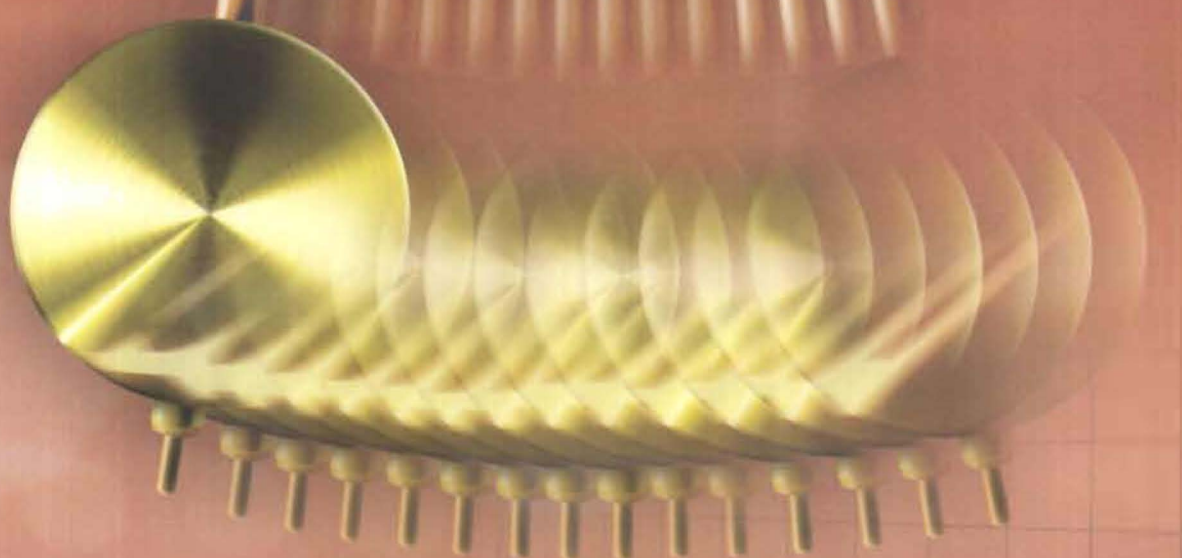
المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم

رياضيات ٣

التعليم الثانوي - نظام المقررات
مسار العلوم الطبيعية



الطبعة التجريبية
١٤٣٢ هـ - ٢٠١١م
يوزع مجاناً ولا يباع

العبيكان
Obeikan

رياضيات ٣

التعليم الثانوي- نظام المقررات - مسار العلوم الطبيعية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
صلاح بن عبد الله الزيد
عبدالحكيم عبدالله سليمان
عمر محمد أبو غليون
خلود عبدالحفيظ لوباني
حسان عبدالله الحوراني

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

اعتمد هذا الكتاب: اللجنة العلمية بوزارة التربية والتعليم

د. محمد بن مفرح العسيري
د. عبدالعزيز بن محمد الرويس
أ. عبدالله بن علي بن محسنه
د. سعاد بنت مساعد الأحمدي
أ. هيا بنت محمد العمراني
أ. عدنان بن محمد الجامع
أ. أسماء بنت عبدالعزيز الحواس

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ (فوتوكوبي)، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

Original Title:

Algebra2 © 2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M.Casey

Contributing Authors
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented
Shelbik.cole

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert m . capraro

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah cassett lent
Lynn T. Havens

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

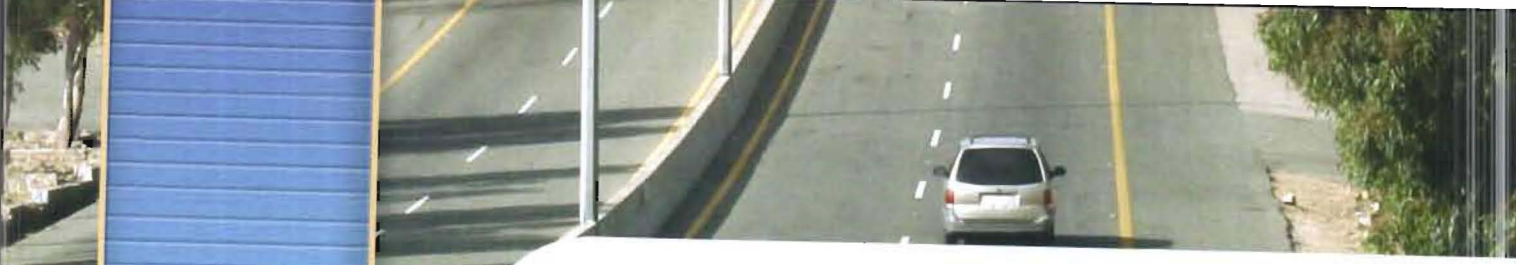
الفهرس

الفصل 1 الدوال والمتباينات

التهيئة للفصل 1 9
1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 10
1-2 العلاقات والدوال 16
توسع 1-2 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة 22
1-3 دوال خاصة 23
اختبار منتصف الفصل 29
1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا 30
1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا 35
توسع 1-5 معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 41
1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 42
دليل الدراسة والمراجعة 48
اختبار الفصل 53
اختبار تراكمي 54

الفصل 2 المصفوفات

التهيئة للفصل 2 57
2-1 مقدمة في المصفوفات 58
توسع 2-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات 64
2-2 العمليات على المصفوفات 65
2-3 ضرب المصفوفات 71
اختبار منتصف الفصل 78
2-4 المحدِّدات وقاعدة كرامر 79
2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 87
توسع 2-5 معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة 93
دليل الدراسة والمراجعة 94
اختبار الفصل 97
اختبار تراكمي 98



الفهرس

الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

التهيئة للفصل 3 101
3-1 الأعداد المركبة 102
3-2 القانون العام والمميز 109
توسع 3-2 معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما 117
3-3 العمليات على كثيرات الحدود 119
3-4 قسمة كثيرات الحدود 125
3-5 دوال كثيرات الحدود 131
اختبار منتصف الفصل 138
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود 139
توسع 3-6 معمل الحاسبة البيانية: حل متباينات كثيرات الحدود 146
3-7 نظريتا الباقي والعوامل 147
3-8 الجذور والأصفار 153
3-9 نظرية الصفر النسبي 160
دليل الدراسة والمراجعة 165
اختبار الفصل 169
اختبار تراكمي 170

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

التهيئة للفصل 4 173
4-1 العمليات على الدوال 174
4-2 العلاقات والدوال العكسية 181
توسع 4-2 معمل الحاسبة البيانية: الدالة العكسية 186
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي 187
4-4 الجذر النوني 193
توسع 4-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا 198
اختبار منتصف الفصل 199
4-5 العمليات على العبارات الجذرية 200
4-6 الأسس النسبية 206
4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية 212
توسع 4-7 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية 218
دليل الدراسة والمراجعة 220
اختبار الفصل 225
اختبار تراكمي 226
الصيغ والرموز 228

الفصل 1

الدوال والمتباينات
Functions and Inqualities

فيما سبق:

درستُ حل المعادلات والمتباينات الخطية.

والآن:

- أبسط العبارات الجبرية، وأجد قيمها.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحل مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

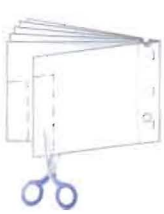
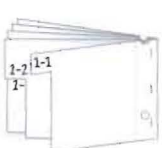
لماذا؟

إدارة الأعمال: يتطلب النجاح في إدارة الأعمال إتقان مهارات رياضية متنوعة. وفي هذا الفصل ستتعلم كيفية زيادة الربح أو تقليل التكلفة لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

المطويات منظم أفكار

الدوال والمتباينات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الدوال والمتباينات. مبتدئاً بثلاث أوراق A4.

1. **اطو** كل ورقة من المنتصف كما هو مبين في الشكل.
2. **قص** الأوراق مع خط الطي كما هو مبين، ثم ثبت أنصاف الأوراق الست الناتجة لتحصل على كُتيبٍ صغير.
3. **قص** أطراف الأوراق كما هو مبين، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى و4 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
4. **سمِّ** طرف كل ورقة برقم درس من دروس الفصل.

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

1) $15.7 + (-3.45)$
2) $-18.54 - (-32.05)$
3) $(-9.8)(6.75)$
4) $4 \div (-0.5)$
5) $3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$
6) $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$
7) $\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$
8) $-3 \div \frac{7}{8}$
9) **صناعات يدوية:** تحتاج فاطمة إلى $\frac{7}{8}$ m من القماش لصنع ربطة شعر، فكم مترًا من القماش يلزمها لصنع 12 ربطة؟

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي إذا كانت:
$a = -3, b = 4, c = -2$

10) $4a - 3$
11) $2b - 5c$
12) $b^2 - 3b + 6$
13) $\frac{2a + 4b}{c}$
14) **اتصالات:** تستعمل شركة اتصالات العبارة $0.25m + 20$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال. أوجد تكلفة 80 دقيقة اتصال.

مثّل في المستوي كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

15) $y < 3$
16) $x + y \geq 1$
17) $3x - y > 6$
18) $x + 2y \leq 5$
19) $y > 4x - 1$
20) $5x - 4y < 12$
21) **ألعاب:** أراد صاحب محل ألعاب جمع مبلغ لا يقل عن 2500 ريال من بيع نوعين من الألعاب لديه، سعر أحدهما 15 ريالًا، والثاني 25 ريالًا. اكتب متباينة تمثل عدد الألعاب المبيعة من كلا النوعين ليحقق صاحب المحل هدفه ثم مثلها بيانيًّا.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد ناتج: $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

$\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3(4)}{16(5)}$ — بضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$= -\frac{12}{80}$ — بالتبسيط.

$= -\frac{12 \div 4}{80 \div 4}$ — بقسمة كلًا من البسط والمقام على ع.م.أ (4)

$= -\frac{3}{20}$ — بالتبسيط.

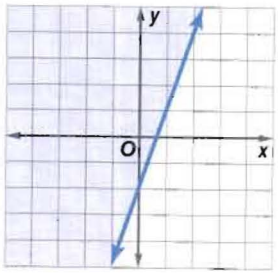
مثال 2

أوجد قيمة العبارة $3a^2 - 2ab + b^2$ إذا كانت $a = 4$، $b = -3$.

$3a^2 - 2ab + b^2 = 3(4^2) - 2(4)(-3) + (-3)^2$
$= 3(16) - 2(4)(-3) + 9$
$= 48 - (-24) + 9$
$= 48 + 24 + 9$
$= 81$

مثال 3

مثل في المستوي المتباينة $y \geq 3x - 2$ بيانيًّا.



الحد هو المستقيم $y = 3x - 2$ وبما أن رمز المتباينة هو $\geq$ فإن الحد سيكون متصلًا.

اختبر النقطة (0, 0).

$0 \stackrel{?}{\geq} 3(0) - 2$ — $(x, y) = (0, 0)$

$0 \geq -2$ ✓

ظلل المنطقة التي تحوي (0, 0).

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية
Properties of Real Numbers

فيما سبق:
درست الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها.

والآن:
- أصنّف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لإيجاد قيم العبارات الجبرية.

المفردات

الأعداد الحقيقية
real numbers
الأعداد النسبية
rational numbers
الأعداد غير النسبية
irrational numbers
الأعداد الصحيحة
integers
الأعداد الكلية
whole numbers
الأعداد الطبيعية
natural numbers

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أصناف بالسعر نفسه. إن شراء عدة أصناف لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

الأعداد الحقيقية: تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد.

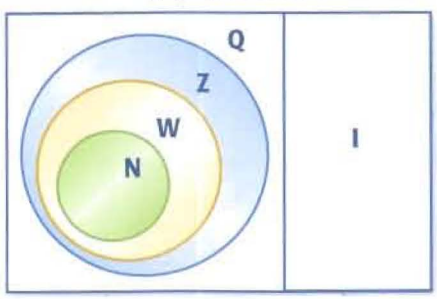
- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a وَ b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفرًا. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددًا عشريًّا منتهيًا أو دوريًّا.
- الصورة العشرية **للعدد غير النسبي** ليست منتهية و ليست دورية. لذا فإنّ الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي : $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$، و مجموعة **الأعداد الكلية** هي: $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. و مجموعة **الأعداد الطبيعية** هي: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\ldots$ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$

الأعداد الحقيقيّة R



مثال 1 تصنيف الأعداد

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

a) -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

تحقق من فهمك

1A) -185 **1B)** $-\sqrt{49}$ **1C)** $\sqrt{95}$ **1D)** $-\frac{7}{8}$

خصائص الأعداد الحقيقية: يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية:

إرشادات للدراسة

الأعداد الحقيقية

يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلًا يُعدّ أي عدد طبيعي عددًا كليًّا وصحيحًا، ونسبيًّا، وحقيقيًّا.

ملخص المفهوم — خصائص الأعداد الحقيقية

أضف إلى مطويتك

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي.	$a \cdot b$ عدد حقيقي.
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$	

مثال 2 خصائص الأعداد الحقيقية

ما الخاصية الموضحة في: $13 \cdot (5 \cdot 4) = (13 \cdot 4) \cdot 5$ ؟

الخاصية التجميعية لعملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن ناتج الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.

تحقق من فهمك

2) ما الخاصية الموضحة في: $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟

يمكن استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتسهيل إيجاد قيم العبارات.

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أمّا إشارة النظير الضربي لعدد فهي ذاتها إشارة ذلك العدد.

مثال 3 النظير الجمعي و النظير الضربي

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$.

بما أن $-\frac{5}{8} + \frac{5}{8} = 0$، فإن النظير الجمعي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $\frac{5}{8}$.

وبما أن $\left(-\frac{8}{5}\right)\left(-\frac{5}{8}\right) = 1$، فإن النظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $-\frac{8}{5}$.

تحقق من فهمك

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

3A) 1.25

3B) $2\frac{1}{2}$

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

مثال 4 من واقع الحياة — خاصية التوزيع

الجهاز أو الملحق	السعر (ريال)
حاسوب	1000
شاشة	600
آله طابعة	500
كاميرا رقمية	150
برمجيات ملحقة	300

مبيعات: يبين الجدول المجاور أسعار جهاز حاسوب وملحقاته في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي للجهاز وملحقاته، بنسبة6% فجد قيمة هذه الزيادة.

يمكن إيجاد قيمة هذه الزيادة بطريقتين هما:

الطريقة 1: اضرب ثم اجمع .

اضرب كل قيمة في 6%، أو 0.06، ثم اجمع.

$$T = 0.06(1000) + 0.06(600) + 0.06(500) + 0.06(150) + 0.06(300)$$

$$= 60 + 36 + 30 + 9 + 18$$

$$= 153$$

الطريقة 2: اجمع ثم اضرب.

أوجد السعر الكلي لجهاز الحاسوب وملحقاته قبل الزيادة، ثم اضربه في العدد 0.06

$$T = 0.06(1000 + 600 + 500 + 150 + 300)$$

$$= 0.06(2550)$$

$$= 153$$

فتكون قيمة الزيادة 153 ريالاً. لاحظ أن النتيجة متساوية في الطريقتين.

الربط مع الحياة

زادت ملحقات أجهزة الحاسوب على نحوٍ مطرد في السنوات الأخيرة، حتى أصبح الحاسوب يقوم مقام الكثير من الأجهزة الإلكترونية كآلات التصوير والتسجيل وغيرها.

تحقق من فهمك

4) أعمال: يتقاضى كمال 20 ريالًا عن كل ساعة عمل في محل تجاري. فإذا كانت ساعات عمل كمال في أحد الأسابيع هي 4, 3, 2.5, 3, 4 فما المبلغ الذي حصل عليه كمال في ذلك الأسبوع؟

تستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط العبارات الجبرية .

مثال 5 تبسيط العبارات الجبرية

بسّط العبارة: $3(2q + r) + 5(4q - 7r)$

$$3(2q + r) + 5(4q - 7r)$$

$= 3(2q) + 3(r) + 5(4q) - 5(7r)$ — خاصية التوزيع

$= 6q + 3r + 20q - 35r$ — بالضرب .

$= 6q + 20q + 3r - 35r$ — الخاصية التبديلية للجمع

$= (6 + 20)q + (3 - 35)r$ — خاصية التوزيع

$= 26q - 32r$ — بالتبسيط .

تحقق من فهمك

5) بسّط العبارة: $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$.

تأكد

مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 **2)** $\frac{5}{4}$ **3)** $\sqrt{11}$ **4)** -12

مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

5) $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ **6)** $7(9 - 5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$

7) $84 + 16 = 16 + 84$ **8)** $(12 + 5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي و النظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

9) -7 **10)** $\frac{4}{9}$ **11)** 3.8 **12)** $\sqrt{5}$

مثال 4 **13)** **مال:** يعمل عادل خياطًا للأثواب، ويربح 44 ريالًا عن كل ثوب يخيطه، ويخطط لجمع مبلغ 1300 ريال لشراء آلة خياطة جديدة، ويبين الجدول المجاور عدد الثياب التي خاطها في كل يوم من أيام أسبوع معين.

اليوم	عدد الأثواب المخيطة
السبت	2
الأحد	4
الإثنين	3
الثلاثاء	1
الأربعاء	5
الخميس	6
الجمعة	7

a) اكتب عبارة تمثل إجمالي المبلغ الذي ربحهُ عادل في ذلك الأسبوع.

b) استعمل خاصية التوزيع لتجد هذا المبلغ.

c) متى يكسب المبلغ الذي يخطط لجمعه؟ وضح إجابتك.

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

14) $5(3x + 6y) + 4(2x - 9y)$ **15)** $6(6a + 5b) - 3(4a + 7b)$

16) $-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d)$ **17)** $-5(8x - 2y) - 4(-6x - 3y)$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ **19)** -8.13 **20)** $\sqrt{25}$ **21)** $0.\overline{61}$

22) $\frac{9}{3}$ **23)** $-\sqrt{144}$ **24)** $\frac{21}{7}$ **25)** $\sqrt{17}$

مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

26) $-7y + 7y = 0$ **27)** $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11}$

28) $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$ **29)** $\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30) -8 **31)** 12.1 **32)** -0.25

33) $\frac{6}{13}$ **34)** $-\frac{3}{8}$ **35)** $\sqrt{15}$

مثال 4 **36)** يبين الجدول المجاور أسعار ثلاثة أصناف من الأدوات المكتبية. فإذا انخفض سعر كل منها بنسبة 15% فجد قيمة هذا الانخفاض للأصناف الثلاثة معًا.

الصنف	السعر (بالريال)
قلم حبر	50
آلة حاسبة	60
قاموس	40

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

37) $8b - 3c + 4b + 9c$

38) $-2a + 9d - 5a - 6d$

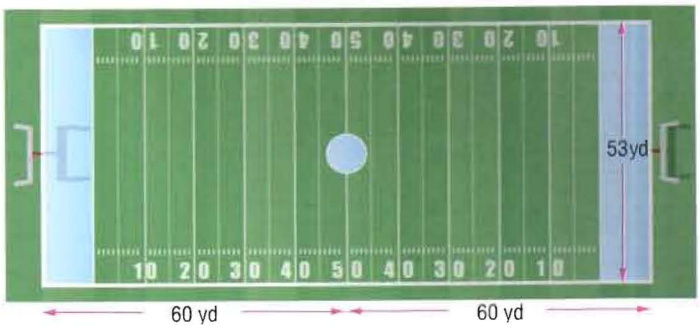
39) $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$

40) $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$

41) $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$

42) $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$

43) كرة قدم: وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه. ثم أوجد مساحة الملعب.



44) تخفيضات: يبين الجدول المجاور نسبة التخفيض لأسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. فأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكنسة ومروحة.

a) وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد.

b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملًا خصائص العمليات على الأعداد.

التخفيضات		
نوع السلعة	نسبة التخفيض	السعر السابق (ريال)
جهاز تسجيل	30%	170
مكنسة	30%	350
مروحة	30%	110

بسّط كل عبارة مما يأتي:

45) $\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y)$

46) $\frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d)$

47) $-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$

48) $-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$

49) ديكور: يريد محمد شراء 5 ستائر لنوافذ منزله: نافذتان كبيرتان، و 3 نوافذ صغيرة . فإذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$ m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$ m.

a) كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد ؟

b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهنيًّا.

50) تمثيلات متعددة: مستعملًا الأعداد: $-\sqrt{6}, 3, \frac{-15}{3}, 4.1, \pi, 0, \frac{3}{8}, \sqrt{36}$.

أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: نظم هذه الأعداد في جدول وفقًا لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها.

b) جبريًّا: اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًّا.

c) بيانيًّا: مثّل هذه الأعداد على خط الأعداد.

d) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

مسائل مهارات التفكير العليا

51) ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ وضح إجابتك.

$\sqrt{21}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{67}$	$\sqrt{81}$

52) **تحدٍ:** أوجد قيمة العبارة $48(30r + 36t)$ بدلالة w علمًا بأن $w = 12(5r + 6t)$.

53) **اكتشف الخطأ:** بسّطت كل من نور وخديجة العبارة: $4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. فهل أي منهما تبسيطها صحيح؟ وضح إجابتك.

نور

$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$

$56a - 40b - 6b + 24a$

$80a - 46b$

خديجة

$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$

$56a - 40b - 6a - 24b$

$50a - 64b$

54) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن إشارة الجذر".

55) **مسألة مفتوحة:** حدد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالاً مضادًا.

56) **اكتب:** اشرح وأعطِ أمثلة توضح أن عمليتي الطرح والقسمة لا تحققان الخاصية التبديلية.

