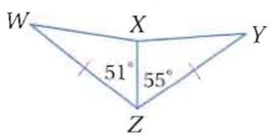
مثال: إذا كان $\overline{PR} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, $PQ > JK$ ،
فإن $m\angle R > m\angle L$.

ستبرهن النظرية **4.13** في الصفحة التالية ، وستبرهن النظرية **4.14** في السؤال **18**

مثال 1 استعمال متباينة SAS وعكسها

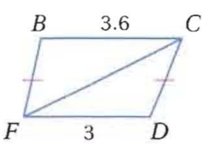
قارن بين القياسين المحددين في كل من السؤالين الآتيين :

a) WX, XY



في المثلثين WXZ, YXZ ،
$\overline{WZ} \cong \overline{YZ}, \overline{XZ} \cong \overline{XZ}$, $m\angle YZX > m\angle WZX$ ،
وبحسب متباينة SAS فإن $WX < XY$.

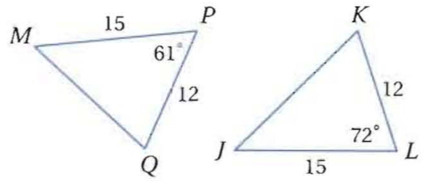
b) $m\angle FCD, m\angle BFC$



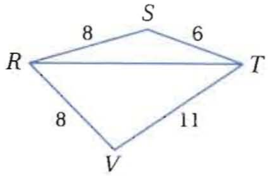
في المثلثين BCF, DFC ،
$\overline{BF} \cong \overline{DC}, \overline{FC} \cong \overline{CF}, BC > FD$ ،
وبحسب عكس متباينة SAS فإن
$m\angle BFC > m\angle DCF$.

قارن بين القياسات المعطاة في كل من السؤالين الآتيين :

1A) JK, MQ



1B) $m\angle SRT, m\angle VRT$



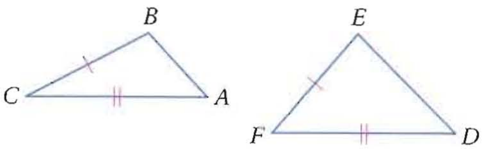
إرشادات للدراسة

المتباينة SAS
تُعرف المتباينة SAS باسم متباينة المفصّلة.

برهان متباينة SAS

المعطيات: في المثلثين ABC, DEF ،
$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, m\angle F > m\angle C$

المطلوب: $DE > AB$

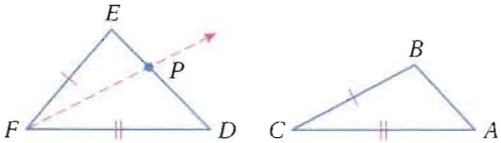


البرهان:

تعلم أنّ $\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أن: $m\angle F > m\angle C$.

ارسم نصف المستقيم FP على أن يكون $\overline{PF} \cong \overline{BC}, m\angle DFP = m\angle C$. وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :

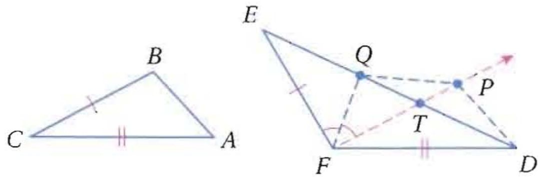
الحالة 1 P تقع على $\overline{DE}$. وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة،



ومسلمة جمع القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على تعريف المتباينة. وبالتعويض يكون $DE > AB$.

الحالة 2 P لا تقع على $\overline{DE}$.

وعندئذٍ سمِّ نقطة تقاطع $\overline{FP}, \overline{ED}$ بالحرف T، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{FQ}$ على أن تكون Q على $\overline{DE}$ ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PD}, \overline{PQ}$.



بما أنّ $\overline{EF} \cong \overline{BC}, \overline{FP} \cong \overline{BC}$، فإنّ $\overline{EF} \cong \overline{FP}$ من خاصيّة التعدّي. وكذلك $\overline{QF}$ تطابق نفسها بحسب خاصية الانعكاس؛ لذا يكون $\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$ بحسب SAS. وبحسب تطابق العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين يكون $\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$ أو $EQ = PQ$ ، وكذلك $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS. وتكون $\overline{PD} \cong \overline{BA}$ بحسب تطابق العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين،

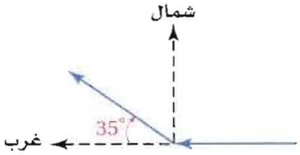
ويكون $PD = BA$ ، وفي $\triangle QPD$؛ $QD + PQ > PD$ بحسب نظرية متباينة المثلث. وبالتعويض يكون $QD + EQ > PD$. وبما أنّ $ED = QD + EQ$ بحسب مسلّمة جمع القطع المستقيمة، فإن $ED > PD$. وبالتعويض يكون $ED > BA$ أو $ED > AB$.

يمكنك استعمال متباينة SAS لحل مسائل من واقع الحياة.

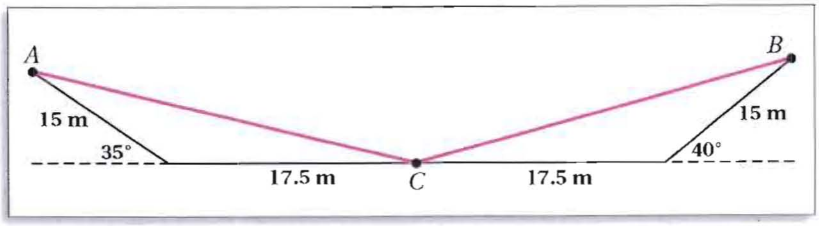
مثال 2 من واقع الحياة استعمال متباينة SAS

التزلج على الجليد: **انطلق اثنان من المتزلجين على الجليد في إحدى صالات التزلج من المكان نفسه. فقطع المتزلج A مسافة 17.5 m باتجاه الغرب، ثم انحرف °35 باتجاه شمال الغرب وقطع 15 m . بينما قطع المتزلج B مسافة 17.5 m باتجاه الشرق، ثم انحرف °40 باتجاه شمال الشرق وقطع 15 m . أيهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضّح إجابتك.**

افهم: باستعمال الاتجاهات المعطاة في المسألة، تحتاج إلى تحديد المتزلج الأبعد عن مكان الانطلاق. والشكل المجاور يوضح الانحراف °35 باتجاه شمال الغرب.