تدريب على اختبار

57) ما الحد العاشر في المتتابعة ... 2, 4, 7, 11, 16, ؟

A 46 **B** 56 **C** 67 **D** 72

58) ما مجال الدالة : (6, 4), (−2, 5), (0, 4), (−3, 0)؟

A {−3, 6} **B** {−3, −2, 0, 6} **C** {0, 4, 5, 6} **D** {−3, −2, 0, 4, 5, 6}

مراجعة تراكمية

59) أوجد قيمة: $8(4 - 2)^3$. (مهارة سابقة)

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

60) $(x + 2)(x - 3)$

61) $(b - 7)(b - 3)$

أوجد قيمة كل مما يأتي؛ علمًا بأن $a = 3, b = \frac{2}{3}, c = -1.7$. (مهارة سابقة)

62) $\frac{1}{6}b + 1$

63) $\frac{a \cdot b}{c}$

1-2 العلاقات والدوال
Relations and Functions

فيما سبق:
درستُ تحديد كل من مجال ومدى علاقة معطاة.

والآن:
- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات
الدالة المتباينة
one-to-one function
العلاقة المنفصلة
discrete relation
العلاقة المتصلة
continuous relation
اختبار الخط الرأسي
vertical line test
المتغير المستقل
independent variable
المتغير التابع
dependent variable
رمز الدالة
function notation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كل من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (20, 9).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض

الشهر	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

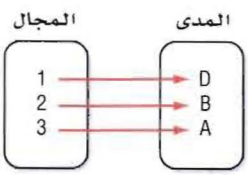
العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

مفهوم أساسي الدالة المتباينة

أضف إلى مطويتك

الدالة المتباينة

كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، ولا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.



مثال 1 المجال والمدى

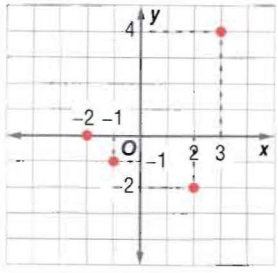
حدد كلًّا من مجال و مدى كل علاقة فيما يأتي، وبين أيهما دالة، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟

a) $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (-6, -9)\}$

المجال = $\{-6, -5, -3, -1\}$ المدى = $\{-9, -7, -1, 7\}$

هل هي دالة: لا، لأن العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين -9 ، -1 في المدى.

b)



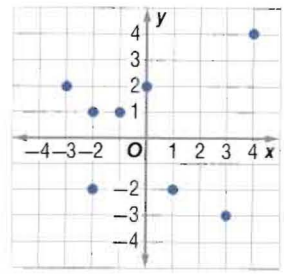
المجال = $\{-2, -1, 2, 3\}$

المدى = $\{-2, -1, 0, 4\}$

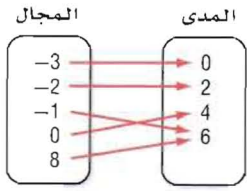
هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

تحقق من فهمك

(1A



(1B



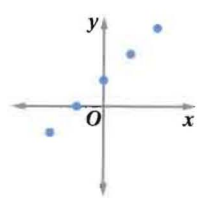
العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، وإذا احتوى مجال العلاقة عددًا لا نهائيًّا من العناصر وأمكن تمثيلها بيانيًّا بمستقيم أو بمنحنى متصل، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

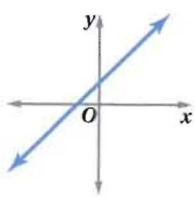
إذا أمكن تمثيل العلاقة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة. تكون العلاقة متصلة.

العلاقة A



علاقة منفصلة

العلاقة B



علاقة متصلة

يمكن استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

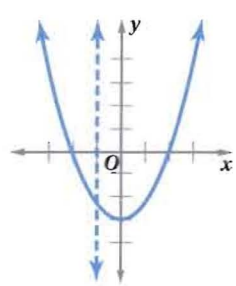
أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

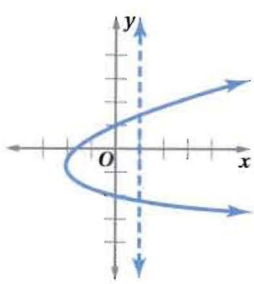
اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

النموذج:

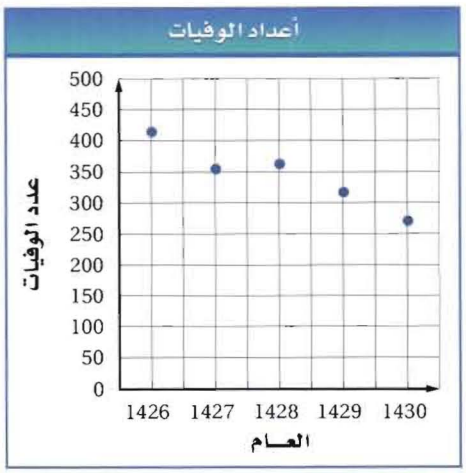


إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر فالعلاقة ليست دالة.



مثال 2 من واقع الحياة

حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في مدينة الرياض نتيجة الحوادث المرورية من عام 1426 هـ إلى عام 1430 هـ ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟



بما أن التمثيل البياني مكون من نقاط منفردة ومنفصلة، فالعلاقة منفصلة. و باستعمال اختبار الخط الرأسي نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التمثيل، إذن فالعلاقة تمثل دالة.

تحقق من فهمك

2) إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1424هـ إلى 1429هـ على الترتيب هو: 25, 28, 34, 31, 27, 29. مثّل هذه البيانات بيانيًّا، وحدد هل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أو متصلة. وهل تمثل دالة؟

الربط مع الحياة

هل تعلم أن لكل 8 حوادث مرورية في المملكة العربية السعودية يحدث 6 إصابات، بينما النسبة العالمية إصابة واحدة لكل 8 حوادث.
المصدر: www.rt.gov.sa

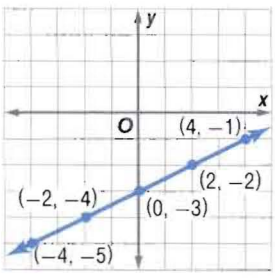
معادلات العلاقات والدوال: يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

مثال 3 تمثيل العلاقة بيانيًّا

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.

x	y
−4	−5
−2	−4
0	−3
2	−2
4	−1



أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم. لذا فإن كلًّا من مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي، لذا، فإن المعادلة تمثل دالة. وكل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y، وكل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x. لذا، فالدالة متباينة.

وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

تحقق من فهمك

3) مثّل المعادلة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x)، يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الثاني (غالبًا ما يكون y)، يسمى **المتغير التابع** لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x.

المعادلات التي تمثل دوالًّا تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6. لذا، فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y ويُقرأ "f الـ x". f هو اسم الدالة وليس متغيرًا مضروبًا في x.

مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $f(6)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$6^2 = 36$	$= 2(36) - 8$
بالتبسيط	$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$	$= 2(4y^2) - 8$
بالتبسيط	$= 8y^2 - 8$

تحقق من فهمك

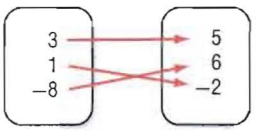
لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

4A) $g(2.8)$ **4B)** $g(4a)$

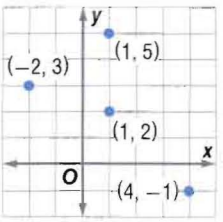
تأكد

مثال 1 حدد كلًّا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

1)



2)



3)

x	y
−2	−4
1	−4
4	−2
8	6

مثال 2 **4) كرة سلة:** يبين الجدول المجاور متوسط عدد النقاط التي أحرزها فريق كرة سلة في مبارياته خلال 4 مواسم.

الموسم	متوسط أعمار الفريق	متوسط عدد النقاط
1423–1424	22	16.2
1424–1425	23	24.1
1425–1426	24	27.2
1426–1427	25	23.5

a) إذا كان متوسط الأعمار هو المجال، فحدد كلًّا من المجال والمدى.

b) اكتب علاقة على صورة أزواج مرتبة تمثل البيانات.

c) هل هذه العلاقة منفصلة أم متصلة؟

d) مثّل هذه العلاقة بيانيًّا، وهل هي دالة أم لا؟

مثال 3 مثّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها، ومداها، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإن كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

5) $y = 5x + 4$ **6)** $y = -4x - 2$ **7)** $y = 3x^2$ **8)** $x = 7$

مثال 4 أوجد قيمة كل مما يأتي:

9) $f(-3)$ إذا كانت $f(x) = -4x - 8$

10) $g(5)$ إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$

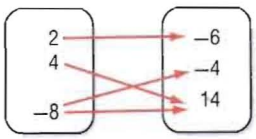
تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد كلًّا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

11)

x	y
-0.3	-6
0.4	-3
1.2	-1

12)



13) $\{(3,-4),(-1,0),(3,0),(5,3)\}$

مثال 2

14) سكان: يبين الجدول المجاور عدد الذكور وعدد الإناث في 6 مناطق إدارية مختلفة في المملكة لعام 1431هـ.

المنطقة الإدارية	عدد الذكور	عدد الإناث
مكة المكرمة	2085813	2030252
الرياض	2220727	2076018
المدينة المنورة	635046	627466
حائل	242305	244899
تبوك	339450	321703
الجوف	177379	171733

a) مثّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا على أن يمثل المحور الأفقي عدد الذكور والمحور الرأسي عدد الإناث.

b) حدد كلًّا من المجال والمدى.

c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.

مثال 3 مثّل كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إن كانت منفصلة أم متصلة.

15) $y = -5x^2$ **16)** $y = 4x^2 - 8$ **17)** $y = -3x^3 - 1$

مثال 4 أوجد قيمة كل مما يأتي:

18) $f(-8)$ إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 1$ **19)** $f(2.5)$ إذا كانت $f(x) = 16x^2$

20) غوص: يبين الجدول المجاور مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط الجوي	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a) مثل البيانات المعطاة في الجدول بأزواج مرتبة

b) مثّل العلاقة بيانيًّا.

c) حدد كلًّا من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

d) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.

إذا كانت $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = -2x^2,\ h(x) = -4x^2 - 2x + 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

21) $g(-6)$ **22)** $h(3)$ **23)** $h(8)$

24) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **25)** $g\left(\frac{3}{2}\right)$ **26)** $h\left(\frac{1}{5}\right)$

الربط مع الحياة

الضغط الواقع على الغواص عندما يكون على عمق 10 أمتار تحت الماء ضعف الضغط الجوي على السطح تقريبًا.

27) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال الدوال المتباينة.

a) بيانيًّا: مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

$j(x) = x^2 + 2$ $\quad h(x) = -x^2$ $\quad g(x) = 2^x$ $\quad f(x) = x^2$

b) جدوليًّا: استعمل التمثيلات البيانية في الفرع **a** لعمل جدول يبين عدد المرات الممكن أن يقطع فيها خط أفقي، التمثيل البياني لكل دالة مما سبق.

c) تحليليًّا: حتى تكون الدالة متباينة يجب ألا يقطع أي خط أفقي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة. أي الدوال السابقة تحقق هذا الشرط وأيها لا تحققه؟

d) جدوليًّا: كوّن جدولًا، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى متباينة أو غير متباينة.

28) يملك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهريًا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$؛ تمثل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهر. فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فأيهما حله صحيح؟ وضح إجابتك.

أحمد	خالد
$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= -4(9d^2) - 6d + 1$ $= -36d^2 - 6d + 1$	$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= 12d^2 - 6d + 1$

30) **مسألة مفتوحة:** مثِّل كلًّا من العلاقات الآتية بيانيًّا:

a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.

b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.

c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحًا إلى الساعة 11 مساءً.

31) **تحدَّ:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $g(b) = 51, f(b) = 31, g(a) = 33, f(a) = 19$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققا المعطيات السابقة.

32) **تبرير:** اذكر هل العبارة الآتية: صحيحة دائمًا، صحيحة أحيانًا، لا يمكن أن تكون صحيحة؟
" إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات بأكثر من نقطة فإن العلاقة تمثل دالة ".

33) **اكتب:** وضح كيف يحدد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

تدريب على اختبار

34) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء g المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟

A $g = 19500 - 6m$ **C** $g = \frac{19500}{6m}$

B $g = 19500 + 6m$ **D** $g = \frac{6m}{19500}$

35) إذا كان $g(x) = x^2$، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

36) $6(3a - 2b) + 3(5a + 4b)$ **37)** $-4(5x - 3y) + 2(y + 3x)$ **38)** $-7(2c - 4d) + 8(3c + d)$

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-1)

39) $4(2y - 3) + 5(3y + 1) = -99$ **40)** $8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d$ **41)** $10y - 5 - 3y = 4(2y + 3) - 20$

توسع

1-2 الدوال المنفصلة والدوال المتصلة

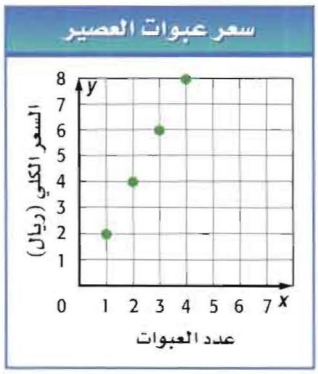
الهدف

أستعمل الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية.

تُباع عبوة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 ريال، ويمكن إيجاد سعر x عبوة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$ حيث y السعر الكلي بالريال. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًّا كما هو موضح في التمثيل المجاور.

بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر عبوتي عصير يساوي 4 ريالات، وسعر 3 عبوات يساوي 6 ريالات وهكذا. يبين التمثيل البياني أن سعر 1.5 عبوة هو 2(1.5) ويساوي 3 ريالات. إلا أن عبوات العصير لا تُباع مملوءة جزئيًّا. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

التمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تمثل سعر عبوات العصير. والمجال في هذا التمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.



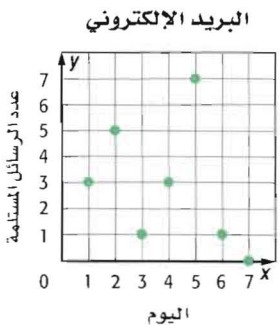
عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة لتمثيل موقف من واقع الحياة يجب الأخذ بعين الاعتبار إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تعد منطقية ومقبولة كعناصر في المجال.

تمارين

بين هل مُثِّلت كل دالة فيما يأتي بصورة صحيحة بوصفها دالة متصلة أو منفصلة، وفسر إجابتك.

1)

2)



3) y تمثل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.

4) y تمثل العدد الكلي لراكبي لعبة العجلة الدوارة بعد x دورة من تشغيل اللعبة.

5) **اكتب:** مثالًا من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، وفسر إجابتك.

1-3 دوال خاصة
Special Functions

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.

والآن:
- أكتب الدوال متعددة التعريف وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وأمثّلها بيانيًا.

المفردات:
الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function
الدالة المتعددة التعريف الخطية
piecewise-linear function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

السمنة حالة مرضية يمكن تعريفها طبيًا أنها زيادة الدهون في الجسم، وتنتج السمنة عن أخذ مقدار طاقة أكبر من حاجة الجسم دون استهلاكها. ويبين الجدول المجاور نسب المصابات بالسمنة لفئات عمرية مختلفة في المملكة.

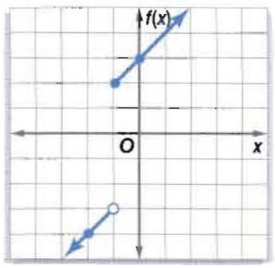
نسب المصابات بالسمنة في المملكة حسب الفئة العمرية

من	إلى	النسبة
15	24	19%
25	34	38%
35	44	53%
45	54	58%
55	64	49%

الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرّفة بعبارة مختلفة، فالدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**. وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًا توضع دائرة صغيرة مظلّلة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلّلة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

مثال 1 الدالة متعددة التعريف

مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , \ x < -1 \\ x + 3 & , \ x \geq -1 \end{cases}$ بيانيًا.
وحدّد كلًا من مجالها ومداها.



الخطوة 1: مثّل $f(x) = x - 2$ بيانيًا عندما $x < -1$.

احسب قيمة المقدار $x - 2$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أقل من -1 ولتكن -2

$f(x) = x - 2$ $\qquad$ $f(x) = x - 2$

$f(-1) = (-1) - 2 = -3$ $\qquad$ $f(-2) = (-2) - 2 = -4$

حدد النقطتين $(-2, -4)$, $(-1, -3)$ وصل بينهما بنصف مستقيم

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-1, -3)$.

الخطوة 2: مثّل $f(x) = x + 3$ بيانيًا عندما $x \geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x + 3$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من أو تساوي -1 ولتكن 0

$f(x) = x + 3$ $\qquad$ $f(x) = x + 3$

$f(-1) = (-1) + 3 = 2$ $\qquad$ $f(0) = (0) + 3 = 3$

حدد النقطتين $(-1, 2)$, $(0, 3)$ وصل بينهما بنصف مستقيم

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، لذا نبدأ بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-1, 2)$.

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، لذا فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من 3 وكل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2، لذا فإن المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 3 \text{ أو } f(x) \geq 2\}$

تحقق من فهمك

1) مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$ بيانيًا، ثم حدد كلًا من مجالها ومداها.

تمثّل الدوال المتعددة التعريف غالبًا بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية**.

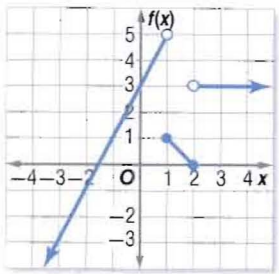
إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

قد تكون الدوال المتعددة التعريف متصلة أو غير متصلة.

مثال 2 كتابة الدالة المتعددة التعريف

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني المجاور.



اكتب الدالة التي تمثل كل جزء في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر تمثله الدالة $f(x) = 2x + 3$.
وتوجد دائرة غير مظللة عند النقطة (1, 5)، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x|x < 1\}$.

الجزء الأوسط تمثله الدالة $f(x) = -x + 2$.
وتوجد دائرتان مظللتان عند النقطتين (1, 1) و (2, 0)، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x|1 \le x \le 2\}$.

الجزء الأيمن تمثله الدالة $f(x) = 3$. وتوجد دائرة غير مظلّلة عند النقطة (3 , 2).

وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x|x > 2\}$، ونكتب الدالة المتعددة التعريف على النحو الآتي:

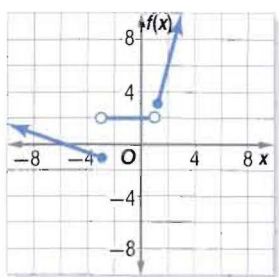
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 , & x < 1 \\ -x + 2 , & 1 \le x \le 2 \\ 3 , & x > 2 \end{cases}$$

تحقق: يبين التمثيل البياني نصف مستقيم ميله موجب عندما تكون $x < 1$. ويبين أيضًا قطعة مستقيمة ميلها سالب عندما تكون $1 \le x \le 2$ ونصف مستقيم آخر ميله صفر عندما تكون $x > 2$. لذا يكون تعريف الدالة منطقيًّا للتمثيل البياني المعطى.

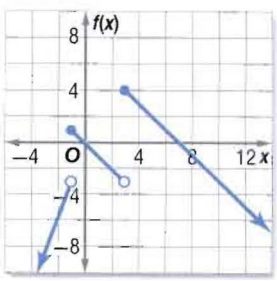
تحقق من فهمك

اكتب الدالة المتعددة التعريف في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

(2A)



(2B)



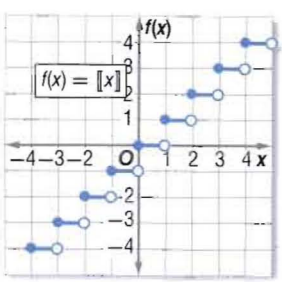
إرشادات للدراسة

دالة أكبر عدد صحيح

لاحظ أن مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها هو مجموعة الأعداد الصحيحة.

الدالة الدرجية ودالة القيمة المطلقة: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [\![x]\!]$، هي مثال على الدالة الدرجية، حيث يعني الرمز $[\![x]\!]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

فعلى سبيل المثال:
$[\![3.25]\!] = 3$ وكذلك $[\![-4.6]\!] = -5$.



مثال 3 من واقع الحياة — استعمال الدالة الدرجية

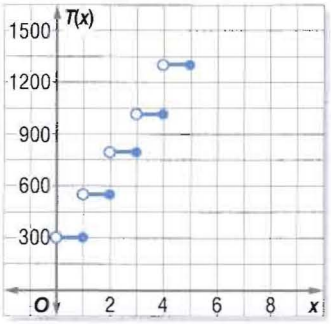
عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة 300 ريال مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و250 ريالًا مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانيًّا.

أفهم: أجرة التأجير هي 300 ريال عن اليوم الأول بالإضافة إلى 250 ريالًا عن أي جزء من كل يوم إضافي. لذا، فإن التمثيل البياني عبارة عن دالة متعددة التعريف.

أخطط: إذا كان زمن التأجير أكبر من 0 يوم و أقل من أو يساوي يوم، فإن الأجرة هي 300 ريال. وإذا كان الزمن أكبر من يوم وأقل من أو يساوي يومين فإن الأجرة هي 550 ريالًا وهكذا.

أحل: استعمل نمط الزمن مع الأجرة لعمل جدول، حيث x هي عدد أيام تأجير الشقة. و $T(x)$ هي أجرة المجمع ثم مثّله بيانيًّا.

x	$T(x)$
$0 < x \le 1$	300 ريال
$1 < x \le 2$	550 ريالًا
$2 < x \le 3$	800 ريال
$3 < x \le 4$	1050 ريالًا
$4 < x \le 5$	1300 ريال



تحقق: بما أن المجمع يحوّل أي كسر للعدد الصحيح التالي، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلّلة عن يسارها، وأخرى مظلّلة عن يمينها كما في الشكل.

تحقق من فهمك

3) إعادة تدوير الورق: تدفع شركة لإعادة تدوير الورق 25 ريالاً عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. مثّل بيانيًّا المبلغ $P(x)$ الذي تدفعه الشركة لعدد الصناديق x التي تم إحضارها لتدويرها.

الربط مع الحياة

تقدر المخلفات الورقية في السعودية بـ 1.5 مليون طن سنويًا يستغل منها في عمليات التدوير 700 ألف طن فقط.