خطط: ارسم شكلًا لهذا الوضع.



يشكّل المسار الذي اتّبعه كل متزلج وبعده عن مكان الانطلاق مثلثًا؛ إذ قطع كل متزلج 17.5 m ، وانحرف وقطع 15 m أخرى.

استعمل أزواج الزوايا المستقيمة لإيجاد قياس الزاويتين المحصورتين، ثم طبّق متباينة SAS؛ لتقارن بين بُعدي المتزلجين عن مكان الانطلاق.

حل: قياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج A يساوي $180° - 35°$ أو $145°$. و قياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج B يساوي $180° - 40°$ أو $140°$.

بما أنّ $140° < 145°$ ، فإنّ $AC > BC$ بحسب متباينة SAS؛ لذا فالمتزلج A أبعد عن مكان الانطلاق من المتزلج B .

تحقق: المتزلج B انحرف °5 أكثر مما فعل المتزلج A باتجاه مكان الانطلاق؛ لذا سيكون المتزلج B أقرب إلى مكان الانطلاق من المتزلج A . ✓

تحقق من فهمك

2A) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المتزلجين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi باتجاه الشرق، ثم انحرفت °70 باتجاه شمال الشرق وقطعت مسافة 3 mi. وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi باتجاه الغرب، ثم انحرفت °75 باتجاه شمال الغرب وقطعت 3 mi. أي مجموعة كانت الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

الربط مع الحياة

ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونظمت أول بطولة لها عام 1891م، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة؛ مثل كندا والدول الاسكندنافية.

إرشادات لحل المسألة

رسم شكل توضيحي

ارسم شكلًا لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.

إرشادات للدراسة

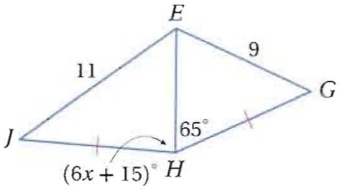
استعمال حقائق إضافية

قد تحتاج، عند إيجاد مدى القيم الممكنة للمتغير x، إلى استعمال إحدى الحقائق الآتية:

- قياس أي زاوية في المثلث يكون دائمًا أكبر من 0 وأقل من 180 .
- طول أي قطعة مستقيمة يكون دائمًا أكبر من 0 .

لإثبات أن الزاوية المحصورة في مثلث أكبر من الزاوية المحصورة في مثلث آخر استعمل عكس متباينة SAS في الحل.

مثال 3 استعمال الجبر في العلاقات بين المثلثات



جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x.

الخطوة 1: من الشكل نعلم أن:

$\overline{JH} \cong \overline{GH}, \overline{EH} \cong \overline{EH}, JE > EG$.

إذن، $m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس متباينة SAS

$6x + 15 > 65$ بالتعويض

$x > 8\frac{1}{3}$ الحل بالنسبة لـ x

الخطوة 2: استعمل حقيقة أن قياس أيّ زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة أخرى.

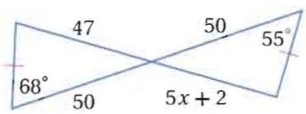
$m\angle JHE < 180$

$6x + 15 < 180$ بالتعويض

$x < 27.5$ الحل بالنسبة لـ x

الخطوة 3: اكتب المتباينتين $x > 8\frac{1}{3}, x < 27.5$ بصورة متباينة مركّبة بالشكل $8\frac{1}{3} < x < 27.5$.

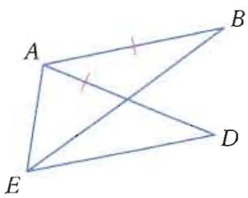
تحقق من فهمك



3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x.

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحّة العلاقات في مثلثين.

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS



اكتب برهانًا ذا عمودين.

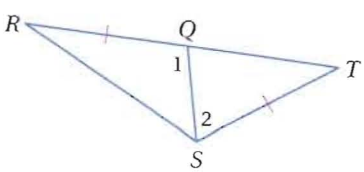
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1) معطى
2) $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2) خاصية الانعكاس
3) $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3) مسلّمة جمع الزوايا
4) $m\angle EAB > m\angle EAD$	4) تعريف المتباينة
5) $EB > ED$	5) متباينة SAS

تحقق من فهمك

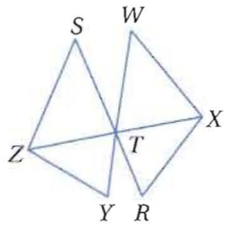


4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

مثال 5 إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS



اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{ZX}$.

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$

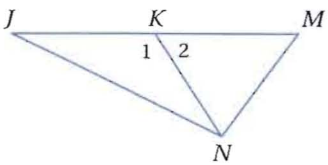
$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:

- T نقطة منتصف $\overline{ZX}$ — معطى
- $\overline{ST} \cong \overline{WT}$ — معطى
- $\overline{SZ} > \overline{WX}$ — معطى
- $\overline{ZT} \cong \overline{TX}$ — تعريف نقطة المنتصف
- $m\angle STZ > m\angle WTX$ — عكس نظرية المفصلة
- $\angle STZ \cong \angle XTR$، $\angle WTX \cong \angle ZTY$ — الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
- $m\angle STZ = m\angle XTR$، $m\angle WTX = m\angle ZTY$ — تعريف تطابق الزوايا
- $m\angle XTR > m\angle ZTY$ — بالتعويض

تحقق من فهمك



5) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.

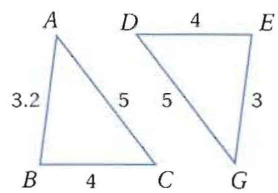
$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

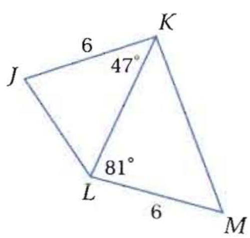
تأكد

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle ACB, m\angle GDE$



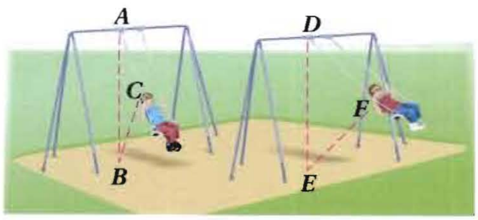
2) JL, KM



المثال 2 **3)** **أراجيح:** يتغيّر موضع الأرجوحة تبعًا لقوّة دفعها.

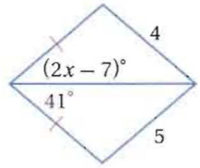
a) أي الأزواج من هذه القطع المستقيمة متطابقة؟

b) أيّهما أكبر: قياس $\angle A$ أم قياس $\angle D$ ؟ وضح إجابتك.

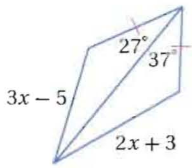


المثال 3 اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل مما يأتي :

(4



(5

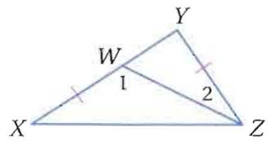


المثالان 5 ,4 **برهان** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل من السؤالين 7 ,6:

6) المعطيات: $\triangle YZX$

$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

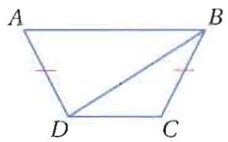
المطلوب: $ZX > YW$



7) المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

$DC < AB$

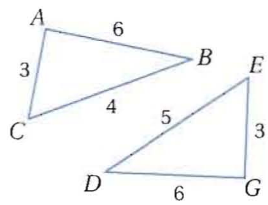
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



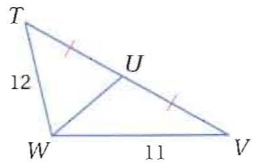
تدرب وحل المسائل

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كل من الأسئلة الآتية :

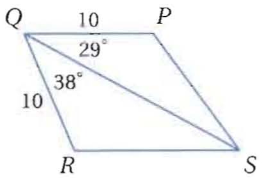
8) $\angle BAC, \angle DGE$



9) $\angle TUW, \angle VUW$



10) PS, SR



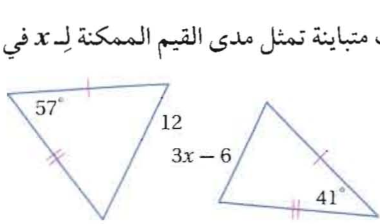
المثال 2 **11) رحلة صيد:** أقام باسم وعثمان مخيّمًا في الصحراء، وقرّرا أن يقوما برحلة صيد. فانطلق باسم من المخيّم وسار 5 km باتجاه الشرق، ثم انعطف °15 باتجاه جنوب الشرق وسار 2 km أخرى. وانطلق عثمان من المخيم وسار 5 km باتجاه الغرب، ثم انعطف °35 باتجاه شمال الغرب وسار 2 km أخرى.

a) أيهما أقرب إلى المخيّم؟ وضّح إجابتك، وارسم شكلاً توضيحيًا .

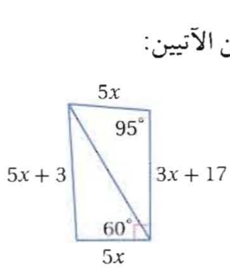
b) افترض أنّ عثمان انعطف °10 باتجاه جنوب الغرب بدلًا من °35 باتجاه شمال الغرب. أيهما يكون أبعد عن المخيم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًا.

المثال 3 اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل من السؤالين الآتيين:

(12



(13



14) خزائن: خزانتا سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور. أيُّ بابَيْ الخزانتين يشكّل زاوية قياسها أكبر؟ وضح إجابتك.

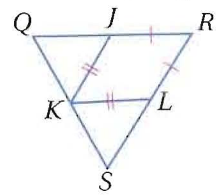
المثالان 4, 5 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل من السؤالين الآتيين:

15) **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}$, $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$

K نقطة منتصف $\overline{QS}$.

$m\angle SKL > m\angle QKJ$

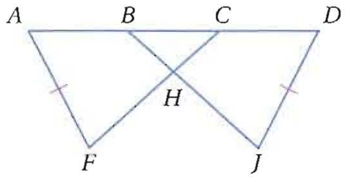
المطلوب: $RS > QR$



16) **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}$, $\overline{FC} \cong \overline{JB}$

$AB > DC$

المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



17) **تمرين:** يقوم عبد الله بتمرين العضلة ذات الرأسين.

a) أيهما أكبر: المسافة من قبضة اليد إلى الكتف في الوضع 1، أم في الوضع 2؟ وضّح إجابتك بالقياس.

b) أيهما أكبر: قياس الزاوية المتكونة عند المرفق في الوضع 1، أم الوضع 2؟ وضّح إجابتك مستعملًا القياسات التي أوجدتها في الفرع **a** وعكس متباينة SAS.

الربط مع الحياة

تزيد تمارين اللياقة القوة والقدرة على التحمل، وينصح معظم خبراء اللياقة الأشخاص المبتدئين بالتدريب ثلاث جلسات في الأسبوع تتراوح مدة الواحدة من 20 دقيقة إلى ساعة واحدة (متضمنة فترة الإحماء والاسترخاء) على أن يفصل ما بين الجلسة والأخرى يوم واحد على الأقل.

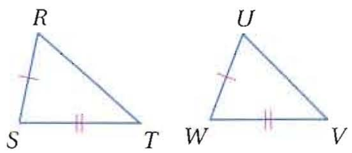
18) **برهان:** استعمل البرهان غير المباشر لإثبات النظرية 4.14 (عكس متباينة SAS).

المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$

$\overline{ST} \cong \overline{WV}$

$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$



19) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف مجموع زوايا مضلع.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مضلعات: ثلاثي، ورباعي، وخماسي. وسمِّ المضلع الثلاثي ABC، والرباعي $FGHJ$، والخماسي $PQRST$. واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية.

b) **جدوليًا:** انقل الجدول أدناه في دفترك وأكمله.