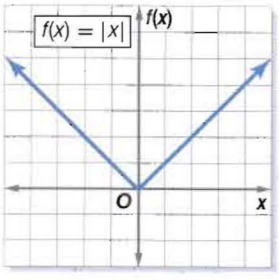
وهناك نوع آخر من الدوال متعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالة القيمة المطلقة الأساسية

الدالة الرئيسة (الأم)	$f(x) = \lvert x \rvert$ ، وتُعرَف على النحو الآتي: $f(x) = \begin{cases} x & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$
شكل التمثيل البياني	على شكل حرف V
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
المقطعان	$x = 0, f(x) = 0$
ولا يمكن أن تكون	$f(x) < 0$



مثال 4 دالة القيمة المطلقة

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها.

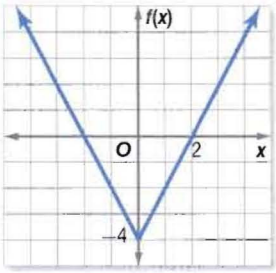
1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر،
أي $2x = 0$ أو $x = 0$

2) كوّن جدولًا للقيم، يحوي قيمًا لِـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$\|2x\| - 4$
−2	0
−1	−2
0	−4
1	−2
2	0

3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.

4) صل بين النقاط.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -4\}$.

تحقق من فهمك

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها:

(4A) $f(x) = |x - 2|$

(4B) $f(x) = -|x| + 1$

تأكد

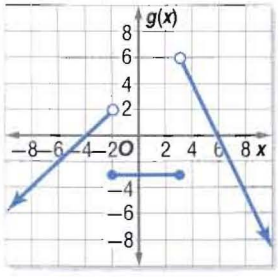
مثال 1 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها:

(1) $f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & -4 < x < 2 \\ -x+6, & x \geq 2 \end{cases}$

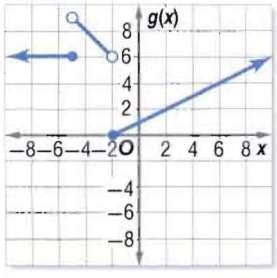
(2) $f(x) = \begin{cases} 8, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 4 \\ -4-x, & x \geq 4 \end{cases}$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في كل مما يأتي:

(3)



(4)



المثالان 3, 4

(5) محاضرات طبية: يريد أحد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لِـ 250 شخصًا فقط، وكان عدد راغبي حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير. مثّل بيانيًّا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين العدد الأدنى من المحاضرات y التي يجب أن يلقيها الطبيب، وعدد حضور تلك المحاضرات x.

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها:

(6) $g(x) = -2[\![x]\!]$

(7) $h(x) = [\![x - 5]\!]$

(8) $g(x) = |-3x|$

(9) $f(x) = 2|x|$

(10) $h(x) = |x + 4|$

(11) $s(x) = |-2x| + 6$

تدرب وحل المسائل

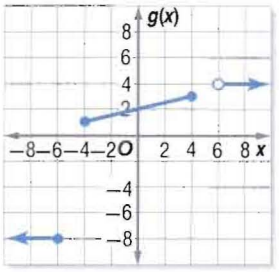
مثال 1 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها:

12) $f(x) = \begin{cases} -3x, & x \le -4 \\ x, & 0 < x \le 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases}$

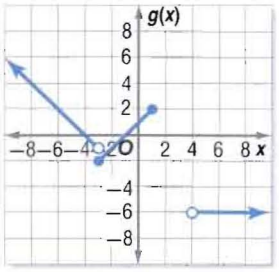
13) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le -6 \\ 5, & -6 < x \le 2 \\ -2x + 1, & x > 4 \end{cases}$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي:

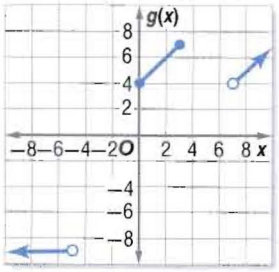
14)



15)



16)



مثال 3 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

17) $f(x) = [\![x]\!] - 6$

18) $h(x) = [\![3x]\!] - 8$

19) $f(x) = [\![3x + 2]\!]$

20) $g(x) = 2[\![0.5x + 4]\!]$

مثال 4 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

21) $f(x) = |x - 5|$

22) $g(x) = |x + 2|$

23) $h(x) = |2x| - 8$

24) $k(x) = |-3x| + 3$

25) $f(x) = 2|x - 4| + 6$

26) $h(x) = -3|0.5x + 1| - 2$

27) جمعية خيرية: تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات لإيصالها إلى مستحقيها، وتتبرع الجمعية أيضًا بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون 100 ريال أو تساويها، كما تضيف الجمعية 100 ريال إلى أي صدقة تزيد على 100 ريال.

a) حدّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف.

b) اكتب الدالة التي تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا.

الربط مع الحياة

تهدف جمعيات البرّ بالمملكة إلى ترسيخ مبدأ التكافل الاجتماعي بين أفراد المجتمع وتحويله إلى واقع عملي من خلال رعاية المحتاجين وتخفيف معاناتهم بتوفير الغذاء والدواء واللباس والأثاث.

28) ترفيه: يوضح الجدول المجاور: تكلفة استئجار دراجة هوائية.

a) حدد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف.

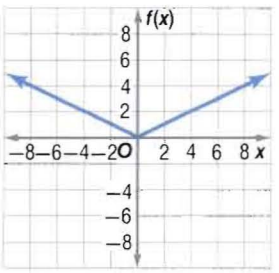
b) اكتب الدالة التي تمثّل هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا.

استئجار الدراجات الهوائية

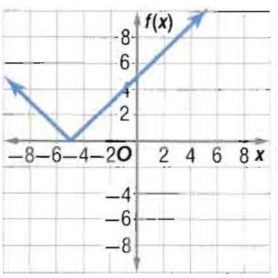
الزمن t (ساعة)	السعر (ريال)
$0 < t \le \frac{1}{2}$	6
$\frac{1}{2} < t \le 1$	10
$1 < t \le 2$	16
$2 < t \le 3$	24

اكتب دالة القيمة المطلقة التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي:

29)



30)



مثّل كُل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلاً من مجالها ومداها:

31) $f(x) = [\![|0.5x|]\!]$ **32)** $g(x) = |[\![2x]\!]|$

33) $g(x) = \begin{cases} [\![x]\!], & x < -4 \\ x + 1, & -4 \le x \le 3 \\ -|x|, & x > 3 \end{cases}$ **34)** $h(x) = \begin{cases} -|x|, & x < -6 \\ |x|, & -6 \le x \le 2 \\ |-x|, & x > 2 \end{cases}$

35) **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x) = |x| - 4, g(x) = |3x|$

a) جدوليًّا: كوّن جدولًا لقيم كل من $f(x)$ و $g(x)$ ما بين $x = 4, x = -4$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا على مستوى إحداثي مختلف.

c) عدديًّا: احسب الميل بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين ميل كل من جزأي دالة القيمة المطلقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **مسألة مفتوحة:** اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

37) **تحد:** مثّل المعادلة $|y| = 2|x + 3| - 5$ بيانيًّا.

38) **تبرير:** أعط مثالاً مضادًّا للجملة الآتية، وفسّر إجابتك.

"حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x، فإنك تقرّب x إلى أقرب عدد صحيح"

39) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة قيمة مطلقة $f(x)$، تحقق $f(5) = -3$.

40) **اكتب:** اشرح من خلال مثال كيف تستعمل الدوال متعددة التعريف لتمثيل مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار

41) **إجابة قصيرة:** ما العبارة التي تعطي الحد النوني للنمط في الجدول التالي؟

2	4	6	8	n
7	13	19	25	?

42) أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$؟

A $f(x) = 2x$ **B** $f(x) = |-2x|$

C $f(x) = [\![x]\!]$ **D** $f(x) = [\![2x]\!]$

مراجعة تراكمية

إذا كان $f(x) = -4x + 6, g(x) = -x^2, h(x) = -2x^2 - 6x + 9$، فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

43) $f(2c)$ **44)** $g(a + 1)$ **45)** $h(6)$

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

46) $\sqrt{36}$ **47)** -3 **48)** $\frac{2}{5}$ **49)** $\sqrt{11}$

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) $\frac{25}{11}$

2) $-\frac{128}{32}$

3) $\sqrt{50}$

4) -32.4

5) اذكر الخاصية الموضحة في المعادلة الآتية:
$7(4 + 15) = 4(7) + 15(7)$؟

6) بسّط العبارة $-3(7a - 4b) + 2(-3a + b)$

7) **ملابس:** يريد سعد شراء 3 قمصان و3 بناطيل. فإذا كان سعر القميص الواحد 35 ريالًا. وسعر البنطال الواحد 55 ريالًا. فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملًا خاصية التوزيع.

8) **اختيار من متعدد:** أي العبارات التالية تكافئ $\frac{2}{3}(4m - 5n) + \frac{1}{5}(2m + n)$ ؟

A $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

B $46m - 47n$

C $-\frac{mn}{15}$

D $\frac{5}{4}m - \frac{9}{8}n$

9) أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $\frac{7}{6}$.

10) حدد كلًّا من مجال العلاقة الآتية ومداها، ثم بين هل تمثل دالة أم لا: $\{(3, 2), (4, 1), (0, 3), (5, -2), (3, 7)\}$

11) مثّل المعادلة $y = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟ وهل هي منفصلة أم متصلة؟

إذا كان $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

12) $f(-2)$

13) $f(2y)$

14) $f(1.4)$

15) **اختيار من متعدد:** يقدر دخل سيارة أجرة بالدالة $f(x) = 0.35x + 49$، حيث x عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة. قدّر دخل سيارة قطعت 250 km

A 84 ريالاً

B 112.50 ريالاً

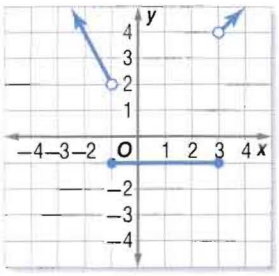
C 136.50 ريالاً

D 215 ريالاً

16) مثل بيانيًّا الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

17) اكتب الدالة متعددة التعريف الممثلة بيانيًّا فيما يأتي:



18) حدّد كلًّا من المجال والمدى للدالة: $y = [\![x]\!] + 2$.

19) مثّل الدالة $f(x) = |2x|$ ، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق
درست تمثيل الدوال الخطية.

والآن
- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًّا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًّا .

المفردات
المتباينة الخطية
linear inequality
الحد
boundary

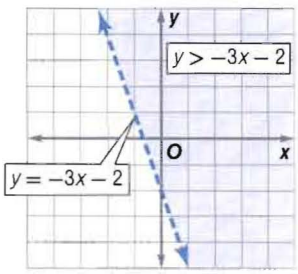
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالًا فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير الطبيعي؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

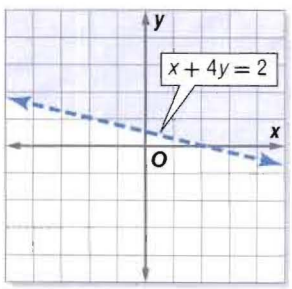
تمثيل المتباينات الخطية بيانيًّا: تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على شكل منطقة مظلّلة، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** المنطقة الممثلة للحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

مثال 1 الحد المتقطع

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًّا.



الخطوة 1 مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعًا.

الخطوة 2 اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على حد المتباينة .

$x + 4y > 2$	المتباينة الأصلية
$0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 0)$
$0 > 2$	✗ خطأ

ظلّل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$.

تأكد يبين التمثيل البياني أن النقطة $(0, 3)$ تقع في منطقة الحل.

$x + 4y > 2$	المتباينة الأصلية
$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 3)$
✓ $12 > 2$	صحيح

إذن، الحل صحيح.

تحقق من فهمك

1A) مثّل المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$ بيانيًّا.

1B) مثّل المتباينة $-x + 2y > 4$ بيانيًّا.

الربط مع الحياة

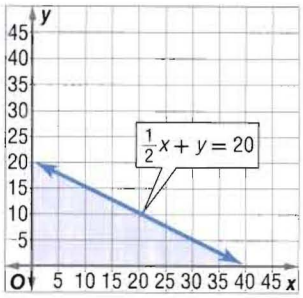
تزوّد معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمي مهارتي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

مثال 2 من واقع الحياة — الحد المتصل

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية: الأول دروس مدتها 30 دقيقة للدرس الواحد، والثاني دروس مدتها 60 دقيقة للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 ساعة أسبوعيًا.

a) اكتب متباينة تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية أسبوعيًا، ثم مثّلها بيانيًا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و y عدد الدروس التي مدتها 60 دقيقة. وبما أن مجموع الدروس يمكن أن يساوي 20. فإن المتباينة تحتوي على الرمز $\leq$، ولذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.



الخطوة 1 مثّل الحد $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًا.

الخطوة 2 اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على الحد.

المتباينة الأصلية: $\frac{1}{2}x + y \leq 20$

$(x, y) = (0, 0)$: $\frac{1}{2}(0) + (0) \stackrel{?}{\leq} 20$

✓ صحيح: $0 \leq 20$

ظلّل المنطقة التي تحوي $(0, 0)$.

b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 دقيقة خلال أسبوعٍ ما؟ فسر إجابتك.

النقطة $(25, 15)$ تقع خارج المنطقة المظلّلة، لذا، فهي لا تحقق المتباينة، وعليه، فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوعٍ ما .

تحقق من فهمك

2) مع صالح 60 ريالًا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًا .

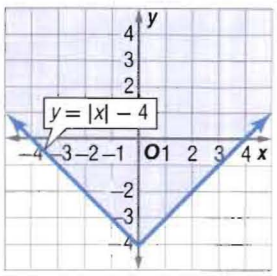
تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًا: تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، أولًا مثّل بيانيًا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

مثال 3 — تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًا.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $\geq$، فإن الحد يكون متصلًا.

مثّل المعادلة المرتبطة، ثم اختبر النقطة $(0, 0)$.



المتباينة الأصلية: $y \geq |x| - 4$

$(x, y) = (0, 0)$: $0 \stackrel{?}{\geq} |0| - 4$

✓ صحيح: $0 \geq -4$

ظلّل المنطقة التي تحتوي النقطة $(0, 0)$.

تحقق من فهمك

3A) مثّل المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ بيانيًا.

3B) مثّل المتباينة $y \geq 3|x + 1|$ بيانيًا.

تأكـــد

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 4$

2) $x \geq -6$

3) $x + 4y \leq 2$

4) $3x + y > -8$

مثال 2 **5)** مع عامر 76 ريالًا ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 0.45 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 13 ريالًا.

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف، حيث q عدد لترات الوقود، g عدد عبوات زيت المحرك، التي يمكنه شراؤها.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 لترًا من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك؟ فسر إجابتك.

مثال 3 مثّل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا.

6) $y \geq |x + 3|$

7) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

8) $x + 2y > 6$

9) $y \geq -3x - 2$

10) $2y + 3 \leq 11$

11) $4x - 3y > 12$

12) $6x + 4y \leq -24$

13) $y \geq \frac{3}{4}x + 6$

مثال 2 **14)** **درجات،** تحتسب درجات الطلاب في مادة الرياضيات على أساس 60 درجة للاختبار النهائي، 40 درجة للاختبارات الشهرية. ويتعين على هند الحصول على الدرجة 90 على الأقل لتنال تقدير ممتاز في المادة.

a) المتباينة $x + y \geq 90$ تمثّل هذا الموقف، حيث x هي درجة هند في الاختبار النهائي، و y هي درجتها في الاختبارات الشهرية. مثّل هذه المتباينة بيانيًّا.

b) اعتمادًا على التمثيل البياني، إذا كانت درجتها في الاختبار النهائي 50، وفي الاختبارات الشهرية 35، فهل ستحصل على التقدير ممتاز أم لا؟

مثال 3 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

15) $y > |3x|$

16) $y + 4 \leq |x - 2|$

17) $y - 6 < |-2x|$

18) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$

19) $2y > |4x - 5|$

20) $-y \leq |3x - 4|$

21) يؤدي سعيد عملين ليحقق دخلًا أسبوعيًّا لا يقل عن 1000 ريال فإذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضحًا في الجدول المجاور.

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري	20 ريالاً
سائق أجرة	15 ريالاً

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل سيحصل سعيد على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 ساعة أسبوعيًّا في كل عمل؟

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

22) $y \geq |-2x - 6|$ **23)** $y \leq |x - 3| + 4$ **24)** $y - 3 > -2|x + 4|$

25) $|y| > |x|$ **26)** $|x - y| > 5$ **27)** $|x + 3y| \geq -2$

الربط مع الحياة

يصنع الخرز من طين الفيمو اللين، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

28) **زينة:** تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

29) مع سعاد 200 ريالٍ. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق d . وعددًا من الأكواب c ؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية فإذا كان سعر الطبق 15 ريالًا وسعر الكأس 5 ريالات،

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس .

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) أعطِ ثلاثة حلول للمتباينة.

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا.

30) $y \geq [\![x]\!]$ **31)** $y < [\![x + 2]\!]$ **32)** $y \geq |[\![x]\!]|$

مسائل مهارات التفكير العليا

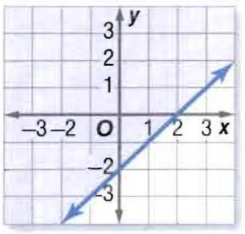
33) **مسألة مفتوحة:** استعمل القيمة المطلقة لتكوين متباينة على أن لا يقع حلها في الربعين الثاني أو الثالث.

34) **تحدٍ:** مثّل المتباينة الآتية بيانيًّا:

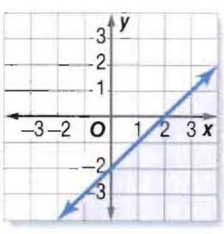
$$g(x) > \begin{cases} |x + 1| , & x \leq -4 \\ -|x| , & -4 < x < 2 \\ |x - 4| , & x \geq 2 \end{cases}$$

35) **اكتشف الخطأ:** مثّل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانيًّا، فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.

زيد



مصعب



36) **تبرير:** متى يكون من الممكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟ فسر إجابتك.

37) **اكتب:** اذكر حالة لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسر إجابتك.

تدريب على اختبار

38) أي مجموعة مما يأتي غير منتهية؟

A $\{2, 4, 6\}$

B مجموعة الأعداد الصحيحة بين -50 و 50

C مجموعة الأعداد الصحيحة

D $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$

39) أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$؟

A $f(x) = -x$ **C** $f(x) = |x|$

B $f(x) = [\![x]\!]$ **D** $f(x) = -|x|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-1)

40) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$

41) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$

42) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x + 1, & 0 < x \leq 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases}$

إذا كان $f(x) = -7x + 8, g(x) = -3x^2 + 2, h(x) = 4x^2 - 10x$ فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

43) $f(-9)$

44) $g(-4)$

45) $h(12)$

1-5

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا
Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

فيما سبق:
درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا.

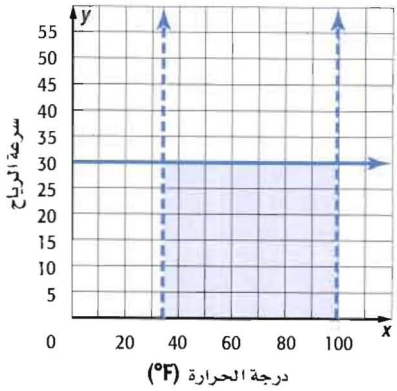
والآن:
- أحل نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.

المفردات:
منطقة الحل
feasible region
نظام المتباينات الخطية
system of linear inequalities

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



نظام المتباينات الخطية: حل **نظام المتباينات الخطية** يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

مفهوم أساسي
حل أنظمة المتباينات الخطية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًّا، وظلّل منطقة الحل.

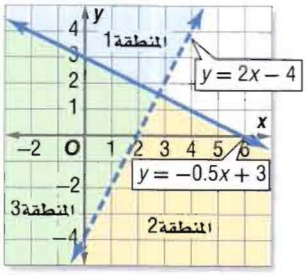
الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل **منطقة حل** النظام.

مثال 1
مناطق الحل المتقاطعة

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

$y > 2x - 4$

$y \leq -0.5x + 3$



حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتين: 1 , 3

حلُّ المتباينة $y \leq -0.5x + 3$ ← المنطقتين: 3 , 2

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين ، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق:

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y > 2x - 4$

$0 \stackrel{?}{>} 2(0) - 4$

$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$

$0 > -4$ ✓

$y \leq -0.5x + 3$

$0 \stackrel{?}{\leq} -0.5(0) + 3$

$0 \stackrel{?}{\leq} 0 + 3$

$0 \leq 3$ ✓

تحقق من فهمك

(1A) $y \leq -2x + 5$ ، $y > -\frac{1}{4}x - 6$

(1B) $y \geq |x|$ ، $y < \frac{4}{3}x + 5$

يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

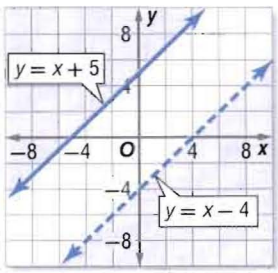
هي المجموعة التي لا تحتوي عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين Ø أو { }.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$



مثل المتباينتين بيانيًّا، وبما أن منطقتي الحل لا تتقاطعان فإنه لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

تحقق من فهمك

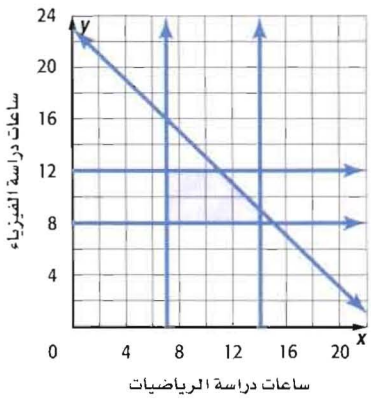
2A $y \geq -4x + 8$

$y < -4x + 4$

2B $y \geq |x|$

$y < 2x - 24$

مثال 3 من واقع الحياة



إدارة الوقت: **لدى فاطمة 25 ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، فوضعت جدولًا زمنياً استعدادًا لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من 7 إلى 14 ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 إلى 12 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ومثله بيانيًّا.**

الرياضيات: عدد ساعات الدراسة لا تقل عن 7 ساعات ولا تزيد على 14 ساعة. $7 \leq x \leq 14$

الفيزياء: عدد ساعات الدراسة لا تقل عن 8 ساعات ولا تزيد على 12 ساعة. $8 \leq y \leq 12$

إجمالي وقت الدراسة هو 25 ساعة ، ساعتان منها لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى 23 ساعة على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء. $x + y \leq 23$

مثّل المتباينات بيانيًّا. أي زوج مرتب في منطقة حل النظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10 ساعات لدراسة الفيزياء، و 12 ساعة لدراسة الرياضيات.

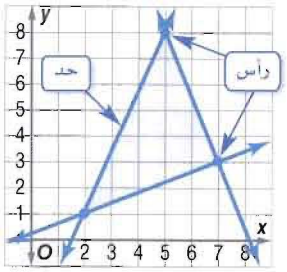
تحقق من فهمك

3) سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برًّا فتناوبا قيادة السيارة. فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات، ولا تزيد على 8 ساعات، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على 5 ساعات، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميًّا لا يزيد على 10 ساعات، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثّله بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز > أو <، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثّل الحد بخط متقطع.

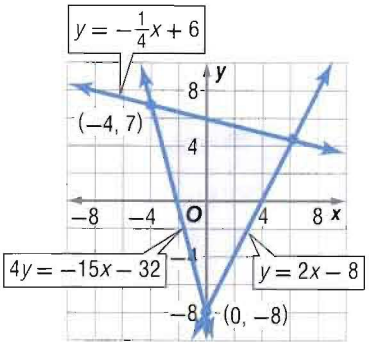


إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحيانًا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للمنطقة (الحدود).

مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحل

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \geq 2x - 8, y \leq -\frac{1}{4}x + 6, 4y \geq -15x - 32$.



الخطوة 1 مثّل كل متباينة بيانيًّا. وبالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن إيجاد إحداثيات رأسين من رؤوس المثلث وهما الزوجين المرتبين $(-8, 0)$, $(7, -4)$. ولإيجاد إحداثيي الرأس الثالث نحل نظام المعادلات الخطية:

$y = 2x - 8$, $y = -\frac{1}{4}x + 6$.

الخطوة 2 عوض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$ بالتعويض عن y بـ $2x - 8$

$2x = -\frac{1}{4}x + 14$ بجمع 8 لكلا الطرفين

$\frac{9}{4}x = 14$ بجمع $\frac{1}{4}x$ لكلا الطرفين

$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ بقسمة كلا الطرفين على العدد $\frac{9}{4}$

الخطوة 3 جد قيمة y.

$y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$ بالتعويض عن x بالعدد $6\frac{2}{9}$

$= 12\frac{4}{9} - 8$ خاصية التوزيع

$= 4\frac{4}{9}$ بالتبسيط

تحقق: قارن بين الإحداثيين اللذين وجدتهما، وبين إحداثيي الرأس الثالث في التمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 7 , 6، لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 5 , 4 ، ولذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضًا.

إحداثيات رؤوس المثلث هي: $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right), (0, -8), (-4, 7)$.

تحقق من فهمك

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(4A)
$y \geq -3x - 6$
$2y \geq x - 16$
$11y + 7x \leq 12$

(4B)
$5y \leq 2x + 9$
$y \leq -x + 6$
$9y \geq -2x + 5$

تأكد

المثالان 2 , 1 حل كل نظام فيما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 6$
$y > -3 + x$

2) $y \leq -3x + 4$
$y \geq 2x - 1$

3) $y > -2x + 4$
$y \leq -3x - 3$

مثال 3 **4) مشتريات:** خصصت ليلى مبلغًا لايتجاوز 350 ريالًا لشراء نوعين من الأقلام، يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام وثمنها 35 ريالًا، و يباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام وثمنها 25 ريالًا. فإذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين.

a) مثّل بيانيًّا نظام المتباينات الذي يبين عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

b) أعط 3 خيارات ممكنة لعدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

مثال 4 جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

5) $y \geq 2x + 1$
$y \leq 8$
$4x + 3y \geq 8$

6) $y \geq -2x - 4$
$6y \leq x + 28$
$y \geq 13x - 34$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

7) $x < 3$
$y \geq -4$

8) $y > 3x - 5$
$y \leq 4$

9) $y < -3x + 4$
$3y + x > -6$

10) $y \geq 0$
$y < x$

11) $6x - 2y \geq 12$
$3x + 4y > 12$

12) $-8x > -2y - 1$
$-4y \geq 2x - 5$

13) $5y < 2x + 10$
$y - 4x > 8$

14) $3y - 2x \leq -24$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

15) $y > -\frac{2}{5}x + 2$
$5y \leq -2x - 15$

مثال 3 **16) عمل جزئي:** يعمل سعيد عملين جزئيين ويتقاضى على كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 9 ريالات عن كل ساعة في العمل الأول، و 12 ريالًا عن كل ساعة في العمل الثاني، فإذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 ساعة في كلا العملين أسبوعيًّا، فمثّل بيانيًّا نظامًا من متباينتين يبين عدد الساعات التي يعملها في كل من العملين؛ ليجمع مبلغًا لايقل عن 925 ريالًا في 8 أسابيع.

مثال 4 جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

17) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 2y < 4$

18) $y \geq 3x - 7$
$y \leq 8$
$x + y > 1$

19) $x \leq 4$
$y > -3x + 12$
$y \leq 9$

20) $-3x + 4y \leq 15$
$2y + 5x > -12$
$10y + 60 \geq 27x$

21) $8y - 19x < 74$
$38y + 26x \leq 119$
$54y - 12x \geq -198$

22) $6y - 24x \geq -168$
$8y + 7x > 10$
$20y - 2x \leq 64$

23) **اتصالات:** يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 دقيقة، بشرط أن لا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلًا، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلًا عن 200 دقيقة. اكتب نظام متباينات يمثل الموقف.

24) **أشجار:** تصنف الأشجار في المناطق الحرجية تبعًا للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويبين الجدول الآتي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى المناطق الحرجية:

المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة السيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56–72	40–55	أقل من 39
محيط الساق (in)	أكثر من 60	48–60	34–48	أقل من 33

a. اكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلًّا من: الارتفاع h ومحيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة ومثّله بيانيًّا.

b. ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48ft؟ ثم أوجد محيط ساقها المتوقع.

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

25) $y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

26) $y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

27) $|y| \geq x$
$y < 2x$

28) $y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

29) $6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

30) $|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

31) $2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

32) $8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

33) $y \geq |x - 2| + 4$
$y \leq [\![x]\!] - 3$

34) **إدارة الوقت:** يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن. فإذا كان مجمل وقت فراغه لايتجاوز 20 ساعة أسبوعيًّا، ويقضي من 4 إلى 10 ساعات منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

35) $y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$
$y \geq -3x + 2$

36) $y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$
$y \leq 4x + 22$

37) $2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

38) يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعبًا ليشكل فريقًا على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث أكثر من لاعبي الصف الثاني.

a) اكتب نظام متباينات يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

b) اكتب جميع الاحتمالات الممكنة لعدد اللاعبين من كلا الصفين.

الربط مع الحياة

حث الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، فقال صلى الله عليه وسلم: " لا تزول قدما عبد حتى يُسأل عن أربع: عن عمره فيما أفناه، وعن شبابه فيما أبلاه، وعن ماله من أين اكتسبه؟ وفيم أنفقه؟ وعن علمه ماذا عمل به؟ ".

39) إدارة الأموال: يستثمر علي 10000 ريال في مشروعين تجاريين. فإذا كان المشروع الأول يدرّ ربحًا سنويًّا نسبته 6% ، أما المشروع الثاني فيدر ربحًا سنويًّا نسبته 10%، فما أقل مبلغ يمكن لعلي استثماره في المشروع الثاني على أن لا يقل ربحه في المشروعين بعد سنة واحدة عن 740 ريالًا؟

مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحل:

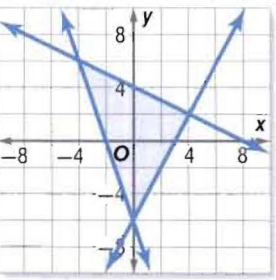
a. في الربع الثالث فقط.

b. غير موجود.

c. واقعًا على مستقيم.

d. نقطة واحدة فقط.

41) تحدٍّ: تمثل المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي المجاور حلًّا لنظام من المتباينات. اكتب هذا النظام.



42) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة أم غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فأعط مثالاً مضادًّا.

"النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول."

43) اكتب: وضح بخطوات مكتوبة طريقة تحديد منطقة التظليل عند حل نظام متباينات خطية بيانيًّا.

تدريب على اختبار

44) يبين الجدول المجاور العلاقة بين x و y. فأي المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟

A $y = 3x - 2$

B $y = 3x + 2$

C $y = 4x + 1$

D $y = 4x - 1$

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

45) إجابة قصيرة: إذا كانت $3x = 2y$, $5y = 6z$، فما قيمة x بدلالة z؟

مراجعة تراكمية

مثِّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-1)

46) $x + y \le 6$ **47)** $4x - 3y < 10$ **48)** $5x + 7y \ge -20$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 3-1)

49) $f(x) = |x - 3|$ **50)** $h(x) = [\![x]\!] - 5$

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = 2x + 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

51) $g(-2)$ **52)** $f(-0.25)$ **53)** $g(-0.75)$

1-5 أنظمة المتباينات الخطية

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية لحل أنظمة متباينات خطية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل أنظمة متباينات خطية بيانيًا.

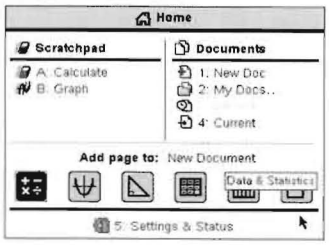
مثال حل نظام من متباينتين خطيتين

استعمل الحاسبة البيانية لحل النظام المكون من المتباينتين الآتيتين:

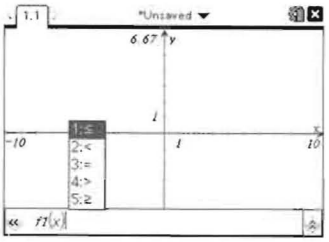
$y \geq -3x + 4$

$y \leq 2x - 1$

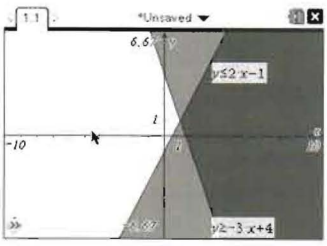
الخطوات:



- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1: New Doc (مستعملًا الأسهم).
- من الشاشة الظاهرة اختر 2:Add Graphs (مستعملًا) .
- اكتب المتباينة الأولى $y \geq -3x + 4$ ، وذلك بالضغط على مفتاح del، ثم اختر الإشارة ≥ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \geq$ ، ثم أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter.



- اكتب المتباينة الثانية $y \leq 2x - 1$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del، ثم اختر الإشارة ≤ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \leq$ ، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ، فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$ ، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطي التظليل وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \geq -3x + 4 , y \leq 2x - 1$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل نظام من متباينتين مما يأتي:

1) $y \geq 3$ ، $y \leq -x + 1$

2) $y \geq -4x$ ، $y \leq -5$

3) $y \geq 2 - x$ ، $y \leq x + 3$

4) $y \geq 2x + 1$ ، $y \leq -x - 1$

5) $2y \geq 3x - 1$ ، $3y \leq -x + 7$

6) $y + 5x \geq 12$ ، $y - 3 \leq 10$

7) $5y + 3x \geq 11$ ، $3y - x \leq -8$

8) $10y - 7x \geq -19$ ، $7y - 5x \leq 11$

9) $\frac{1}{6}y - x \geq -3$ ، $\frac{1}{5}y + x \leq 7$

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

فيما سبق:
درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا.

والآن:
- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:
القيود
constraints
البرمجة الخطية
linear programming
محدود
bounded
غير محدود
unbounded
الحل الأمثل
optimize

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	95 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن ؟

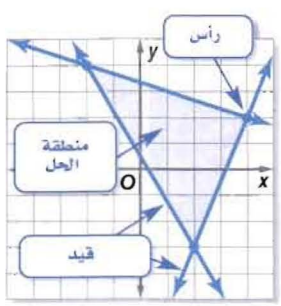
هناك **قيود** أو حدود على إنتاج المشغل ناجمة عن الطلب، والشحن وكفاءة المشغل، وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه الشركات في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه القضايا يمكن أن توجه عادة باستعمال البرمجة الخطية.

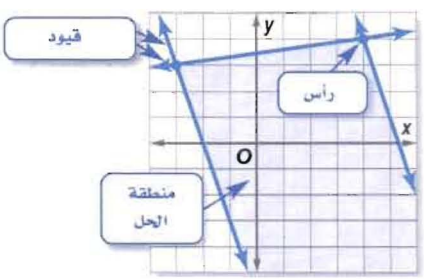
البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًا، وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

منطقة الحل



تكون منطقة الحل **محدودة** أو محصورة بقيود، وتظهر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة عادةً عند رؤوس منطقة الحل.



تكون منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة** ويمكن أن تحتوي قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

قراءة الرياضيات

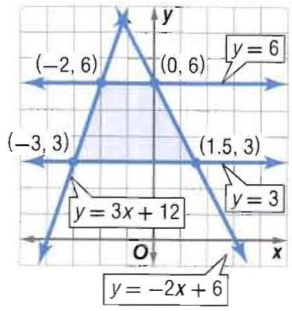
رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y. وتُقرأ "f لـ x و y".

مثال 1 منطقة الحل المحدودة

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20 وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

تحقق من فهمك

(1A)
$$-2 \le x \le 6$$
$$1 \le y \le 5$$
$$y \le x + 3$$
$$f(x, y) = -5x + 2y$$

(1B)
$$-6 \le y \le -2$$
$$y \le -x + 2$$
$$y \le 2x + 2$$
$$f(x, y) = 6x + 4y$$

تنبيه

القيمة العظمى

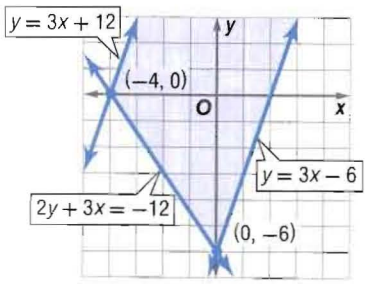
لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ غير مغلقة فإن النظام غير محدود.

مثال 2 منطقة الحل غير المحدودة

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$2y + 3x \ge -12,\ y \le 3x + 12,\ y \ge 3x - 6,\ f(x, y) = 9x - 6y$$



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة $(0, -6)$، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي $(0, 8)$ وتُعطى القيمة 48 للدالة وهي أقل من -36.

تحقق من فهمك

(2A)
$$y \le 8$$
$$y \ge -x + 4$$
$$y \le -x + 10$$
$$f(x, y) = -6x + 8y$$

(2B)
$$y \ge x - 9$$
$$y \le -4x + 16$$
$$y \ge -4x - 4$$
$$f(x, y) = 10x + 7y$$

إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **بالحل الأمثل**، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

مثال 3 من واقع الحياة

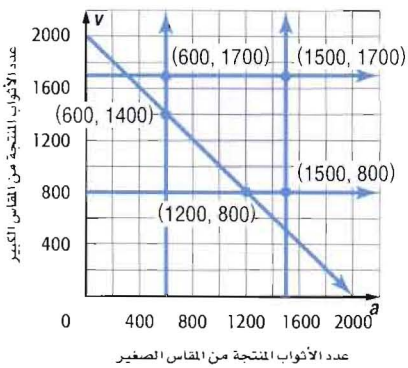
استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع من المقاسين التي يتطلب إنتاجها لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

الخطوة 1 افرض أن a هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير. v هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2

$$600 \le a \le 1500$$
$$800 \le v \le 1700$$
$$a + v \ge 2000$$



الخطوتان 3 و 4 مثّل نظام المتباينات بيانيًا كما في الشكل المجاور، ثم لاحظ رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي: $f(a, v) = 55a + 95v$.

الخطوة 6

(a, v)	$55a + 95v$	$f(a, v)$	
(600, 1700)	55(600) + 95(1700)	194500	
(600, 1400)	55(600) + 95(1400)	166000	
(1500, 1700)	55(1500) + 95(1700)	244000	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 95(800)	158500	
(1200, 800)	55(1200) + 95(800)	142000	← قيمة صغرى

الخطوة 7 يجب إنتاج 1200 ثوبًا من المقاس الصغير، و 800 ثوبًا من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

تحقق من فهمك

3) مجوهرات: يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغ في أحد الأشهر على الأقل 30 قطعة من العقود والأساور، فكم قطعة من كلا النوعين عليه صياغتها ليحصل على أكبر أجر؟

تأكد

المثالان 1 , 2 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

1)
$y \le 5$
$x \le 4$
$y \ge -x$
$f(x, y) = 5x - 2y$

2)
$y \le -3x + 6$
$-y \le x$
$y \le 3$
$f(x, y) = 8x + 4y$

3)
$y \ge -3x + 2$
$9x + 3y \le 24$
$y \ge -4$
$f(x, y) = 2x + 14y$

4)
$-2 \le y \le 6$
$3y \le 4x + 26$
$y \le -2x + 2$
$f(x, y) = -3x - 6y$

5)
$-3 \le y \le 7$
$4y \ge 4x - 8$
$6y + 3x \le 24$
$f(x, y) = -12x + 9y$

6)
$y \le 2x + 6$
$y \ge 2x - 8$
$y \ge -2x - 18$
$f(x, y) = 5x - 4y$

مثال 3

7) ثقافة مالية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 ساعة على الأكثر، ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لإنتاج الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5 ساعات	ساعتان
النوع الثاني	4 ساعات	ساعتان

a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدّد منطقة الحل.

c) حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالًا، ومن النوع الثاني 50 ريالًا، فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين.

e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن. وما هو هذا الربح؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

8)
$-8 \le y \le -2$
$y \le x$
$y \le -3x + 10$
$f(x, y) = 5x + 14y$

9)
$2 \ge x \ge -3$
$y \ge -2x - 6$
$4y \le 2x + 32$
$f(x, y) = -4x - 9y$

10)
$x + 4y \ge 2$
$2x + 4y \le 24$
$2 \le x \le 6$
$f(x, y) = 6x + 7y$

11)
$x \ge -6$
$y + x \le -1$
$2x + 3y \ge -9$
$f(x, y) = -10x - 12y$

12)
$x \ge -8$
$3x + 6y \le 36$
$2y + 12 \ge 3x$
$f(x, y) = 10x - 6y$

13)
$y \ge |x - 2|$
$y \le 8$
$8y + 5x \le 49$
$f(x, y) = -5x - 15y$

14) $y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

15) $-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

16) $y \ge |x + 1| - 2$
$0 \le y \le 6$
$-6 \le x \le 2$
$x + 3y \le 14$
$f(x, y) = 5x + 4y$

مثال 3

17) صناعة: ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالاً، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35 ريالاً. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يوميًّا، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة التي يتطلب إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

18) أعمال: يريد مدير مكتب سياحة وسفر طباعة كتيبات و نشرات دعائية. فإذا كان الكتيب يتكون من 3 صفحات، والنشرة من صفحتين، وكانت تكلفة طباعة الكتيب 8 ريالات، والنشرة 4 ريالات، وقرر مدير المكتب ألا يزيد عدد صفحات المطبوعات على 600 صفحة، وأن يطبع ما لا يقل عن 50 كتيبًا، و 150 نشرة، فما عدد الكتيبات والنشرات المطبوعة لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

19) طلاء: إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء ما يمكنه من 45 جدارًا وسقفًا متساوية المساحة لكلا النوعين في أحد المباني هو 20 يومًا، ويستطيع معاذ طلاء 2.5 جدار، أو سقفين في اليوم الواحد.

a. اكتب نظام متباينات خطية يمثّل هذا الموقف.

b. مثّل نظام المتباينات بيانيًّا ، وحدد منطقة الحل وإحداثيات رؤوسها.

c. إذا كان معاذ يتقاضى 26 ريالاً عن طلاء الجدار، و 30 ريالًا عن طلاء السقف، فاكتب دالة تمثل المبلغ الكلي الذي سيتقاضاه.

d. ما عدد الجدران والأسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ، وما هو هذا المبلغ؟

الربط مع الحياة

تدوير المواد تحمي الإنسان، وتقلل الاستهلاك، وترشد الطاقة، وتقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

20) شحن: يشحن مزارع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة، وذلك في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحـــدة منها 4200 kg، وحجم الحيز الذي توضع فيه البضائع بداخلها 480 ft^3، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها 3 ft^3 وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها 5 ft^3، وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 ريالات عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 ريالات عن كل صندوق من المقاس الكبير.

a) جد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟

21) إعادة التدوير: يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 طن من البلاستيك شهريًّا لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لايقل عن 450 طنًّا في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 175 ريالًا لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟

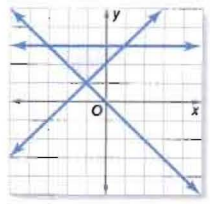
مسائل مهارات التفكير العليا

22) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحل محدودة وتقع في الربع الرابع فقط ومساحتها 20 وحدة مربعة.