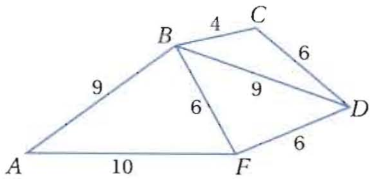
عدد الأضلاع	قياسات الزوايا				مجموع قياسات الزوايا
3	$m\angle A$		$m\angle C$		
	$m\angle B$				
4	$m\angle F$		$m\angle H$		
	$m\angle G$		$m\angle J$		
5	$m\angle P$		$m\angle S$		
	$m\angle Q$		$m\angle T$		
	$m\angle R$				

c) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زواياه.

d) **منطقيًا:** ما نوع التبرير الذي استعملته في الفرع **c**؟ وضِّح إجابتك.

e) **جبريًا:** اكتب عبارة جبرية لإيجاد مجموع قياسات زوايا مضلع عدد أضلاعه n.

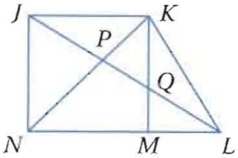
استعمل الشكل المجاور لكتابة متباينة تربط بين قياس كل زوج من الزوايا في السؤالين الآتيين:



20) $m\angle BDC, m\angle FDB$

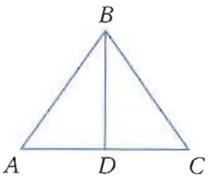
21) $m\angle ABF, m\angle FDB$

مسائل مهارات التفكير العليا



22) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، إذا كان $KJ \cong JN$ ، $m\angle LJN > m\angle KJL$ ، فأيّ الزاويتين هي الأكبر: $\angle LKN$ أم $\angle LNK$ ؟ وضّح إجابتك.

23) **تحدٍّ:** $\overline{RQ}$ قطعة متوسطة في $\triangle RST$. إذا كان $RT \geq RS$ ، فما التصنيفات الممكنة لـ $\triangle RQT$ ؟ وضّح إجابتك.

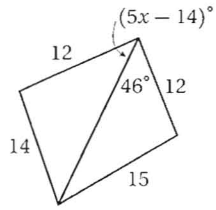


24) **تبرير:** إذا كانت $\overline{BD}$ قطعة متوسطة، وكان $AB < BC$ ، فهل تكون $\angle BDC$ حادة دائمًا، أو أحيانًا، أو لا تكون حادة أبدًا؟ وضّح إجابتك.

25) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباينة SAS والمسلّمة SAS لتطابق المثلثات.

تدريب على الاختبار المعياري

26) أي متباينة مما يأتي تصف مدى القيم الممكنة لـ x ؟



A $x > 6$

B $0 < x < 14$

C $2.8 < x < 12$

D $12 < x < 15$

27) إذا كان طول ضلع مربّع $x + 3$ ، فإن طول قطره يساوي:

A $x^2 + 1$

B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

C $2x + 6$

D $x^2\sqrt{2} + 6$

مراجعة تراكمية

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كل من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-5)

28) 3.2 cm, 4.4 cm

29) 5 ft, 10 ft

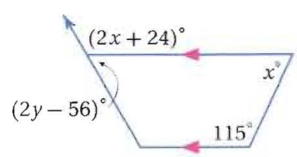
30) 3 m, 9 m

31) **رحلات:** سأل عليّ صديقه ماجد عن تكلفة الرحلة التي قام بها مع صديقه. فلم يتذكر ماجد تكلفة الشخص الواحد، ولكنّه تذكر أن التكلفة الكليّة كانت أكثر من 500 ريال. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن تكلفة الشخص الواحد كانت أكثر من 250 ريالًا. (الدرس 4-4)

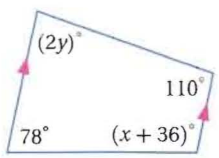
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كلٍّ من x, y في الأسئلة الآتية، موضِّحًا إجابتك:

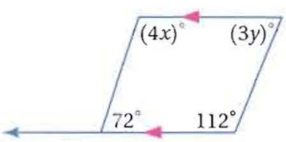
32)



33)



34)



دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسيّة

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثات: (الدرسان 2-4 ,1-4)

- القطع المستقيمة الخاصّة بالمثلثات هي الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.
- تُسمى نقاط تقاطع المستقيمات الخاصّة في مثلث نقاط التلاقي.
- نقاط التلاقي في مثلث هي مركز الدائرة التي تمر برؤوسه ومركز الدائرة الداخلية ومركز المثلث وملتقى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر: (الدرس 4-4)

- كتابة برهان غير مباشر:

1) افترض أن النتيجة غير صحيحة.

2) بيِّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.

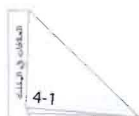
3) بما أن النتيجة الخطأ تؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فإن النتيجة الأصليّة ستكون صحيحة.

متباينات المثلث: (الدروس 6-4 ,5-4 ,3-4)

- الزاوية الكبرى في مثلث تقابل الضلع الأطول، والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.
- مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- **المتباينة SAS:** (نظرية المفصّلة) في مثلثين، إذا تطابق زوجان من الأضلاع المتناظرة في مثلثين، فإنّ قياس الزاوية المحصورة يُحدّد المثلث الذي يكون الضلع الثالث فيه أطول.
- **المتباينة SSS:** عكس نظرية المفصّلة: إذا تطابق زوجان من الأضلاع المتناظرة في مثلثين، فإنّ طول الضلع الثالث يُحدد المثلث الذي تكون الزاوية المحصورة لها القياس الأكبر.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أنّ المفاهيم الأساسية قد دُوِّنت في مطويتك.



مفردات أساسية

العمود المنصف (ص 209)

المستقيمات المتلاقية (ص 210)

نقطة التلاقي (ص 210)

مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث (ص 210)

مركز الدائرة الداخلية للمثلث (ص 213)

القطعة المتوسطة (ص 219)

مركز المثلث (ص 219)

ارتفاع المثلث (ص 221)

ملتقى ارتفاعات المثلث (ص 221)

التبرير غير المباشر (ص 235)

البرهان غير المباشر (ص 235)

البرهان بالتناقض (ص 235)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) مركز المثلث هو النقطة التي تتقاطع عندها الارتفاعات.

2) تُسمّى نقطة تلاقي القطع المتوسطة لمثلث مركز الدائرة الداخلية.

3) نقطة التلاقي هي النقطة التي تتقاطع عندها ثلاثة خطوط أو أكثر.

4) مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث يكون على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.

5) لإيجاد مركز المثلث، ارسم أولًا منصّفات الزوايا.

6) لتبدأ برهانًا بالتناقض افترض أولًا أنّ ما تحاول أن تُثبته صحيح.

7) يستعمل البرهان بالتناقض التبرير غير المباشر.

8) القطعة المتوسطة لمثلث تصل نقطة منتصف ضلع المثلث بمنتصف ضلع آخر للمثلث.

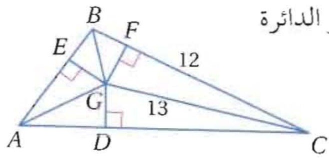
9) مركز الدائرة الداخلية لمثلث هو نقطة تتقاطع عندها منصّفات زوايا المثلث.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

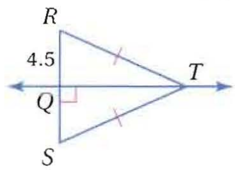
4-1 المنصفات في المثلث (ص 209-217)

10) أوجد EG إذا كانت G مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$.

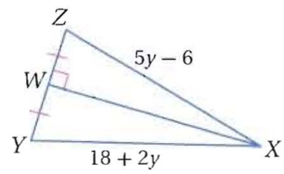


أوجد طول كل من القطعتين المستقيمتين الآتيتين :

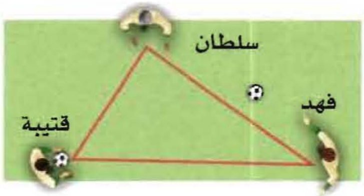
11) RS



12) XZ

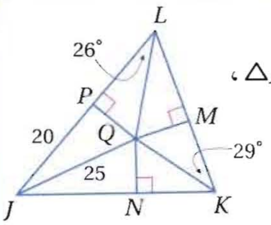


13) كرة قدم: يقوم قتيبة وفهد وسلطان بالإحماء قبل بدء مباراة لكرة القدم . حيث يتطلب أحد تدريبات الإحماء أن يشكّل اللاعبون الثلاثة مثلثًا، ويقف اللاعب الرابع في الوسط. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع على أن يكون على مسافات متساوية من اللاعبين الثلاثة؟



مثال 1

إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle JKL$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



a) $\angle QJK$

$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$2(26°) + 2(29°) + m\angle NJP = 180°$ بالتعويض

$110° + m\angle NJP = 180°$ بالتبسيط

$m\angle NJP = 70°$ بالطرح

وبما أنّ $\overrightarrow{JQ}$ ينصّف $\angle NJP$ فإن $2m\angle QJK = m\angle NJP$. أيْ أنّ $m\angle QJK = \frac{1}{2} m\angle NJP$ ؛ إذن $m\angle QJK = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$.

b) QP

$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$ بالتعويض

$(QP)^2 + 400 = 625$ ، $20^2 = 400 , 25^2 = 625$

$(QP)^2 = 225$ بالطرح

$QP = 15$ بالتبسيط

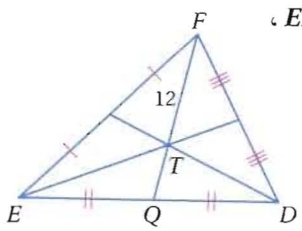
4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 219-226)

14) رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0), E(0, 7), F(6, 3)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

15) احتفالات: تُريد حفصة أن تعلق 4 مثلثات متطابقة في سقف غرفة الصف على أن تكون موازية لأرضية الغرفة. فرسمت نموذجًا لأحد المثلثات على مستوى إحداثي، فكانت إحداثيات رؤوسه هي $(0, 4), (3, 8), (6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيعلق في السقف بخيط، فما إحداثيات النقطة التي سيربط الخيط عندها بالمثلث؟

مثال 2

إذا كانت النقطة T مركز المثلث EDF ، $FT = 12$ ، فأوجد TQ .



$FT = \frac{2}{3}FQ$

$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$

$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$ ، $FT = 12$

$12 = 8 + \frac{2}{3}TQ$ خاصية التوزيع

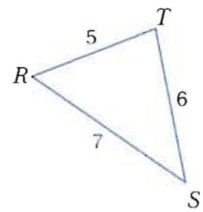
$4 = \frac{2}{3}TQ$ بالطرح

$6 = TQ$ بالضرب

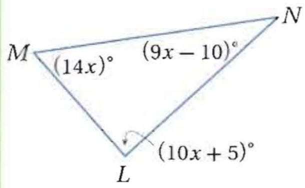
4-3 المتباينات في المثلث (ص 227-233)

اكتب قياسات زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:

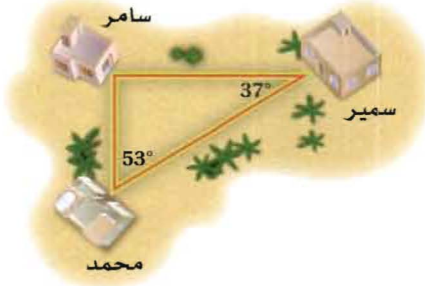
16)



17)

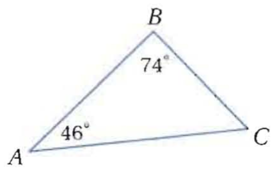


18) **جيران:** يسكن سمير ومحمد وسامر عند تقاطعات ثلاثة شوارع تشكّل المثلث المبين أدناه، إذا أرادوا الالتقاء عند أحدهم، فأي الطريقين أقصر: اصطحاب سمير لمحمد وذهابهما معًا إلى بيت سامر. أم اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معًا إلى بيت سمير؟



مثال 3

اكتب قياسات زوايا $\triangle ABC$ ، وأضلاعه مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر.



a) أولًا: أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا. $m\angle C = 180° - (46° + 74°) = 60°$

لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$.

b) والأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

4-4 البرهان غير المباشر (ص 235-241)

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

19) $m\angle A \geq m\angle B$.

20) $\triangle FGH \cong \triangle MNO$.

21) $\triangle KLM$ قائم الزاوية.

22) إذا كان $3y < 12$ ، فإنّ $y < 4$.

23) اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنّه إذا كانت الزاويتان متتامّتين فإنّه لا يمكن أن تكون أي منهما قائمة.