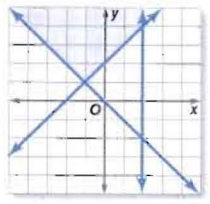
23) **تحد:** جد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات : $y \geq |x| - 3, y \leq -|x| + 3, x \geq |y|$.

24) حدد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضح إجابتك.

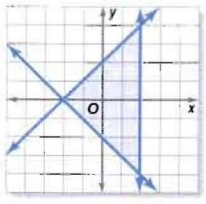
(a



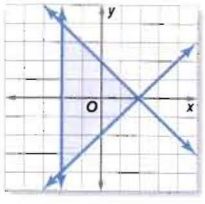
(b



(c



(d



25) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.

"المنطقة غير المحدودة لا يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى في الوقت نفسه"

تدريب على اختبار

26) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالاً أجرة تبليط مساحة من الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تبليط المتر المربع من الأرضيات 12 ريالاً، وأجرة تبليط المتر المربع من الجدران 15 ريالاً وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات يقل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$، فأي أنظمة المعادلات الآتية تمثّل هذا الموقف؟

A $x + y = 1950$
$3x = y$

B $12x + 15y = 1950$
$x + 16 = 3y$

C $2x + 3y = 15$
$x + y = 12$

D $x - y = 1950$
$12x + 15y = 3$

27) **هندسة:** أي مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

مراجعة تراكمية

حل كل نظام من متباينتين مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 5-1)

28) $3x + 2y \geq 6$
$4x - y \geq 2$

29) $4x - 3y < 7$
$2y - x < -6$

30) $3y \leq 2x - 8$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

حدّد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد فيما يأتي: (الدرس 1-1)

31) -7

32) $-\frac{1}{3}$

33) $\sqrt[3]{27}$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

خصائص الأعداد الحقيقية (الدرس 1-1)

- تُقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية تحوي: مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكلية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N).

العلاقات والدوال (الدرس 2-1)

- الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

دوال خاصة (الدرس 3-1)

- الدالة متعددة التعريف: هي الدالة التي تكتب باستعمال أكثر من عبارة.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا (الدرس 4-1)

- يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 حدد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا.

الخطوة 2 اختر نقطة لا تقع على حد المتباينة واختبرها إن كانت تحقق المتباينة أم لا.

الخطوة 3 إذا كانت النقطة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحتوي النقطة. وإلّا فظلّل المنطقة الأخرى.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا (الدرس 5-1)

- يمكن إيجاد حل نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانيًا وإيجاد منطقة الحل.

البرمجة الخطية والحل الأمثل (الدرس 6-1)

- إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحددها نظام متباينات يمثل قيودًا على الدالة.
- إيجاد الحل الأمثل يعني إيجاد السعر أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

المطويات منظم أفكار

تأكد ان المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

الأعداد الحقيقية (10)
الأعداد النسبية (10)
الأعداد غير النسبية (10)
الأعداد الصحيحة (10)
الأعداد الكلية (10)
الأعداد الطبيعية (10)
الدالة المتباينة (16)
العلاقة المنفصلة (17)
العلاقة المتصلة (17)
اختبار الخط الرأسي (17)
المتغير المستقل (19)
المتغير التابع (19)
رمز الدالة (19)
الدالة المتعددة التعريف (23)
الدالة المتعددة التعريف
الخطية (24)
الدالة الدرجية (24)
دالة أكبر عدد صحيح (24)
دالة القيمة المطلقة (25)
المتباينة الخطية (30)
الحد (30)
نظام المتباينات الخطية (35)
منطقة الحل (35)
القيود (42)
البرمجة الخطية (42)
المحدود (42)
غير المحدود (42)
الحل الأمثل (44)

اختبار المفردات

حدد إذا كانت كل من العبارتين صحيحة أم خاطئة ؟

1) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية.

2) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية والدورية.

اختر المصطلح المناسب لإكمال كل جملة فيما يأتي:

3) تكون الدالة (منفصلة، متباينة) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطًا بعنصر واحد فقط في المدى، على أن لا يكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها.

4) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة الإحداثيات السينية للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

5) الدالة (الثابتة، المحايدة) هي الدالة الخطية $f(x) = x$.

6) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، متعددة التعريف).

أكمل كل جملة فيما يأتي بالمصطلح المناسب:

7) _____ هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظام من المتباينات.

8) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية.

9) تُسمى منطقة الحل المفتوحة _____.

مراجعة الدروس

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية (الصفحات: 15-10)

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي :

10) $1.\overline{3}$ **11)** $\sqrt{4}$ **12)** $-\frac{3}{4}$

بسّط كل عبارة مما يأتي :

13) $4x - 3y + 7x + 5y$

14) $2(a + 3) - 4a + 8b$

15) $4(2m + 5n) - 3(m - 7n)$

16) مال: اشترى سعد 3 شطائر بسعر 3.5 ريالات للشطيرة الواحدة، و 3 علب عصير بسعر 2.5 ريال للعلبة الواحدة.

a) استعمل خاصية التوزيع لتكتب تعبيرين يمثّل كل منهما المبلغ الذي دفعه سعد.

b) أوجد المبلغ الذي دفعه سعد باستعمال خاصية التوزيع.

مثال 1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$.

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال 2

بسّط التعبير : $-4(a + 3b) + 5b$

$-4(a + 3b) + 5b$	العبارة الأصلية
$= -4(a) + -4(3b) + 5b$	خاصية التوزيع
$= -4a - 12b + 5b$	بالضرب.
$= -4a - 7b$	بالتبسيط.

1-2 العلاقات والدوال (الصفحات: 21-16)

حدد مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟

17) $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

18) $\{(-3, 0), (0, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$

19) $\{(-4, 1), (3, 3), (1, 1), (-2, 5), (3, -4)\}$

20) $\{(7, -4), (5, -2), (3, 0), (1, 2), (-1, 4)\}$

إذا كانت $f(x) = -3x + 2$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

21) $f(4)$ **22)** $f(-3)$

23) $f(0)$ **24)** $f(y)$

25) $f(-a)$ **26)** $f(2w)$

27) مناسبات: تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 25 ريالًا عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 ريالات أجرة يومية عن كل كرسي. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند استئجار x كرسي بالمعادلة: $y = 25 + 4x$. أوجد مجال هذه المعادلة ومداها، ثم حدد إذا كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟

مثال 3

حدد مجال العلاقة

$\{(-4, 3), (-1, 0), (-2, 4), (3, -1), (2, 6)\}$ ومداها. ثم حدد إن كانت تمثّل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟

المجال: $\{-4, -1, -2, 3, 2\}$

المدى: $\{3, 0, 4, -1, 6\}$

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، مما يعني أن العلاقة تمثل دالة. العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذًا الدالة متباينة.

مثال 4

إذا كانت $f(x) = 4x - 3$، فأوجد $f(-2)$.

$f(-2) = 4(-2) - 3$	عوض عن x بـ -2 .
$= -8 - 3$	بالضرب .
$= -11$	بالتبسيط .

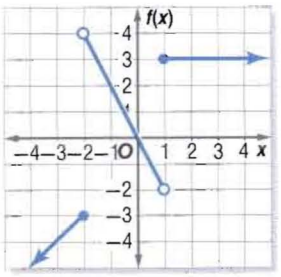
1-3 دوال خاصة (الصفحات: 28-23)

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها:

(28
$$f(x) = \begin{cases} -2x\,, x \le -1 \\ x+1\,, -1 < x < 3 \\ x\,, x \ge 3 \end{cases}$$

(29
$$f(x) = \begin{cases} -3\,, x < -1 \\ 4x-3\,, -1 \le x \le 3 \\ x\,, x > 3 \end{cases}$$

30) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



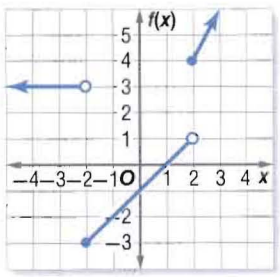
مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها:

(31 $f(x) = [\![x]\!] + 2$

(32 $f(x) = [\![x+3]\!]$

مثال 5

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



دالة الجزء الأيسر من التمثيل البياني هي $f(x) = 3$. الدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(-2, 3)$، تعني أن الدالة الخطية معرّفة عندما $x < -2$.

دالة الجزء الأوسط من التمثيل البياني هي $f(x) = x - 1$. وتعني كل من الدائرة المظلّلة عند النقطة $(-2, -3)$ والدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(2, 1)$، أن الدالة معرّفة عندما $-2 \le x < 2$.

دالة الجزء الأيمن من التمثيل البياني هي $f(x) = 2x$. والدائرة المظلّلة عند النقطة $(2, 4)$، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x \ge 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, x < -2 \\ x-1\,, -2 \le x < 2 \\ 2x\,, x \ge 2 \end{cases}$$

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا (الصفحات: 30-34)

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًا:

33) $x - 3y < 6$

34) $y \geq 2x + 1$

35) $2x + 4y \leq 12$

36) $y > -3x - 5$

37) $y > |2x|$

38) $y \geq |2x - 2|$

39) $y + 3 < |x + 1|$

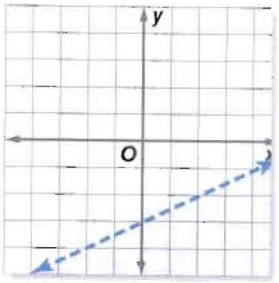
40) $2y \leq |x - 3|$

41) شراء: وفّر بندر 46 ريالًا لشراء مجموعة من الدفاتر، والأقراص المدمجة، فإذا كان سعر الدفتر الواحد 4 ريالات، وسعر القرص المدمج 3 ريالات، اكتب متباينة تمثّل عدد الدفاتر والأقراص المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثّلها بيانيًا.

مثال 6

مثّل المتباينة $x - 2y > 6$ بيانيًا.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعًا، مثّل بيانيًا المعادلة المرافقة $x - 2y = 6$.



اختبر النقطة $(0, 0)$ ، $x - 2y > 6$.

$x - 2y > 6$

$0 - 2(0) \stackrel{?}{>} 6$

$0 > 6$ ✗

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا (الصفحات: 35-40)

حل كل نظام مما يأتي بيانيًا :

42) $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

43) $|y| > 2$
$x > 3$

44) $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

45) $y > x + 1$
$x < -2$

46) مجوهرات: أمضى صائغ مجوهرات ما لا يزيد على 3 ساعات في صياغة الخواتم. فإذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 دقيقة، والزمن الذي تتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 دقيقة، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف ومثّله بيانيًا.

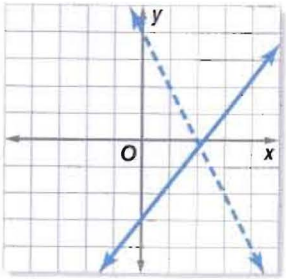
مثال 7

حل نظام المتباينات الآتي بيانيًا:

$$y \geq \frac{3}{2}x - 3$$

$$y < 4 - 2x$$

منطقة الحل هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه.



1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل (الصفحات: 47-42)

47) تنسيق أزهار: يعمل جميل منسقًا للأزهار، ويقوم بتنسيق نوعين من باقات الأزهار. يحتاج النوع الأول منها إلى 18 دقيقة، والنوع الثاني إلى 10 دقائق. ولا يقل عدد الباقات التي ينتجها أسبوعيًّا من النوع الثاني عن ضعفي عدد باقات النوع الأول. فإذا كان جميل يعمل مدة 40 ساعة أسبوعيًّا وكان ربحه في تنسيق الباقة من النوع الأول 10 ريالات، ومن النوع الثاني 25 ريالًا. فحدد عدد الباقات التي يجب عليه تنسيقها من كل نوع أسبوعيًّا ليحصل على أكبر ربح.

48) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين، ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى ساعتين في المرحلة الأولى وساعة واحدة في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 20 ريالًا. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى ساعة واحدة في المرحلة الأولى و 3 ساعات في المرحلة الثانية ويحقق ربحًا قدره 15ريالًا. فإذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 ساعة ولا يزيد على 60 ساعة لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يوميًّا؟ وما عدد الأحذية من كل نوع الذي يحقق هذا الربح؟

مثال 8

يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها $5184\ m^2$، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة $6\ m^2$، ومن النوع (B) إلى $24\ m^2$، وذلك لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر الشتلة الواحدة من النوع (A) 8 ريالات، وسعر الشتلة الواحدة من النوع (B) 12 ريالًا. فما عدد الشتلات من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟

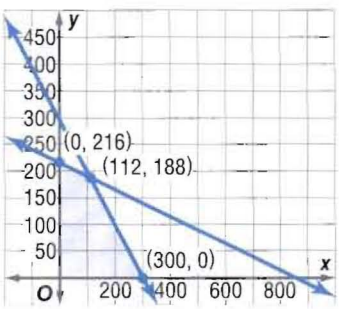
افرض أن a هي عدد الشتلات من النوع (A)، و b هي عدد الشتلات من النوع (B).

$$a \geq 0, b \geq 0$$
$$6a + 24b \leq 5184$$
$$a + b \leq 300$$

مثّل المتباينات بيانيًّا، ولاحظ أن النقاط (0, 0), (300, 0), (0, 216), (112, 188) تمثل رؤوس منطقة الحل .

دالة التكلفة هي : $f(a, b) = 8a + 12b$.

القيمة 3152ريالًا هي القيمة العظمى للتكلفة وتحصل عند النقطة (112, 188). ولذلك إذا زرع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B) فإن التكلفة تكون أعلى ما يمكن.



اختبار الفصل

1) إذا كان $x = 3, y = -1$ فأوجد قيمة $x + y^2(2+x)$.

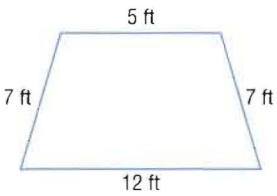
2) بسّط العبارة: $-4(3a + b) - 2(a - 5b)$.

3) **اختيار من متعدد:** إذا كان $3m + 5 = 23$، فما قيمة $2m - 3$؟

A 105 C 9

B $\frac{47}{3}$ D 6

4) **بستنة:** يريد عبد الله تصميم 3 أحواض للورود في حديقة منزله، فأحاط كلًّا منها بسياج. فإذا كانت الأحواض الثلاثة متطابقة ولها الشكل أدناه، فكم قدمًا طول السياج الذي يحتاج إليه؟



5) إذا كان $x = \frac{2}{3}, y = -2$ فأوجد قيمة $\frac{3(x+y)}{4xy^2}$.

6) حدد مجال العلاقة المبينة في الجدول الآتي ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟

x	y
−2	3
4	−1
3	2
6	3

إذا كانت $f(x) = -2x + 3$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

7) $f(-4)$ **8)** $f(3y)$

9. **اختيار من متعدد:** إذا كانت تكلفة إنتاج x فطيرة جبن في أحد المخابز يُعبر عنها بالدالة $C(x) = 6 + 0.75x$، فأوجد تكلفة إنتاج 20 فطيرة.

A 13.5 ريالًا C 21.0 ريالًا

B 28.61 ريالًا D 38.4 ريالًا

10) مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

11) $y \ge 4x - 1$ **12)** $2x + 6y < -12$

حلّ كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

13) $x + y \le 4$, $y \ge x$

14) $2x + 3y > 12$, $3x - y < 21$

15) $x - y > 0$, $4 + y \le 2x$

16) $2y - 5x \le 6$, $4x + y < -4$

17) **اختيار من متعدد:** استأجر خالد سيارة ليوم واحد من إحدى الشركات، فدفع 100 ريال رسم تأجير وريالًا واحدًا عن كل كيلومتر تقطعه السيارة، أما سعيد فاستأجر سيارة من شركة أخرى، ليوم واحد أيضًا فدفع 50 ريالًا رسم تأجير وريالين عن كل كيلومتر تقطعه السيارة. فما عدد الكيلومترات التي تجعل قيمة الاستئجار من الشركتين متساوية؟

A 92 C 104

B 50 D 75

18) **نجارة:** يصنع مشغل نجارة طاولات ومقاعد ثم يقوم بطلائها. ويبين الجدول الآتي الزمن الذي تتطلبه صناعة وطلاء كل من الطاولة والمقعد:

المنتج	زمن الصناعة بالساعات	زمن الطلاء بالساعات
مقعد	3	0.5
طاولة	2	1

إذا كان مجموع ساعات عمل فنيي صناعة المنتجات 108 ساعات يوميًّا، ومجموع ساعات عمل فنيي دهان المنتجات 20 ساعة يوميًّا، وكان ربح المشغل من الطاولة الواحدة 35 ريالًا، ومن المقعد الواحد 25 ريالًا فكم طاولة ومقعدًا يجب صنعهما يوميًّا ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

a) بفرض أن عدد الطاولات t، وعدد الكراسي c، اكتب نظام متباينات يمثل الموقف.

b) مثّل منطقة الحل بيانيًّا.

c) جد عدد الطاولات وعدد المقاعد التي يجب صنعها ليكون الربح أكبر ما يمكن. وما أكبر ربح؟

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم جد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

19) $-3 \le y \le 5$, $4x + y \le 5$, $-2x + y \le 5$

$f(x, y) = 4x - 3y$

اختبار تراكمي
للفصل 1

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $m = -3, n = 2$، فأوجد قيمة $\frac{m^2 + 2mn}{n^2 - 1}$.

A -7 C -6

B -1 D 4

إرشادات للاختبار

السؤال 1: عوض عن m بـ -3، وعن n بـ 2 في العبارة، ثم استعمل ترتيب العمليات.

2) يمكن حساب حجم المخروط الدائري القائم الذي ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r بضرب ثلث π في الارتفاع في مربع نصف قطر القاعدة. فأي المعادلات الآتية تمثل حجم المخروط المجاور؟

A $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ C $V = \frac{1}{3}\pi r h$

B $V = 3\pi r^2 h$ D $V = \frac{1}{3}\pi r h^2$

3) أي مجموعات الأعداد الآتية لا ينتمي إليها العدد -25؟

A الأعداد الصحيحة

B الأعداد النسبية

C الأعداد الحقيقية

D الأعداد الكلية

4) مجال العلاقة الموضحة في الجدول الآتي هو:

x	y
-3	4
1	-1
2	0
6	-3

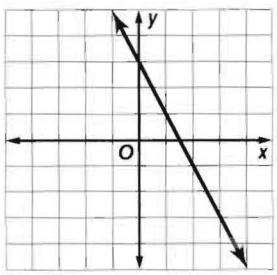
A $\{0, 1, 2, 4, 6\}$

B $\{-3, -1, 0, 4\}$

C $\{-3, 1, 2, 6\}$

D $\{-3, -1\}$

5) ميل المستقيم الممثل بيانيًّا على المستوى الإحداثي الآتي هو:



A -2 C $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$ D 2

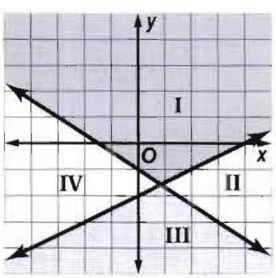
إرشادات للاختبار

السؤال 5: بما أن التمثيل البياني ينحدر من اليسار إلى اليمين فإن الميل سالب، لذا استبعد البديلين B وَ D .

6) على الشكل أدناه منطقة حل النظام:

$y \le \frac{1}{2}x - 2$

$y \le -\frac{2}{3}x - 1$



A المنطقة I

B المنطقة II

C المنطقة III

D المنطقة IV

7) النقطة التي لا تمثل رأسًا لمنطقة حل النظام:

$x \ge 0, y \ge 0, y \le -2x + 6$ هي:

A $(0, 0)$ C $(0, 6)$

B $(0, 3)$ D $(3, 0)$

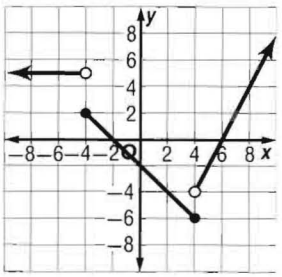
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) بسّط العبارة أدناه:

$$-4(3a - b) + 3(-2a + 5b)$$

9) اكتب معادلة الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



10) جد قيمة الدالة المتعددة التعريف في التمرين (9) عند $x = -3$.

أسئلة ذات إجابات طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحلّ:

11) قام خالد بحساب قيمة العبارة: $\frac{-5m - 3n}{-2p + r}$ عندما $m = 1, n = -4, p = -3, r = -2$، فكانت خطوات حله على النحو الآتي :

$$\frac{-5m - 3n}{-2p + r} = \frac{-5(1) - 3(-4)}{-2(-3) + (-2)}$$

$$= \frac{-5 - 12}{6 - 2} = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$$

a) ما الخطأ الذي وقع فيه خالد؟

b) ما الإجابة الصحيحة؟

12) قدّر مدير مخبز الربح لكل قطعة كعك يبيعها بـ 0.45 ريال، ولكل فطيرة 0.5 ريال.

a) يأمل مدير المخبز أن يحصل على ربح قدره 150 ريالاً من بيع الكعك والفطائر يوميًّا. افترض أن x عدد قطع الكعك المبيعة، و y عدد الفطائر المبيعة، اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) إذا باع المخبز 180 قطعة كعك و 160 فطيرة في يوم ما، فهل سيحصل على الربح المطلوب؟ فسر إجابتك.

13) تُعد فاطمة نوعين من أطباق الحلوى؛ فيحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر، أما النوع الثاني فيحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. فإذا كان لديها 40 كوبًا من الدقيق، و 15 كوبًا من السكر، وتكلفة إعداد طبق النوع الأول 12 ريالًا، وطبق النوع الثاني 8 ريالات.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل عدد الأطباق التي يمكن لفاطمة إعدادها باستعمال الكميات المتوافرة.

b) مثّل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في (a) بيانيًّا، واكتب إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل.

c) اكتب دالة تمثل التكلفة .

d) ما عدد الأطباق من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟ وما التكلفة في هذه الحالة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	1-2	1-2	1-1	1-2	مهارة سابقة	1-5	1-6	1-1	1-3	1-3	مهارة سابقة	1-6	1-6

الفصل 2

المصفوفات
Matrices

فيما سبق:
درستُ حل نظام من المعادلات .

والآن:
- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات، وأحسب المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة.
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

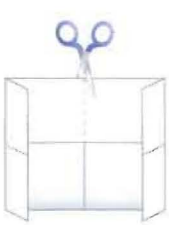
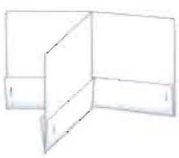
لماذا؟

تنظيم البيانات: غالبًا ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلًا إذا نُظِّم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

المطويات منظم أفكار

المصفوفات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك في الفصل 2 ، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1. **اثنِ** حافة الورقة بعرض 2cm بموازاة الضلعين القصيرين.
2. **اطوِ** الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قصّ كما في الشكل.
3. **أعد** الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملًا الدبّاسة.
4. **اكتب** على كلِّ جيب عنوانًا لدرس من دروس الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي:

1) 4
2) -15
3) 0.2
4) -1.35
5) $-\frac{3}{4}$
6) $2\frac{1}{3}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

7) $6(x+2y)$
8) $4(x+5)-3$
9) $-4(3x)-(7x-6)$
10) $5(2x-5)-\frac{1}{3}(4x+1)$
11) $6(2x-1)-3(y-x)+0.5(4x-6)$

حل نظام المعادلتين في كل مما يأتي جبريًّا:

12) $2x-y=-1$ و $y=x+3$
13) $2x-5y=-18$ و $3x+4y=19$
14) $4y+6x=-6$ و $5y-x=35$
15) $4x+2y=4$ و $x=y-8$

16) **هدايا:** توزع مدرسة هدايا (حقائب وأقلام) كل عام على المتفوقين، بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 30 ريالًا، وسعر القلم 9 ريالات، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الهدايا 448 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 25 ريالًا، وسعر القلم 8 ريالات. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حله لتجد عدد الحقائب والأقلام المشتراة في كل عام، علمًا بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي للعدد -5.

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x، بحيث إن $-5+x=0$. لذا، فإن $x=5$.

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد x، حيث إن $-5x=1$. لذا، فإن $x=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$ خاصية التوزيع

$=6x-3+3x$ بالتبسيط

$=9x-3$ بجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حل نظام المعادلتين الآتي جبريًّا:

$3y=x-9$

$4x+5y=2$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولًا: حل المعادلة بالنسبة للمتغير x.

$3y=x-9 \rightarrow x=3y+9$

$4(3y+9)+5y=2$ بتعويض $3y+9$ بدلًا من x

$12y+36+5y=2$ خاصية التوزيع

$17y=-34$ بجمع الحدود المتشابهة

$y=-2$ بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x، استعمل المساواة $y=-2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2)=x-9$ بالتعويض عن y بـ -2

$-6=x-9$ بالضرب

$3=x$ بجمع 9 للطرفين

فيكون الحل $(3, -2)$.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

2-1 مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

	السعر	سعة الذاكرة	النوع
العرض الأول	420	512	a
العرض الثاني	399	512	b
العرض الثالث	315	256	c
العرض الرابع	289	128	d

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف

4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8− موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكن تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة A في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4×3 أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة A، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة B.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة المصفوفة A.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix} \right\} \text{صفين}$$

3 اعمدة

بما أن A فيها صفان و3 أعمدة، فإن رتبتها 3×2.

b) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صف 2

عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

تحقق من فهمك

استعمل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كل مما يأتي:

1A) ما رتبة B؟

1B) ما قيمة b_{32}؟

فيما سبق:
درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

والآن:
- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على المصفوفات لتحليل البيانات.

المفردات:
المصفوفة matrix
العنصر element
الرتبة order
مصفوفة الصف row matrix
مصفوفة العمود column matrix
المصفوفة المربعة square matrix
المصفوفة الصفرية zero matrix
المصفوفات المتساوية equal matrices

www.obeikaneducation.com

قراءة الرياضيات
يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة A.

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف
تحتوي صفًا واحدًا.

$$[8 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$$

مصفوفة عمود
تحتوي عمودًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 2 من واقع الحياة — تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة القدم: رصد مدرب فريق المدرسة لكرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات العام الدراسي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع الكرة، 4 أهداف.

ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع الكرة، 11 هدفا.

ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع الكرة، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

a)

	الأهداف	قطع الكرة	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة، لذا فإن رتبة المصفوفة 3×5 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2، والعمود 3، هي 20.

تحقق من فهمك

2) يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

	كبيرة	وسط	صغيرة
الجبن	٥	3.5	2.5
الزعتر	4	3	2
البيض	5.5	4	3
اللحم	6	٥	4

A) نظّم هذه هذه البيانات في مصفوفة، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا.

B) حدد رتبة المصفوفة.

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنىً.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

	الأهداف	قطع الكرة	التمريرات	التسديدات	المباريات
	11	40	170	43	18
	4	30	20	31	20
	4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 ، وفسر النتائج.

مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات.
مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يمثل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟

الناتج هو 33 تقريبًا.

c) هل هذا هو المعدل الدقيق ؟ فسر إجابتك.

لا، ليس للاعبين العدد نفسه من المباريات، لذا فإن إيجاد معدل عناصر عمود 2 لن يحدد المعدل الدقيق للتسديدات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 حيث سيكون المعدل الدقيق 1.96.

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسر إجابتك.

لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

تحقق من فهمك

3) صناعة: يبين الجدول المجاور عدد المصانع الوطنية العاملة في قطاعي صناعة المنسوجات، وصناعة الورق ومنتجاته في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

عدد مصانع المنسوجات وصناعة الورق ومنتجاته في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	صناعة المنسوجات	صناعة الورق ومنتجاته
مكة المكرمة	28	45
الرياض	29	49
الشرقية	14	37
الباحة	1	1

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟

تأكد

مثال 1 حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر فيما يأتي:

4) a_{32} **5)** a_{11} **6)** a_{33} **7)** a_{24}

المثالان 3 , 2 **8) زراعة:** يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟

c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسر إجابتك.

d) اجمع عناصر كل عمود؟ فسر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

9) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ **10)** $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ **11)** $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ **13)** $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر فيما يأتي:

15) a_{21} **16)** b_{22} **17)** b_{13} **18)** a_{12}

مثال 2 نظّم البيانات الآتية في مصفوفة:

19)

الاسم	1 الجولة	2 الجولة	3 الجولة	المجموع
سعود	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

مثال 3 **20) تخزين:** ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000kg خلاص و 1200kg برحي و 500kg سكري، والثاني فيه 3000kg خلاص و 1175kg برحي و 2250kg سكري، والثالث فيه 2750kg خلاص و1500kg برحي و 1700kg سكري.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يمثل هذا المجموع؟

c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يمثل هذا المجموع؟

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

21) a_{32} **22)** b_{21} **23)** b_{12} **24)** a_{21}

25) حديد التسليح: يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة في منطقتي الرياض وجدة يوم الثلاثاء 16 مارس 2010 م.

أسعار حديد التسليح بالريال		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

b) ما رتبة المصفوفة في فرع a؟

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

26) a_{11} **27)** a_{22} **28)** b_{31} **29)** b_{23}

الربط مع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006 ، تبين أن بلوتو لم يعد يعتبر كوكبًا. وهو أحد 40 كويكبًا.

30) فلك: استعمل الجدول المجاور الذي يبين بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس.

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

a) نظّم المسافات في مصفوفة.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

c) ما قيمة العنصر a_{42}.

31) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
معاذ	6	5
صالح	1	8
عبدالله	4	2

a) جدوليًا: نظّم البيانات في مصفوفة على أن تكون أسماء اللاعبين في عمود.

b) جبريًا: أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

c) جدوليًا: بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف.

d) جبريًا: أوجد مجاميع عناصر كل صف.

e) تحليليًا: هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسر إجابتك:

32) المصفوفة C مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53}.

33) اكتشف الخطأ: حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسر إجابتك.

ياسمين	سارة
قيمة العنصر b_{32} هي 5.	العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B، لأن B مصفوفة من النوع 3×2.

34) تحدٍ: جد قيمة كلٍ من المتغيرات x , y , z التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

35) مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى.

36) اكتب: اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

تدريب على اختبار

37) نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة الآتية:

	ضد	مؤيد
المرشح الأول	771	1553
المرشح الثاني	1633	689
المرشح الثالث	229	2088

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي ليس صحيحًا؟

A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة تراكمية

38) مجلس الطلاب: ترشح مسفر لمنصب رئيس مجلس الطلاب في المدرسة، وكان المُقترع يكتب ثلاثة أسماء بالترتيب على ورقة الاقتراع، فيحصل المتنافس على 3 نقاط لكل مركز أول، ونقطتين لكل مركز ثان، ونقطة واحدة لكل مركز ثالث. وقد ورد اسم مسفر في 490 ورقة اقتراع للمراكز الثلاثة، وكان مجموع نقاطه 878. فإذا علمت أن عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثاني أكثر بأربع أصوات من ضعف عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثالث، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها من كل مركز؟ (مهارة سابقة)

39) ثقافة مالية: يبيع مخبز كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معًا في صناديق تحوي من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فكم عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 5-1)

النوع	كعكة الشوكولاتة	كعكة الفواكه
التكلفة	19 ريالاً	13 ريالاً
سعر البيع	44 ريالاً	39 ريالاً

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان $w = 3 , x = -2 , y = 4 , z = 0.5$: (مهارة سابقة)

40) $4x - 6y + 2z$

41) $5w + 2(x - z) + 2y$

42) $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$

2-1 تنظيم البيانات

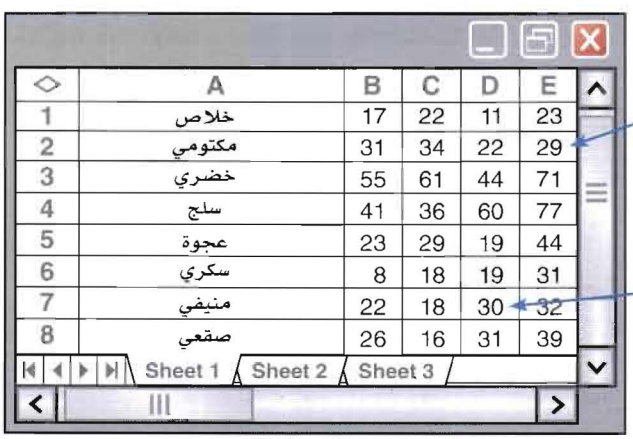
تُستعمل **الجداول الإلكترونية**، لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما هو الحال في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها لعمل الرسوم أو إجراء الحسابات.

مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات				
نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
خضري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
سكري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود B لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



يحوي كل صف مبيعات النوع نفسه من التمور، ويمثل الصف 2 مبيعات التمر المكتومي.

تحتوي كل خلية في الجدول جزءًا واحدًا من البيانات. حيث تحتوي الخلية D7 على القيمة 30 ، والتي تمثل عدد الكيلوجرامات المبيعة في الأسبوع الثالث من تمور منيفي.

تمارين:

1) أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية.

2) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في المصفوفة.

3) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM) .

a) يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8) . أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟

b) أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟

c) أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.

2-2 العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

فيما سبق:
درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات.

والآن:
- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد.

المفردات:
الضرب في عدد ثابت
scalar multiplication

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
لدى وكيل سيارات فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	الرياض		الشرقية		جدة	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	145000	1900	122000	1700	109500	1050
المعرض (2)	225000	2400	145500	1800	135000	1800
المعرض (3)	290000	2700	160000	1800	150500	1800

جمع المصفوفات وطرحها يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها.

مفهوم أساسي — جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $A + B$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A و B وكذلك $A - B$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} + \underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{A+B}{\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} - \underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{A-B}{\begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة
إذا كان $A + B = C$ فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مثال 1 — جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

a $A + B$

$$A + B = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$$ بجمع العناصر المتناظرة.

$$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$ بالتبسيط.

b $B - C$

$$B - C = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

بما أن المصفوفتين B, C لهما رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $B - C$.

تحقق من فهمك

(1A) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(1B) $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

الضرب في عدد ثابت: يمكن ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **الضرب في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي — الضرب بعدد ثابت

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة kA من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز:

$$k \cdot A = kA$$

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

إذا كان $kA = B$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مثال 2 — ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $R = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$، فجد $5R$.

$$5R = 5\begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$ بضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5.

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$ بالتبسيط.

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فجد $-4T$.

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي — خصائص جمع المصفوفات

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $A + B = B + A$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(A + B) = kA + kB$

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4B - 3A$.

$-4B - 3A = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$ بإيجاد ناتج ضرب المصفوفات بالثوابت

$= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

$= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$ بطرح العناصر المتناظرة

$= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

3) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$، فأوجد $-6B + 7A$.

يمكن استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

الربط مع الحياة

المخطط المالي

يستعمل المخطط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

$5\begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \\ 2700 & 290000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \\ 1800 & 160000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \\ 1800 & 150500 \end{bmatrix}$ ضرب كل مصفوفة بـ 5 ثم الجمع

$= \begin{bmatrix} 9500 & 725000 \\ 12000 & 1\,125000 \\ 13500 & 1\,450000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8500 & 610000 \\ 9000 & 727500 \\ 9000 & 800000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547500 \\ 9000 & 675000 \\ 9000 & 752500 \end{bmatrix}$ تطبيق قاعدة الضرب بثابت

$= \begin{matrix} \\ \text{النفقات} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{المبيعات} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 23250 & 1882500 \\ 30000 & 2527500 \\ 31500 & 3002500 \end{bmatrix}$ بجمع المصفوفات

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

تحقق من فهمك

4) استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات السنوي لجميع المعارض على فرض أن السنة 52 أسبوعًا تقريبًا.

تأكد

مثال 1 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 استعمل المصفوفات A, B, C لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$$

7) $4B - 2A$

8) $-8C + 3A$

مثال 4

النوع (كجم)	بوتاسيوم	فسفور	كالسيوم
البروكلي	503	114	68
الكرنب	323	55	24
القرنبيط	194	44	22
البامية	482	112	128

9) **خضراوات:** يبين الجدول المجاور عدد ملجرامات البوتاسيوم، والفسفور، والكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد من أربعة أنواع من الخضراوات.

a) أوجد الفروق بين عدد ملجرامات البوتاسيوم وعدد ملجرامات الكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد من كل نوع من الخضراوات. اكتب الفروق في مصفوفة عمود.

b) ماذا يعني كل صف في الجدول ؟

c) أي نوع من الخضراوات يحتوي الكيلوجرام الواحد منه على أكبر عدد من ملجرامات: البوتاسيوم، الفسفور، الكالسيوم؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا.

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

الأمثلة 2, 3, 4

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

12) **أعمال:** يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم وجبات سريعة، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 10% .

a) اكتب المصفوفة C التي تمثّل الأسعار الحالية .

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة C فيه لإيجاد المصفوفة N التي تمثّل الأسعار الجديدة؟

c) جد المصفوفة N.

d) جد المصفوفة $N - C$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

13) $\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

18) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

19) **كتب:** تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، 5000 كتاب تاريخي و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، 700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي.

a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز A, B, C .

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبر عن ذلك بمصفوفة.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟

d) أوجد المصفوفة $A + B$. هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة ؟ فسر إجابتك.

الربط مع الحياة

تعدّ مكتبة جامعة الملك سعود من أقدم المكتبات العامة في المملكة حيث نشأت عام 1377هـ . وتخدم الطلاب وأعضاء هيئة التدريس بالجامعة ونحو 5000 مستفيد وزائر يوميًا وذلك في مختلف المجالات المعرفية، كما تضم أكثر من 10000 مخطوطة نادرة معظمها أصلي.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

20) $-3\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix}$

21) $-4\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\right)$

23) $-6\left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix}\right)$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

24) $-2\begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$

25) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2 × 2 تبديلية .

27) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2 × 2 تجميعية .

28) **تحد:** إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, 3A - 4B + 6C = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة C.

29) **تبرير:** حدد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين A, B ، ثم فسر إجابتك.

a) إذا كانت $A+B$ معرّفة ، فإن $A-B$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن kA و kB معرّفتان.

c) إذا كانت $A-B$ غير معرّفة ، فإن $B-A$ غير معرّفة.

d) إذا كانت A وَ B لهما نفس عدد العناصر نفسه ، فإن $A+B$ معرّفة.

e) إذا كانت kA و kB معرفتين، فإن $kA + kB$ معرّفة.

30) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا على مصفوفتين A و B ، على أن تكون $4B - 3A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

31) **اكتب:** اشرح كيف تجد $4D - 3C$ لأي مصفوفتين C , D لهما الرتبة نفسها.

تدريب على اختبار

32) حل النظام الآتي:

$$0.06p + 4q = 0.88$$
$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$ **C** $(-2, 0.25)$

B $(0.912, -3.162)$ **D** $(-2, -4.25)$

33) **احتمال:** يوجد في مكتبة 5 أنواع مختلفة من أقلام الحبر السائل، و6 أنواع مختلفة من أقلام الحبر الجاف، فكم عدد البدائل الممكنة لشراء قلمي حبر جاف، وقلم حبر سائل ؟

A 60 **C** 120

B 75 **D** 150

مراجعة تراكمية

إذا كانت $C = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 16 & 4 & x \\ -2 & 9 & y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

34) a_{32} **35)** c_{13} **36)** b_{32}

حل جبريًّا كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

37)
$$2x + 3y - z = -1$$
$$5x + y + 4z = 30$$
$$-8x - 2y + 5z = -2$$

38)
$$3x - 4y + 6z = 26$$
$$5x + 3y + 2z = 5$$
$$-2x + 5y - 3z = -9$$

حل بيانيًّا النظام أدناه: (الدرس 5-1)

39)
$$4x + 2y > 8$$
$$4y - 3x \leq 12$$

40) **سكان:** إذا كان عدد سكان مدينة تبوك 474059 نسمة، بما يزيد على عدد سكان مدينة الخبر بـ 115393 نسمة، فاكتب معادلة لإيجاد عدد سكان مدينة الخبر، ثم حلها. (الدرس 1-1)

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

41) $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$ **42)** $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$ **43)** $-7(x - y) + 5(y - x)$

2-3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فيما سبق:
درستُ ضرب المصفوفات في عدد .

والآن:
- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأهداف وعددها التي سجلها فريق كرة السلة المدرسي في 4 مواسم متتالية.

نوع الهدف	الموسم وعدد الأهداف			
	1427	1428	1429	1430
داخل منطقة الثلاثة	153	217	197	249
خارج منطقة الثلاثة	12	6	7	8
رمية حرة	82	146	102	158

يمكن تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأهداف B كما يمكن التعبير عن مصفوفة عدد النقاط لكل نوع من الأهداف بالمصفوفة P .

مصفوفة عدد الأهداف B ومصفوفة عدد النقاط P

$$P = \begin{bmatrix} \text{داخل منطقة الثلاثة} & \text{خارج منطقة الثلاثة} & \text{رمية حرة} \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

ويمكن استعمال ضرب المصفوفات، لإيجاد عدد النقاط التي أحرزها الفريق في كل موسم.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ بالمصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$A \cdot B = AB$$

$m \times r$ و $r \times t$ متساويان — $m \times t$ رتبة AB

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $A \cdot B$ في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$

$$A \cdot B = AB$$

3×4 و 4×2 — 3×2

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرّفة، ورتبتها 3×2 .

b) $A_{5 \times 3} \cdot B_{5 \times 4}$

$$A \cdot B$$

5×3 و 5×4

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ غير معرّفة.

إرشادات للدراسة

أحيانًا تكتب $A_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة A رتبتها $m \times n$.

تحقق من فهمك

1A) $A_{4 \times 6}$ ، $B_{6 \times 2}$

1B) $A_{3 \times 2}$ ، $B_{3 \times 2}$

يمكن إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي ضرب المصفوفات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة AB هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة A، بعناصر العمود r من المصفوفة B بالترتيب.

الرموز:

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال 2 ضرب المصفوفات المربعة

أوجد XY إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$XY = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول في المصفوفة X في عناصر العمود الأول في المصفوفة Y بالترتيب، ثم اجمع نواتج الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة XY.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & -10(-4)+(-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & -10(-4)+(-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد UV.

تنبيه!

المحافظة على التركيز

من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

يمكن استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لكل من يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

الربط مع الحياة

تشير البحوث الطبية إلى أن ممارسة السباحة مدة ساعة يحرق ما بين 250، و 500 سعر حراري، لذا تُعد السباحة من أفضل الرياضات لتخفيف الوزن.

افهم: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط لكلٍ من المراكز : الأول والثاني والثالث .

خطط: اكتب كلًّا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

النتائج — النقاط

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل: اضرب المصفوفتين. RP

$$RP = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كل من الفرق A, B, C, D على الترتيب. لذا، فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة R من الرتبة 3×4 ، والمصفوفة P من الرتبة 1×3 .لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 1×4.

تحقق من فهمك

3) كرة السلة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد الموسم الذي أحرز فيه فريق كرة السلة أكثر عددٍ من النقاط، وعدد النقاط التي أحرزها في ذلك الموسم .

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 — اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) GH

$$GH = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 6 - 5 & 3 - 24 - 35 \\ 8 + 4 + 0 & 12 + 16 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

b) HG

$$HG = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $GH \neq HG$.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $AB = BA$ ؟

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبيان أن خاصية ليست صحيحة يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كان $L = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a) $J(K+L)$

$$J(K+L) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{بجمع المصفوفتين}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب المصفوفتين}$$

b) $JK + JL$

$$JK + JL = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3) \\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0) \\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $J(K+L) = JK + JL$.