24) **مطالعة:** اشترى محمود كتابين ودفع ثمنهما أكثر من 180 ريالًا. استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أنّ ثمن أحدهما على الأقل أكثر من 90 ريالًا.

مثال 4

اكتب الافتراض الضروري للبدء ببرهان غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

a) $\overline{XY} \not\cong \overline{JK}$

الافتراض هو: $\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b) إذا كان $3x < 18$ ، فإن $x < 6$.

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي: $x < 6$ ، ونفيها هو $x \geq 6$ ؛ لذا فالافتراض هو $x \geq 6$.

c) $\angle 2$ زاوية حادّة.

الافتراض هو: $\angle 2$ زاوية ليست حادّة.

دليل الدراسة والمراجعة

4-5 متباينة المثلث (ص 248-243)

حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

25) $5, 6, 9$

26) $3, 4, 8$

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كل من السؤالين الآتيين:

27) $5\,\text{ft}, 7\,\text{ft}$

28) $10.5\,\text{cm}, 4\,\text{cm}$

29) **دراجات:** يركب خالد دراجته لزيارة صديقه وليد. وبما أن الطريق المباشر مغلق فقد سلك طريقًا فرعيًا طوله 2 km، ثم انعطف وسلك طريقًا آخر طوله 3 km حتى وصل منزل وليد. إذا كانت الطرق الثلاثة تشكّل مثلثًا رأسان من رؤوسه هما منزلا وليد وخالد، فاكتب متباينة تمثل مدى المسافة الممكنة بين منزليهما.

مثال 5

حدِّد ما إذا كانت القياسات 9 ,10 ,7 يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

اختبر كل متباينة.

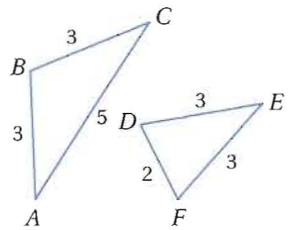
$7 + 10 > 9$ $\quad$ $7 + 9 > 10$ $\quad$ $10 + 9 > 7$

$17 > 9$ ✓ $\quad$ $16 > 10$ ✓ $\quad$ $19 > 7$ ✓

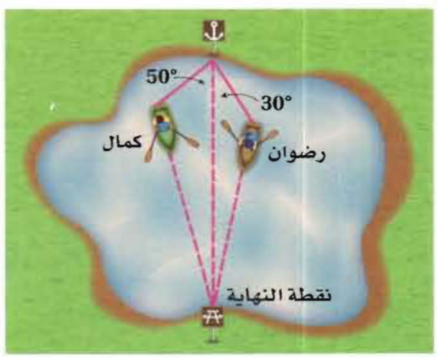
بما أن مجموع طولي كل ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث، فإنّ القطع المستقيمة التي أطوالها 9 ,10 ,7 تشكل مثلثًا.

4-6 المتباينات في مثلثين (ص 256-249)

30) مستعملًا المثلثين المجاورين، قارن بين القياسين $m\angle ABC, m\angle DEF$



31) **تجديف:** يُجدف كل من رضوان وكمال في بركة متجهين إلى نقطة محددة، ولأنه ليس لهما خبرة في التجديف فقد انحرفا عن المسار لمدة 4 دقائق قطع كل منهما فيها مسافة 50 m، ثم استعادا مسارهما الصحيح، كما في الشكل. أيهما أقرب إلى نقطة النهاية عند هذه اللحظة؟

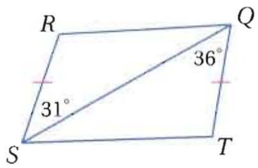


مثال 6

قارن بين كل قياسين فيما يأتي:

a) RQ, ST

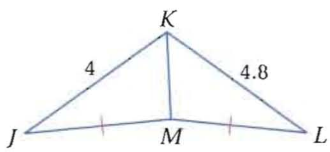
بما أن $\overline{RS} \cong \overline{TQ}, \overline{QS} \cong \overline{QS}, m\angle SQT > m\angle RSQ$ في المثلثين STQ, QRS فإن $RQ < ST$ بحسب نظرية المفصَّلة.



b) $m\angle KML, m\angle KMJ$

بما أن $\overline{JM} \cong \overline{LM}, \overline{KM} \cong \overline{KM}, LK > JK$،

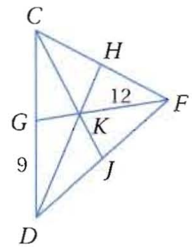
فإن $\angle KML > \angle KMJ$. بحسب عكس نظرية المفصّلة.



اختبار الفصل

1) **حدائق:** يزرع ماجد وردًا في حوض دائري داخل منطقة مثلثة الشكل محدودة بثلاثة طرق للمشاة. أي نقطة من نقاط التلاقي في المثلث، سيستعملها مركزًا لأكبر دائرة يمكن رسمها داخل المثلث؟

النقطة K مركز $\triangle CDF$ ، $DK = 16$. أوجد طول كل مما يأتي:



2) KH

3) CD

4) FG

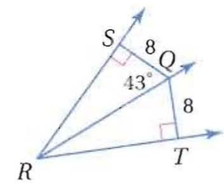
5) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

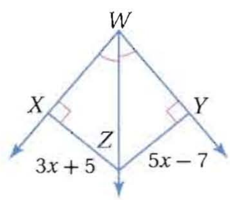
المطلوب: $x \geq 9$

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي:

6) $m\angle TQR$



7) XZ



8) **اختيار من متعدد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث 3.1 cm و 4.6 cm ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟

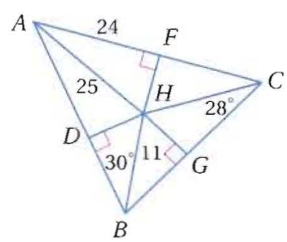
A 1.6 cm

B 2 cm

C 7.5 cm

D 8 cm

إذا كانت H مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، فأوجد قياس كلٍّ مما يأتي:



9) DH

10) BD

11) $m\angle HAC$

12) $m\angle DHG$

13) **اختيار من متعدد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث 11 , 5 ، فأي متباينة مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث؟

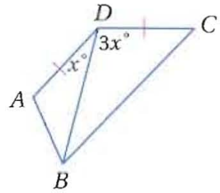
A $6 < x < 10$

B $5 < x < 11$

C $6 < x < 16$

D $x < 5$ أو $x > 11$

14) قارن بين AB , BC في الشكل أدناه.



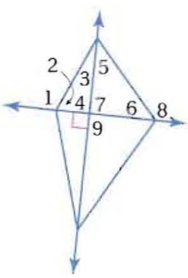
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

15) إذا كان 8 عاملًا للعدد n ، فإنّ 4 عامل للعدد n .

16) $m\angle M > m\angle N$

17) إذا كان $3a + 7 \leq 28$ ، فإنّ $a \leq 7$.

استعمل الشكل المجاور، لتحدِّد أي زاوية لها أكبر قياس في كل من المجموعات الآتية:



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

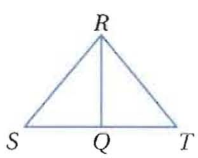
19) $\angle 9, \angle 8, \angle 3$

20) $\angle 4, \angle 3, \angle 2$

21) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصِّف $\angle SRT$

المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$

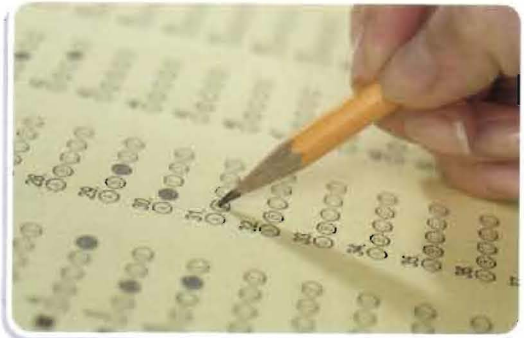


أوجد متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في المثلث الذي عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كل من السؤالين الآتيين:

22) 10 ft, 16 ft

23) 23 m, 39 m

استبعاد البدائل غير المعقولة



يمكنك استبعاد البدائل غير المعقولة لتحدّد الإجابة الصحيحة عند حل أسئلة الاختيار من متعدّد.

طرائق استبعاد البدائل غير المعقولة

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية لتحدّد المطلوب إيجاده بالضبط.

- ما المطلوب حلّه؟
- هل الجواب عدد صحيح أم كسر اعتيادي أم كسر عشري؟
- هل تحتاج إلى استعمال رسم أو جدول؟
- ما وحدات القياس المطلوبة للإجابة (إن وجدت)؟

الخطوة 2

تفحص كل بديل بعناية وقدّر معقوليته.

- استبعد أي بديل يبدو أنّه غير صحيح.
- استبعد أي بديل ليس ضمن الصيغة المناسبة للإجابة الصحيحة.
- استبعد أي بديل لا يتضمن وحدات القياس الصحيحة.

الخطوة 3

حل السؤال، واختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المتبقية، ثم تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات لحلها.

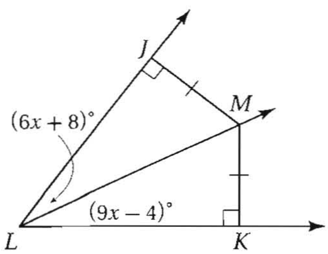
ما قياس $\angle KLM$؟

A $32°$

B $44°$

C $78°$

D $94°$



اقرأ السؤال وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي $180°$، فإن $m\angle KLM + m\angle LMK$ يجب أن يساوي $90°$، وإلا زاد المجموع على $180°$. وبما أن البديل D قياس لزاوية منفرجة، فإنّه يُستبعد؛ لعدم معقوليته؛ إذن فالجواب الصحيح يكون A أو B أو C .

حل المسألة. بحسب عكس نظرية منصّف الزاوية التي تنص على أنّه: "إذا وقعت نقطة داخل زاوية، وكانت على بعدين متساويين من ضلعيها، فإنّ هذه النقطة تقع على منصف الزاوية" ، وبما أنّ النقطة M على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية LJ, LK، فإنّها تقع على منصّف $\angle JLK$؛ لذا $\angle JLM$ يجب أن تطابق $\angle KLM$؛ والآن اكتب معادلة لإيجاد قيمة x وحلها.

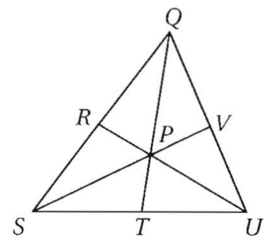
$$\begin{aligned} 6x + 8 &= 9x - 4 \\ -3x &= -12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

إذن قياس $\angle KLM$ يساوي $[9(4) - 4]°$ أو $32°$. والبديل A يمثل الإجابة الصحيحة.

تمارين ومسائل

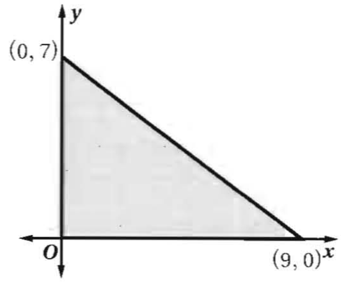
اقرأ كلّ سؤال فيما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة الذي زودك به المعلم أو على أي ورقة أخرى:

1) النقطة P مركز المثلث QUS، إذا كان $QP = 14$ cm ، فما طول $\overline{QT}$ ؟



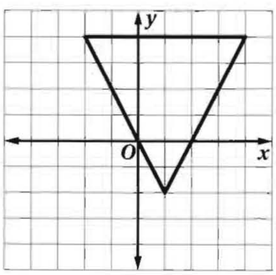
A 7 cm　**B** 12 cm　**C** 18 cm　**D** 21 cm

2) كم وحدة مربعة مساحة المثلث في الشكل أدناه؟



A 8　**B** 27.4　**C** 31.5　**D** 63

3) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$　**B** $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$　**C** $\left(1, \frac{5}{2}\right)$　**D** $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4) إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، وكان $m\angle A = 94°$، فأيّ مما يأتي يجب أن تكون صحيحة؟

A $m\angle B = 94°$

B $m\angle B = 47°$

C $AB = BC$

D $AB = AC$

5) أيّ مما يأتي يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

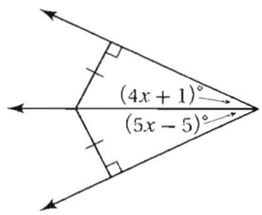
A 1.9, 3.2, 4　**B** 1.6, 3, 3.4　**C** 3, 7.2, 7.5　**D** 2.6, 4.5, 6

اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة أو على أي ورقة أخرى :

1) أوجد قيمة x .