تحقق من فهمك

5) استعمل المصفوفات $T = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ لتحدد إذا كان $(S+T)R = SR + TR$ أم لا.

في المثال السابق كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكن إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائمًا إذا كانت نواتج الضرب والجمع معرَّفة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C، ولأي عدد k، على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أيٍّ منها معرَّفًا:

خاصية التجميع لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A + B)C = AC + BC$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times 4} \cdot B_{4\times 3}$ **2)** $C_{5\times 4} \cdot D_{5\times 4}$ **3)** $E_{8\times 6} \cdot F_{6\times 10}$

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 3 **12) لياقة بدنية:** يبين الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة في المستويين الأول والثاني.

إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالات، ورسوم الاشتراك الشهري 165 ريالًا، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالًا.

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية

الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

a) اكتب مصفوفة عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة رسوم الاشتراك.

b) أوجد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني.

المثالان 4 , 5 استعمل المصفوفات $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

13) $XY = YX$ **14)** $X(YZ) = (XY)Z$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $P_{2\times 3}\cdot Q_{3\times 4}$ **16)** $A_{5\times 5}\cdot B_{5\times 5}$ **17)** $M_{3\times 1}\cdot N_{2\times 3}$

18) $X_{2\times 6}\cdot Y_{6\times 3}$ **19)** $J_{2\times 1}\cdot K_{2\times 1}$ **20)** $S_{5\times 2}\cdot T_{2\times 4}$

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\6\end{bmatrix}$ **22)** $\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\-2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\9 & -3\end{bmatrix}$ **24)** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\7 & -2\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & -9\end{bmatrix}$ **26)** $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\-6 & 7\\-2 & 1\end{bmatrix}$ **28)** $\begin{bmatrix}-4\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$

مثال 3

29) عقارات: لدى مؤسسة عقارية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور تقسيمات هذه الأبنية. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالًا، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالًا، وللجناح 360 ريالًا.

تقسيمات الأبنية السكنية			
المبنى	غرفة بسرير واحد	غرفة بسريرين	جناح
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

a) اكتب مصفوفة تمثّل تقسيمات الأبنية، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

b) اكتب مصفوفة تمثّل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

c) كم مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

المثالان 4 ، 5 استعمل $k=2$ ، $R=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$ ، $Q=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$ ، $P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ لتحدد إن كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

30) $k(PQ)=P(kQ)$ **31)** $PQR=RQP$

32) $PR+QR=(P+Q)R$ **33)** $R(P+Q)=PR+QR$

الربط مع الحياة

تنمو أزهار الزنبق من بصيلات محرشفة، وتأخذ الأزهار شكل أبواق، في كل منها 6 بتلات .

34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري ، و 150 زهرة نرجس ، و 100 زهرة زنبق ، وسعر شراء الزهرة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في طاقة.

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	0.50 ريال	3.00 ريالات
نرجس	1.5 ريال	6 ريالات
زنبق	2 ريال	7 ريالات

a) نظّم البيانات في مصفوفات، واستعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور .

c) استعمل العمليات على المصفوفات لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور.

استعمل المصفوفات $Z=\begin{bmatrix}-3\\x+y\end{bmatrix}$ ، $Y=\begin{bmatrix}-5 & -1.5\\x+2 & y\\13 & 1.2\end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix}2 & -6\\3y & -4.5\end{bmatrix}$ ، لإيجاد ناتج الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكنًا:

35) XY **36)** YX **37)** ZY **38)** YZ

39) $(YX)Z$ **40)** $(XZ)X$ **41)** $X(ZZ)$ **42)** $(XX)Z$

مسائل مهارات التفكير العليا

43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة AB هي 8×5 ، ورتبة المصفوفة A هي 6×5 ، فما رتبة المصفوفة B؟

44) برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع 2×2 .

a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.

b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع.

c) خاصية التجميع للضرب.

d) خاصية التجميع للضرب في عدد.

45) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين A و B على أن تكون $AB=BA$.

46) تحدٍّ: جد قيم a, b, c, d التي تجعل العبارة $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 11\\20 & 29\end{bmatrix}$ صحيحة.

47) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات الألعاب الرياضية.

تدريب على اختبار

48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه ، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالًا **B** 5400 ريال

C 1221 ريالًا **D** 2320 ريالًا

49) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\\j & k & l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}$$

A 1×4

B 3×3

C 4×1

D 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2)

50) $4\begin{bmatrix}8 & -1\\-3 & -4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & 4\\6 & 3\end{bmatrix}$

51) $5\left(2\begin{bmatrix}-2 & -5\\-1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & -2\\6 & 4\end{bmatrix}\right)$

52) $-4\left(\begin{bmatrix}8 & 9\\-5 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-6 & -1\\6 & 3\end{bmatrix}\right)$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-2 إلى 3-2

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$، فحدد:

3) a_{21}

4) b_{22}

5) يبين الجدول الآتي مبيعات محلي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين:

المحل	الأسبوع	الملابس المبيعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

a) اكتب مصفوفة مبيعات كل أسبوع.

b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

6) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

7) $-3\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

8) $2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

9) **اختيار من متعدد:** أوجد ناتج: $2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

10) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

13) **اختيار من متعدد:** إذا كانت المصفوفة XY من النوع 3×2 ، والمصفوفة X من النوع 4×3، فما رتبة المصفوفة Y؟

A 2×3 **B** 3×2 **C** 3×4 **D** 4×2

14) **مبيعات:** يبين الجدول الآتي موجودات محل ألبسة رياضية من القمصان والبناطيل بالدستة، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان قبيل فصل الصيف.

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

a) اكتب مصفوفة A تمثّل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد.

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة A لإيجاد المصفوفة M التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ جد M.

c) ماذا تمثل المصفوفة $M-A$ في هذه الحالة؟

15) **اختيار من متعدد:** ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ يساوي:

A $\begin{bmatrix} 8 & -12 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ **D** عملية الضرب غير معرّفة

2-4

المحدّدات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

فيما سبق:
درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا.

والآن:
- أحسب المحددات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:
المحددة
determinant
محددة الدرجة الثانية
second-order determinant
محددة الدرجة الثالثة
third-order determinant
قاعدة الأقطار
diagonal rule
مصفوفة المعاملات
coefficient matrix
قاعدة كرامر
Cramer's Rule

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبعه بوساطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحددات لمعرفة مساحتها.

المحددات: كل مصفوفة مربعة لها **محددة**، وتسمى محددة المصفوفة من النوع 2×2 **بمحددة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي — محددة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز:
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$
القطر الرئيسي

مثال:
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$$

مثال 1 — محددة الدرجة الثانية

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$ — تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 45 + 32$ — بالتبسيط

$= 77$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$ — تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 0 - 24$ — بالتبسيط

$= -24$

تحقق من فهمك

1A) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

1B) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

اقرأ

المحددات:
يرمز لمحددة المصفوفة A بالرمز |A|

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3 × 3.

تُسمى محددات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محددات الدرجة الثالثة**. ويمكن حساب هـذه المحددات باستعمال **قاعدة الأقطار**.

مفهوم أساسي قاعدة الأقطار

أضف إلى مطويتك

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

مثال 2 قاعدة الأقطار

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$-4(2)(3) = -24$$
$$5(6)(4) = 120$$
$$9(-3)(-8) = 216$$
$$4(2)(9) = 72$$
$$-8(6)(-4) = 192$$
$$3(-3)(5) = -45$$

الخطوة 3: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$-24 + 120 + 216 = 312$$
$$72 + 192 + (-45) = 219$$

الخطوة 4: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحددة هي -93.

تحقق من فهمك

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

تستعمل المحددات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكن استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

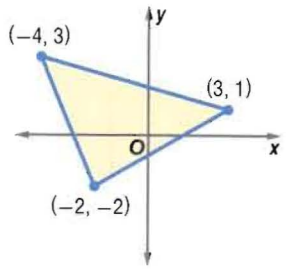
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي $|A|$ ، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

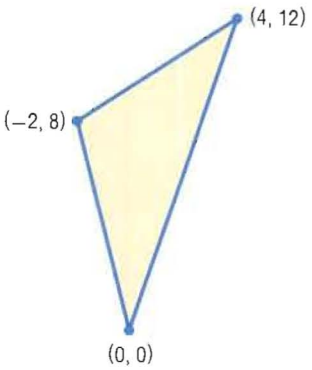


مثال:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال 3 من واقع الحياة

حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات



علم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحددات لإيجاد مساحة الإقليم.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$
$(c, d) = (4, 12)$
$(e, f) = (-2, 8)$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix}$$

بجمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$$-24 + 0 + 0 = -24 \qquad 0 + 0 + 32 = 32$$

مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$$

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي $28\ km^2$.

الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم تصل مساحتها إلى $150\ km^2$ ، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.

تحقق من فهمك

3) يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: $(11, 9), (6, 4), (3, 15)$، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة $0.5km$. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **بمصفوفة المعاملات**.

اقرأ

المحددات:
تستعمل المحددات لتحديد إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحددة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي — قاعدة كرامر

أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $C = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$ ، وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر
عندما تكون قيمة محددة مصفوفة المعاملات C صفرًا، لا يكون للنظام حل وحيد.

مثال 4 — حل نظام من معادلتين

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{matrix}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$	قاعدة كرامر	$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$
$= \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$	بالتعويض	$= \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$
$= \dfrac{5(-29) - 3(15)}{5(4) - (3)(-6)}$	بحساب المحددات	$= \dfrac{15(4) - (-29)(-6)}{5(4) - (3)(-6)}$
$= \dfrac{-145 - 45}{20 + 18}$	بالضرب	$= \dfrac{60 - 174}{20 + 18}$
$= -\dfrac{190}{38}$	بالجمع والطرح	$= -\dfrac{114}{38}$
$= -5$	بالتبسيط	$= -3$

حل النظام هو: $(-3, -5)$

تأكد:

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$	$x = -3, y = -5$
$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$	بالتبسيط.
$15 = 15$ ✓	
$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$	$x = -3, y = -5$
$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$	بالتبسيط.
$-29 = -29$ ✓	

تحقق من فهمك

حل كل نظام فيما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

(4A $\begin{matrix} 7x + 3y = 37 \\ -5x - 7y = -41 \end{matrix}$

(4B $\begin{matrix} 8x - 5y = 70 \\ 9x + 7y = 3 \end{matrix}$

يمكن استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ ، $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ ، $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 4x + 5y - 6z = -14 \\ 3x - 2y + 7z = 47 \\ 7x - 6y - 8z = 15 \end{matrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|} \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} \quad , \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} \quad , \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3105}{621} = 5 \quad , \quad = -\frac{1242}{621} = -2 \quad , \quad = \frac{2484}{621} = 4$$

وعليه، فيكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

تأكد:

$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$

$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$

$-14 = -14$ ✓

$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$

$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$

$15 = 15$ ✓

$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$

$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$

$47 = 47$ ✓

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

تحقق من فهمك

حل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

(5A) $\begin{matrix} 3x + 5y + 2z = -7 \\ -4x + 3y - 5z = -19 \\ 5x + 4y - 7z = -15 \end{matrix}$

(5B) $\begin{matrix} 6x + 5y + 2z = -1 \\ -x + 3y + 7z = 12 \\ 5x - 7y - 3z = -52 \end{matrix}$

تأكد

مثال 1 جد قيمة كل محددة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

مثال 2 جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

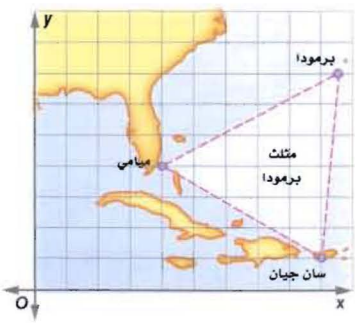
10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

الربط مع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية مثلثة الشكل تقع قرابة الساحل الشرقي لمدينة فلوريدا الأمريكية.

مثال 3

11) جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:



a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.

مثال 4 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

12) $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

13) $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$

مثال 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14) $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

15) $-3x - 5y + 10z = -4$
$-8x + 2y - 3z = -91$
$6x + 8y - 7z = -35$

16) $6x - 5y + 2z = -49$
$-5x - 3y - 8z = -22$
$-3x + 8y - 5z = 55$

17) $-9x + 5y + 3z = 50$
$7x + 8y - 2z = -60$
$-5x + 7y + 5z = 46$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 جد قيمة كل محددة مما يأتي:

18) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

22) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

23) $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$

24) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$

25) $\begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

26) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

المثال 3

27) رحلة مدرسية: نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 375 mi عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع 65 mi /h ، ومعدل سرعتها داخل المدن 25 mi /h، وكان زمن سير الحافلة 7 ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع، وعدد ساعات سيرها داخل المدن.

المثالان 4, 5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

28) $6x - 5y = 73$
$-7x + 3y = -71$

29) $10a - 3b = -34$
$3a + 8b = -28$

30) $-4c - 5d = -39$
$5c + 8d = 54$

31) $-6f - 8g = -22$
$-11f + 5g = -60$

32) $5x - 4y + 6z = 58$
$-4x + 6y + 3z = -13$
$6x + 3y + 7z = 53$

33) $8x - 4y + 7z = 34$
$5x + 6y + 3z = -21$
$3x + 7y - 8z = -85$

34) علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (5, 9) ,(4, 7) ,(0, 3) على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار . فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط .

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

35) $6a - 7b = -55$
$2a + 4b - 3c = 35$
$-5a - 3b + 7c = -37$

36) $3a - 5b - 9c = 17$
$4a - 3c = 31$
$-5a - 4b - 2c = -42$

37) $4x - 5y = -2$
$7x + 3z = -47$
$8y - 5z = -63$

38) $7x + 8y + 9z = -149$
$-6x + 7y - 5z = 54$
$4x + 5y - 2z = -44$

الربط مع الحياة

يستعمل علماء الآثار شبكات وخرائط في مواقع التنقيب عن الآثار لتسجيل المواقع التي وجدوا فيها هذه الآثار.

39) صناعة: ينتج مصنع 3 أحجام من علب الطلاء الفارغة، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 ريالًا.

a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

40) بستنة: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثية الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططًا على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى $(-1, 7), (2, 6), (4, -3)$. جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل مترًا على الأرض.

مسائل مهارات التفكير العليا

41) تبرير: ما الذي يمكن استنتاجه فيما يتعلق بحل نظام معادلات خطية إذا كانت محددة مصفوفة المعاملات تساوي صفرًا؟

42) تحدٍّ: جد محددة مصفوفة من النوع 3×3، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجيًّا} \\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فرديًّا} \end{cases}$$

43) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

a) المحددة تساوي صفرًا.

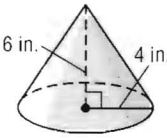
b) المحددة تساوي 25.

c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحددة تساوي -32.

44) اكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محددة مصفوفة المعاملات تساوي صفرًا.

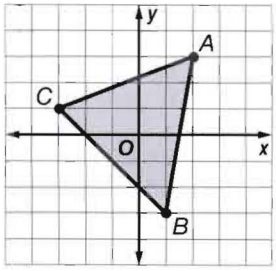
تدريب على اختبار

45) إجابة قصيرة: مخروط قائم نصف قطر قاعدته 4in وارتفاعه 6in. ما مساحته الجانبية ؟



(المساحة الجانبية للمخروط تساوي $\pi r\ell$، حيث ℓ الراسم للمخروط)

46) جد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت مصفوفة الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

47) $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 6}$ **48)** $C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 3}$ **49)** $E_{2 \times 7} \cdot F_{7 \times 1}$

حل كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

50) $2x - 5y = -26$, $5x + 3y = -34$

51) $4y + 6x = 10$, $2x - 7y = 22$

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

فيما سبق:
درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا.

والآن:
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2 × 2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

المفردات:
مصفوفة الوحدة identity matrix
النظير الضربي للمصفوفة inverse matrix
المعادلة المصفوفية matrix equation
مصفوفة المتغيرات variable matrix
مصفوفة الثوابت constant matrix
مصفوفة المعاملات coefficient matrix

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، s تمثل سعر علبة المقبلات، d تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة بحيث إذا ضُربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

مصفوفة وحدة من النوع 2 × 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي — **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب I هي مصفوفة الوحدة وهي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي 1، (من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين) وباقي العناصر أصفار.

لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة مصفوفة الوحدة I نفسها، فإن $A \cdot I = I \cdot A = A$.

الرمـــوز: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $AB=BA=I$ فإن المصفوفة B تُسمى **نظيرًا ضربيًا للمصفوفة** A، وكذلك تُسمى المصفوفة A نظيرًا ضربيًا للمصفوفة B. وإذا كان للمصفوفة A نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز A^{-1}، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدد إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أم لا:

a) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين A, B **تمثل** نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $A \cdot B = B \cdot A = I$.

بكتابة المعادلة $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $A \cdot B \neq I$، فإن أيّ منهما **لا تمثل** نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

b) $F = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

كلٌّ من المصفوفتين F, G **تمثل** نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $F \cdot G = G \cdot F = I$.

بكتابة المعادلة $F \cdot G = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بكتابة المعادلة $G \cdot F = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8} \\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بما أن $F \cdot G = G \cdot F = I$، فإن كلًّا من المصفوفتين F, G نظير ضربي للأخرى.

تحقق من فهمك

1) $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

بعض المصفوفات ليس لها نظير ضربي، وتستطيع تحديد إذا كان لمصفوفة ما نظير ضربي أم لا باستعمال المحددات.

مفهوم أساسي النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **هو** $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$، **وذلك إذا كانت** $ad - bc \neq 0$

لاحظ أن $ad - bc$ هي قيمة محددة A. لذا فإذا كانت قيمة محددة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $P = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$ بحساب المحددة.

بما ان قيمة المحددة لا تساوي صفرًا، فإن P^{-1} موجودة .

$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ تعريف النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2.

$= \frac{1}{7(-1) - (-5)(2)}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $a = 7, b = -5, c = 2, d = -1$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ بالتبسيط.

تأكد: جد ناتجي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلٌّ من ناتجي الضرب يساوي I، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} + \frac{10}{3} & \frac{35}{3} - \frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & \frac{10}{3} - \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ✓

(b $Q = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$ بحساب المحددة.

بما أن قيمة المحددة تساوي صفرًا ، فإن Q^{-1} ليس موجودًا.

تحقق من فهمك

(2A $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية: يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلاً، يمكن كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام المعادلتين الآتي:

$$\begin{matrix} x + 2y = 9 \\ 3x - 6y = 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وَيمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\underset{\text{مصفوفة المعاملات}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\text{مصفوفة المتغيرات} \\ \text{المتغيرات في النظام فقط}}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\text{مصفوفة الثوابت} \\ \text{الثوابت في النظام فقط}}}{\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$A \quad \cdot \quad X \quad = \quad B$

إرشادات للدراسة

النظير الضربي

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات A نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

$ax = b$	المعادلة.	$AX = B$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	بضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد.	$A^{-1}AX = A^{-1}B$
$1x = \frac{b}{a}$	$A^{-1}A = I$, $\left(\frac{1}{a}\right)a = 1$	$IX = A^{-1}B$
$x = \frac{b}{a}$	$IX = X$, $1x = x$	$X = A^{-1}B$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $AX = B$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال 3 من واقع الحياة

حل نظام من معادلتين

سفر: **زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زود به سيارته من البنزين 104 لترات، بسعر إجمالي 49 ريالًا. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟**

يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 104$$
$$0.50x + 0.45y = 49$$

المعادلة المصفوفية هي: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$

الخطوة 1: جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$A^{-1} = \frac{1}{0.45 - 0.50}\begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$-\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 60 \end{bmatrix}$$

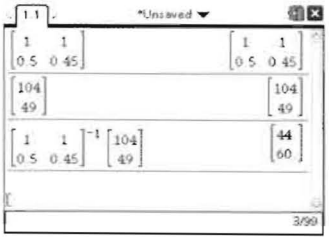
الحل هو (44, 60)؛ حيث x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، y عدد لترات البنزين من المحطة الثانية.

تحقق: تستطيع التأكد من حلك باستعمال النظير الضربي.

أدخل $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix}$ على صورة مصفوفة A

أدخل $\begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$ على صورة مصفوفة B.

اضرب النظير الضربي للمصفوفة A في المصفوفة B.



تحقق من فهمك

3) كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 112.5 ريالاً لشراء 3 كتب علمية و4 كتب ثقافية. على حين أنفقت فاطمة 157.5 ريالًا لشراء 3 كتب علمية و 10 كتب ثقافية. فإذا كانت الكتب العلمية تُباع بالسعر نفسه x. والكتب الثقافية تُباع بالسعر نفسه y. فما سعر الكتاب العلمي؟

الربط مع الحياة

تتساوى أسعار توريد الوقود إلى جميع محطات الوقود في المملكة على اختلاف مواقعها، مع إضافة بدل نقل الوقود فقط.

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت كلٍ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى فيما يأتي:

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ **2)** $F=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

مثال 2 جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix}6 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3 **5) نقود:** مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فكم عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $-2x+y=9$, $x+y=3$ **7)** $4x-2y=22$, $6x+9y=-3$ **8)** $-2x+y=-4$, $3x+y=1$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت كلٍ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى فيما يأتي:

9) $K=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ **10)** $M=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ **11)** $R=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, S=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 2 جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

12) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ **13)** $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -6 & -1\end{bmatrix}$ **15)** $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3 **16) سكان:** يبين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين إحدى المدن وضواحيها.

a) اكتب مصفوفة تمثل هجرة سكان المدينة وسكان الضواحي.

b) إذا كان هناك 16275 شخصًا يسكنون المدينة في الوقت الحاضر، و 17552 شخصًا يسكنون ضواحي المدينة. فتوقع عدد سكان ضواحي المدينة في السنة القادمة.