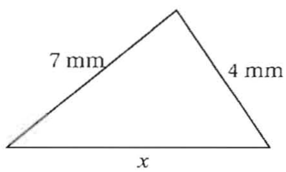
A 3

B 4

C 5

D 6

2) أيّ مما يأتي **لا** يمكن أن يكون قيمة لِـ x ؟



A 8 mm

B 9 mm

C 10 mm

D 11 mm

3) أي مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافة من أحد رؤوس مثلث إلى الضلع المقابل له؟

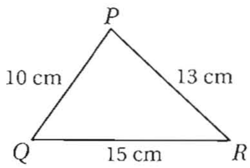
A ارتفاع

B عمود منصف

C قطعة متوسطة

D قطعة مستقيمة

4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$ ؟



A $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$

B $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$

C $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$

D $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$

5) ما الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة "الزاوية S ليست زاوية منفرجة"؟

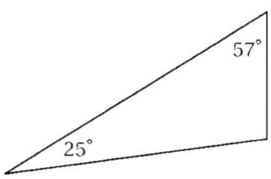
A $\angle S$ زاوية قائمة

B $\angle S$ زاوية منفرجة

C $\angle S$ زاوية حادّة

D $\angle S$ ليست زاوية حادّة

6) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه.



A حادّ الزوايا

C منفرج الزاوية

B متطابق الزوايا

D قائم الزاوية

7) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-6, -2)$, $(3, -5)$ ؟

A 3   **C** $-\frac{1}{3}$

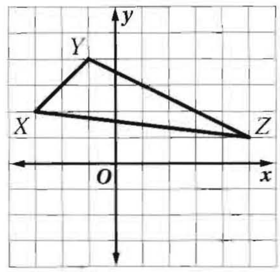
B $\frac{1}{3}$ **D** -3

أسئلة ذات إجابات قصيرة

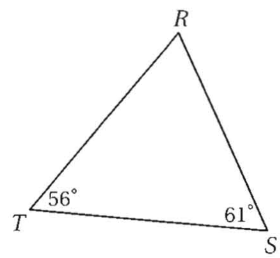
اكتب إجاباتك على نموذج الإجابة أو على أي ورقة أخرى.

8) إذا كان طولا ضلعين في مثلث 9 cm , 15 cm ، فما أصغر عدد صحيح من السنتمترات يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟

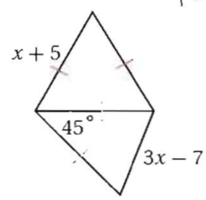
9) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



10) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتّبةً تبعًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول:

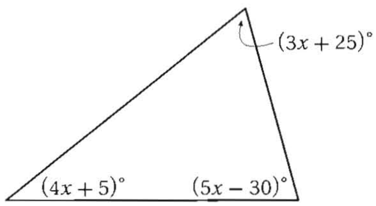


11) اكتب متباينة تصف قيم x الممكنة.



12) خرج كلٌّ من حمزة وهاني مع فرقة الكشافة وخيّموا في الصحراء. فترك حمزه المخيم وسار 2 km باتجاه الشرق. ثم انعطف 20° باتجاه جنوب الشرق، وسار 4 km أخرى. وأما هاني فسار 2 km باتجاه الغرب، ثم انعطف 30° باتجاه شمال الغرب ، وسار 4 km أخرى. أيهما أبعد عن المخيم؟

13) أوجد قيمة x في المثلث أدناه.



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1), B(0, 2)$, $C(3, 4)$.

A ارسم هذا المثلث في المستوى الإحداثي.

B أوجد أطوال أضلاعه (قرّب إلى أقرب جزء من عشرة).

C صنف المثلث من حيث أضلاعه وزواياه.

D قارن بين $m\angle A, m\angle C$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس...	4-1	4-5	4-2	4-3	4-4	3-1	2-3	4-5	4-2	4-3	4-6	4-6	3-2	3-1, 3-4

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف

على خط الأعداد:

$M = \frac{a+b}{2}$

في المستوى الإحداثي:

$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

في الفراغ:

$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

المسافة بين نقطتين

على خط الأعداد:

$d = |a - b|$

في المستوى الإحداثي:

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

في الفراغ:

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

الميل $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$

المحيط

المربع	$P = 4s$	**الدائرة**	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$A = s^2$	**المُعيَّن**	$A = \frac{1}{2}d_1 d_2$ أو $A = bh$
المستطيل	$A = \ell w$ أو $A = bh$	**المثلث**	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	**الدائرة**	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	**القطاع الدائري**	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	**الهرم**	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	**المخروط**	$L = \pi r\ell$

المساحة السطحية

المنشور	$T = Ph + 2B$	**المخروط**	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	**الكرة**	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	**الهرم**	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	**المخروط**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	**الكرة**	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

الصيـغ

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$	الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$		

الرموز

h	الارتفاع
$\angle$	زاوية
$\measuredangle$	زوايا
a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـِ
$\widehat{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ C
$\widehat{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ B
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو مساحة سطح الكرة أو قياس القوس بالدرجات
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط
b	قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع أو شبه المنحرف
$p \leftrightarrow q$	العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـِ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$°$	درجة
d	قطر الدائرة، المسافة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$\overleftrightarrow{DE}$	مستقيم يمر بالنقطتين D وَ E
$m\angle A$	قياس الزاويه A بالدرجات
$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
p	نفي العبارة p
$\sqrt{\ }$	الجذر التربيعي الموجب
(x, y)	الزوج المرتب
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـِ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـَ
$\square$	متوازي أضلاع
P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
r	نصف قطر الدائرة
$\overrightarrow{PQ}$	نصف مستقيم يمر بالنقطة Q وطرفه P
$\overline{RS}$	قطعة مستقيمة طرفاها R, S
s	جانب من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
V	الحجم
w	عرض المستطيل