الربط مع الحياة

تسعى حكومتنا الرشيدة إلى إقامة العديد من المشاريع في الضواحي بهدف وضع بنية تحتية فاعلة، مما يشجع على الهجرة العكسية أو هجرة السكان من المدن إلى الضواحي.

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

17) $-x+y=4$, $-x+y=-4$ **18)** $-x+y=3$, $-2x+y=6$ **19)** $x+y=4$, $-4x+y=9$

20) $3x+y=3$, $5x+3y=6$ **21)** $y-x=5$, $2y-2x=8$ **22)** $4x+2y=6$, $6x-3y=9$

23) $1.6y-0.2x=1$, $0.4y-0.1x=0.5$ **24)** $4y-x=-2$, $3y-x=6$ **25)** $2y-4x=3$, $4x-3y=-6$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) **اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر و فاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فأيهما على صواب؟ فسر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

27) **تحد:** صف المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

28) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسر إجابتك.
"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

29) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

30) **اكتب:** اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات.

تدريب على اختبار

31) تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 1 ريال، وحجم متوسط بسعر 1.5 ريال، وحجم كبير بسعر 2 ريال، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 75 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محددة فيما يأتي: (الدرس 4-2)

32) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

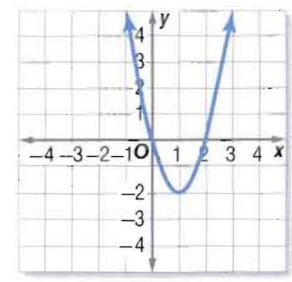
33) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$

34) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

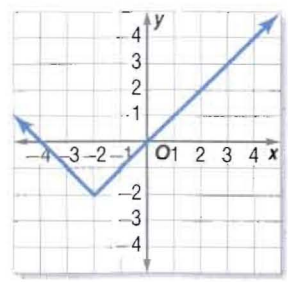
35) **حليب:** تنتج مزرعة أبقار 200 جالون على الأكثر من الحليب الطازج والحليب المبستر يوميًّا. فإذا كان كل زبون من زبائن المزرعة يحتاج إلى 15 جالونًا على الأقل من الحليب المبستر، و 21 جالونًا على الأقل من الحليب الطازج يوميًّا، وكان ربح المزرعة في الجالون الواحد من الحليب المبستر 8.2 ريالات، ومن الحليب الطازج 7.5 ريالات. فكم عدد الجالونات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 6-1)

حدد نوع الدالة الممثلة بيانيًّا في كلّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

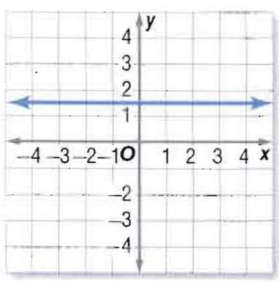
36)



37)



38)



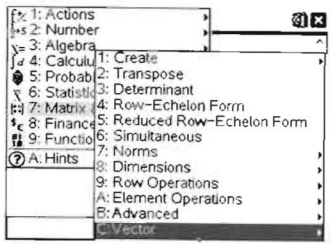
2-5 المصفوفات الموسعة

يمكنك حل نظام معادلات خطية باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire. إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت. وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظام من المعادلات.

مثال

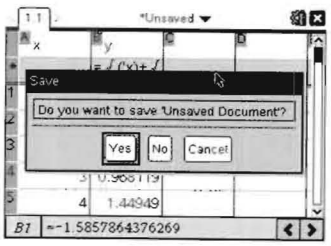
اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حل هذا النظام باستعمال الحاسبة البيانية:

$$2x + y + z = 1$$
$$3x + 2y + 3z = 12$$
$$4x + y + 2z = -1$$



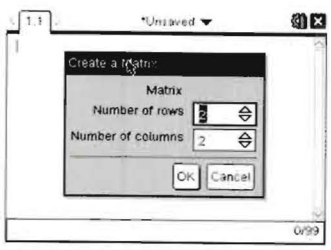
الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1: New Doc .

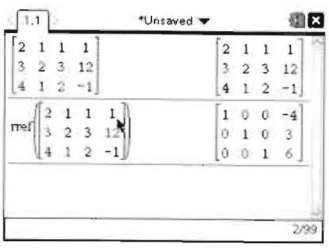


ملاحظة: إذا ظهرت شاشة Save فاختر Yes إذا أردت حفظ الملفات السابقة، أو No إذا أردت حذفها.

- اختر Add Calculator .
- اضغط مفتاح menu ثم اختر 7: Matrix & Vector ومنها اختر 1: Create ومنها 1: Matrix... تظهر شاشة نحدد من خلالها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.



- أدخل عدد الصفوف ثم اضغط tab وأدخل عدد الأعمدة ثم اضغط enter .
- أدخل معاملات المتغيرات، والثوابت مستعملًا tab للتنقل، ثم اضغط enter .
- اضغط menu ، ثم اختر 7: Matrix & Vector ومنها اختر 5: Reduced Row-Echelon Form .
- استعمل السهم للأعلى لتظلل المصفوفة الموسعة التي كتبتها ثم اضغط enter ثم enter مرة أخرى فيظهر الحل.



ادرس الشكل المختزل للمصفوفة، ولاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تشكّل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3 ، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$، ومن الصف الثاني أن $y = 3$، ومن الصف الثالث أن $z = 6$ وعليه، يكون الحل $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفة موسّعة لكل نظام معادلات فيما يأتي، ثم حله باستعمال الحاسبة البيانية:

1) $3x + 2y = -4$
$4x + 7y = 13$

2) $2x + y = 6$
$6x - 2y = 0$

3) $2x + 2y = -4$
$7x + 3y = 10$

4) $4x + 6y = 0$
$8x - 2y = 7$

5) $6x - 4y + 2z = -4$
$2x - 2y + 6z = 10$
$2x + 2y + 2z = -2$

6) $5x - 5y + 5z = 10$
$5x - 5z = 5$
$5y + 10z = 0$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المصفوفات (الدرس 2-1)

- المصفوفة: هي ترتيب مستطيلي لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها الرتبة نفسها. وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي (الدرس 2-5)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.

المعادلة المصفوفية (الدرس 2-5)

- لحل معادلة مصفوفية من الشكل $AX = B$ ، جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة فيه.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

المصفوفة (58)
العنصر (58)
الرتبة (58)
مصفوفة الصف (59)
مصفوفة العمود (59)
المصفوفة المربعة (59)
المصفوفة الصفرية (59)
المصفوفات المتساوية (59)
الضرب في عدد ثابت (66)
المحددة (79)
محددة الدرجة الثانية (79)
محددة الدرجة الثالثة (80)
قاعدة الأقطار (80)
مصفوفة المعاملات (82)
قاعدة كرامر (82)
مصفوفة الوحدة (87)
النظير الضربي للمصفوفة (87)
المعادلة المصفوفية (89)
مصفوفة المتغيرات (89)
مصفوفة الثوابت (89)

اختبر مفرداتك

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

1) _____ هي ترتيب مستطيلي لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.

2) عند _____ فإننا نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد.

3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات _____ .

4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى _____ .

5) يُسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة _____ المصفوفة.

6) _____ هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.

7) _____ هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار.

8) قيمة _____ المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي -1.

9) إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون _____ للأخرى.

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات: 63-58)

10) نادٍ رياضي: يبين الجدول الآتي عدد المشتركين شهريًّا وسنويًّا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

	اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشتراك شهري	31	108	64
اشتراك سنوي	68	9	42

a) نظّم بيانات الجدول في مصفوفة.

b) ما رتبة المصفوفة؟

c) ما قيمة العنصر a_{23}؟

d) ما قيمة العنصر a_{11}؟

e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسر النتائج.

مثال 1

يبين الجدول الآتي عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

	اليوم الأول	اليوم الثاني	اليوم الثالث
الفترة الصباحية	37	19	26
الفترة المسائية	69	58	75

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×2

c) اجمع عناصر كل من الصفين 1 و 2، وفسر النتائج.
مجموع عناصر الصف 1 هو 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية للأيام الثلاثة. ومجموع عناصر الصف 2 هو 202، ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية للأيام الثلاثة.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات: 70-65)

جد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

12) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$

مثال 2

جد ناتج $2B + 3A$ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$3A = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2B + 3A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات: 77-71)

جد ناتج كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

13) $\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix}$

15) اشترى راشد 4 عبوات حليب، و 2 kg من التفاح، و 3 kg من البطاطس، وكيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر عبوة الحليب، والكيلوجرام الواحد من التفاح، والكيلوجرام الواحد من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

أرز	بطاطس	تفاح	حليب
[25	3	10	15]

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد.

مثال 3

جد XY إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix} \quad \text{بضرب الصفوف في الأعمدة}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix} \quad \text{بالتبسيط}$$

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات: 86-79)

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$ **17)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

18) $3x - y = 0$
$5x + 2y = 22$

19) $5x + 2y = 4$
$3x + 4y + 2z = 6$
$7x + 3y + 4z = 29$

20) اشترت شيماء 3 أساور، وعقدين بمبلغ 85 ريالًا، واشترت ليلى سوارين و 4 عقود بمبلغ 110 ريالات. فإذا كان للعقود التي اشترتها كل منهما السعر نفسه، وكذلك الأساور. فجد سعر كل من العقد، والسوار.

مثال 4

جد قيمة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$ تعريف المحددة

$= 20 + 12 = 32$ بالتبسيط

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:

$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{-8 - 12}{16 - 6}$ بحساب المحددات

$= \dfrac{-20}{10} = -2$ بالتبسيط

$b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{4 + 1}{16 - 6}$ بحساب المحددات

$= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ بالتبسيط

الحل هو $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات: 92-87)

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **22)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

حل المعادلة المصفوفية في كل مما يأتي:

24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

26) اشترى سعود 2 kg من المكسرات و 2 kg من القهوة بمبلغ 140 ريالًا. واشترى ناصر 3 kg من المكسرات وكيلوجرامًا من القهوة بمبلغ 170 ريالًا. فما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟

مثال 6

حل المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1: جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$A^{-1} = \frac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

اختبار الفصل

حدد العناصر الآتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 7\\ 9 & 1 & 1\\ 8 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

1) a_{22} **2)** a_{31}

جد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $-3\begin{bmatrix}4a\\ 0\\ -3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 0\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix}-5 & 7\\ 6 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 9 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7) **ثقافة مالية:** تبيع مكتبة 3 مجموعات من الكتب التعليمية للأطفال. ويبين الجدول الآتي تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. فإذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

	التكلفة	سعر البيع (ريال)
تربوية	100	120
علمية	90	110
قصص	130	150

a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

8) إذا كان $A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ -3 & -4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-7 & 5\\ 5 & -4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

فجد ناتج $AB-AC$

9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1,2), y(3,6), z(-1,4)$.

10) **اختيار من متعدد:** جد قيمة محددة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ -2 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

A -44 **C** $\frac{1}{44}$

B 44 **D** $-\frac{1}{44}$

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

11) $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **12)** $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}6 & 3\\ 8 & 4\end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

15) $2x-y=-9$

$x+2y=8$

16) $x-y+2z=0$

$3x+z=11$

$-x+2y=0$

17) $6x+2y+4z=2$

$3x+4y-8z=-3$

$-3x-6y+12z=5$

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) تبين المصفوفة L المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما. وتبين المصفوفة H المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة .

$$L = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

ما العملية التي يمكن استعمالها لإيجاد الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

A $L + H$ **C** $H \times L$

B $H - L$ **D** $L - H$

2) جد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\ 1 \quad 3\ ]$، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $[\ -3\ ]$ **C** $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

B $[\ 11\ ]$ **D** الضرب غير معرف

3) في أي من الدوال الآتية يكون $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$؟

A $f(x) = -|3x| + 1$

B $f(x) = [\![3x + 1]\!]$

C $f(x) = |3x| + 1$

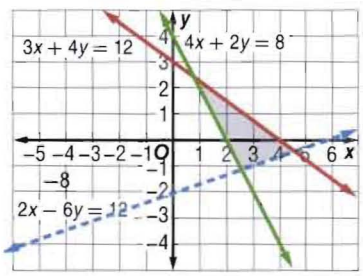
D $f(x) = [\![3x]\!] + 1$

4) النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث:

A 54.5 وحدة مربعة **C** 60 وحدة مربعة

B 58 وحدة مربعة **D** 61.5 وحدة مربعة

5) ما النظام الذي تمثل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟



A $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

B $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

C $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

D $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

6) ما رتبة المصفوفة: $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$؟

A 4×2 **C** 4×8

B 2×4 **D** 8×4

7) أي من الدوال الآتية يكون مداها: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$؟

A $f(x) = [\![x]\!]$

B $f(x) = |-x + 1|$

C $f(x) = -|x|$

D $f(x) = -[\![x]\!] + 1$

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) هل يوجد للمصفوفة B نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

9) احسب قيمة محددة المصفوفة:

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

إجابة مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. فإذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $y \le -x + 32, x \ge 0, y \ge 0, x \le 16, y \le 20$، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل قدمًا واحدة على الأرض، فما مساحة الأرضية بالقدم المربعة؟

11) مع عمر 14 قطعة نقدية من فئة الريال، ونصف الريال. فإذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي 10.5 ريالات، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

a) افرض أن d تمثل عدد الريالات التي يملكها عمر، q عدد أنصاف الريالات التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم كل من d و q.

c) حل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي. كم عدد الريالات وأنصاف الريالات التي يملكها عمر؟

12) مثل بيانيًّا نظام المتباينات الآتي، ثم حدد رؤوس منطقة الحل وجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

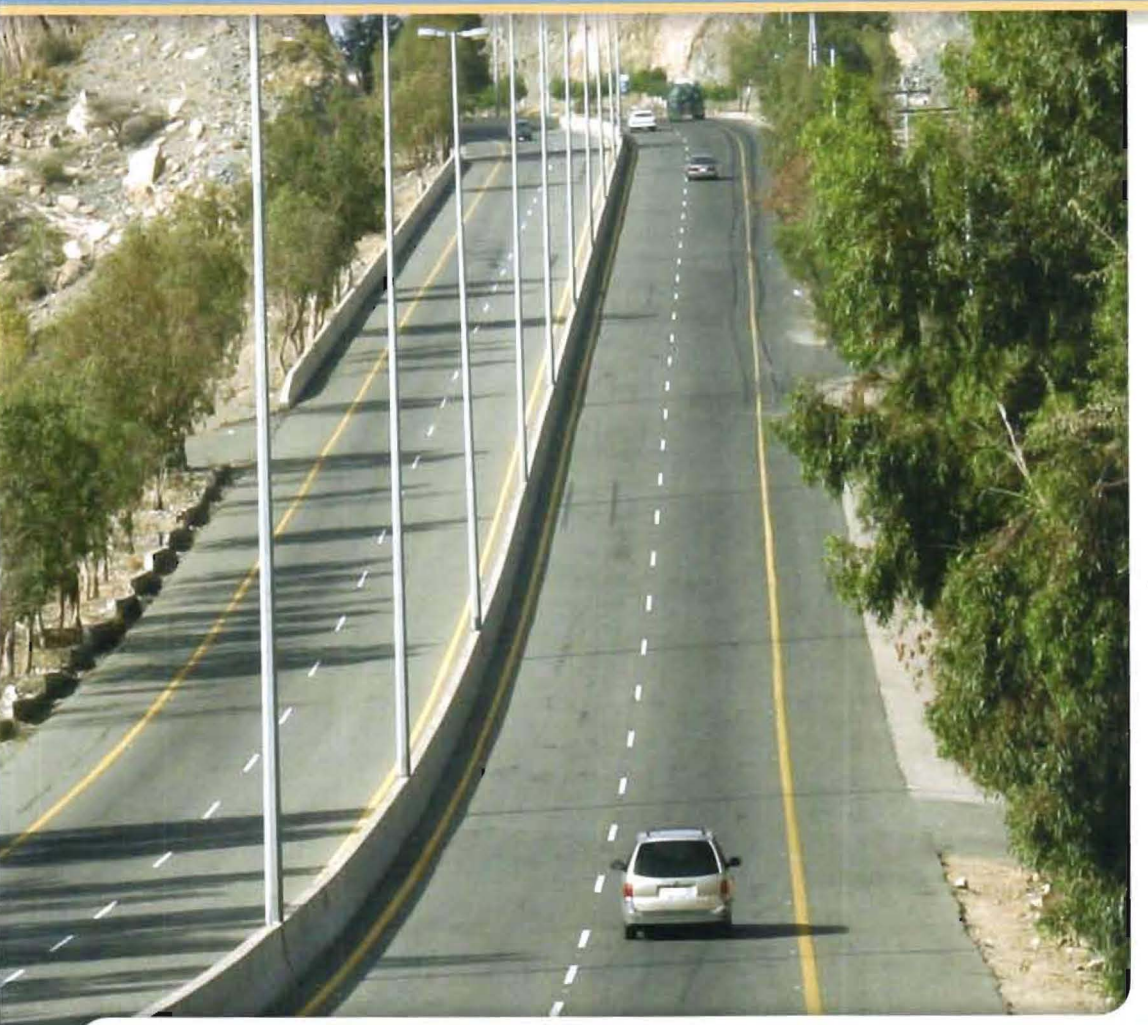
$$x \ge 0, y \ge 0$$
$$x + 2y \le 14$$
$$3x + 4y \le 36$$
$$f(x, y) = 8x + 12y$$

13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالًا على ذلك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	2	8	9	10	11	12	13
فعد إلى...	2-2	2-3	1-3	2-4	1-5	2-1	1-4	2-5	2-4	1-5	2-5	1-6	2-3

الفصل 3

كثيرات الحدود ودوالها
Polynomials and Polynomial Functions



فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا، وحل المعادلات التربيعية.

والآن:

- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحلّل دوال كثيرات الحدود، وأمثلها بيانيًا.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفارها.

لماذا؟

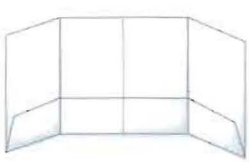
مواصلات: يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، وقدرة الطرق السريعة الاستيعابية، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كل من السيارات الجديدة والمستعملة.

المطويات منظم أفكار

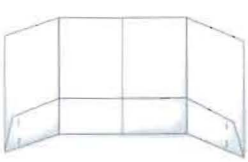
كثيرات الحدود ودوالها: اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

1. **اثن** الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.

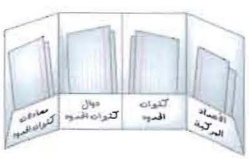
2. **اثن** الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.



3. **ثبّت** الحافتين الطرفيتين للثنيه كما يظهر في الشكل أدناه.



4. **عنون** الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أعد كتابة كل من العبارات الآتية على صورة جمع:

1) $-5-13$
2) $5-3y$
3) $5mr-7mp$
4) $3x^2y-14xy^2$
5) **محاضرات:** حضر 20 شخصًا محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس:

6) $-4(a+5)$
7) $-1(3b^2+2b-1)$
8) $-\frac{1}{2}(2m-5)$
9) $-\frac{3}{4}(3z+5)$
10) وزع معلم قلمًا وحقيبة على كل طالب في صفٍ يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالات، والحقيبة 18 ريالًا، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب. استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن.

حل كل معادلة فيما يأتي :

11) $x^2+2x-8=0$
12) $x^2-5x+6=0$
13) $x^2-x-20=0$
14) $x^2-x=0$
15) **فيزياء:** إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h=-16t^2+50$. استعمل المعادلة $0=-16t^2+50$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy-3-z$ على صورة جمع.

$2xy-3-z$	العبارة الأصلية
$=2xy+(-3)+(-z)$	بإعادة الكتابة باستعمال الجمع

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس: $-3(a+b-c)$

$-3(a+b-c)$	العبارة الأصلية
$=-3(a)+(-3)(b)+(-3)(-c)$	خاصية التوزيع
$=-3a-3b+3c$	بالتبسيط.

مثال 3

حل المعادلة: $x^2-6x+12=19$.

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.

$x^2-6x+12=19$	المعادلة الأصلية
$x^2-6x=7$	بطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2-6x+9=7+9$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$(x-3)^2=16$	بتحليل x^2-6x+9
$x-3=\pm 4$	بإيجاد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x=3\pm 4$	بإضافة 3 لكلا الطرفين

الحلان هما: $7, -1$

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

3-1 الأعداد المركبة
Complex Numbers

فيما سبق:
درستُ تبسيط الجذور التربيعية.

والآن:
- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيلية
imaginary unit

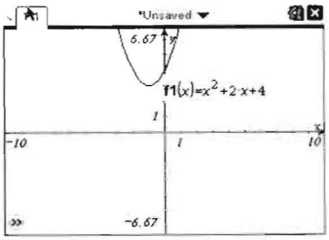
العدد التخيلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

المترافقان المركبان
complex conjugates

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

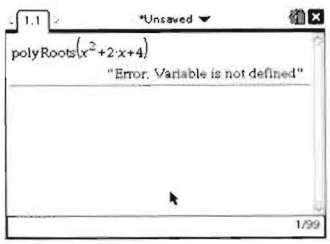


بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، ولذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك، اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب:

on 1. New Doc 1:Add Calculator menu 3: Algebra

3: Polynomial Tools 2: Real Roots of Polynomial



ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط enter enter فيظهر على الشاشة كلمة Error ، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات كالمعادلة السابقة الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، وتعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن : $i^2 = -1$ أو $i = \sqrt{-1}$

وتسمى الأعداد على الصورة $6i, -2i, i\sqrt{3}$ **أعداداً تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة. لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = bi$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط كلاً مما يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}\\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\\ &= 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6}\\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6}\\ &= 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{-18}$

1B) $\sqrt{-125}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلاً من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$ بالضرب

$= -15(-1)$ $i^2 = -1$

$= 15$ بالتبسيط.

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$ $i = \sqrt{-1}$

$= i^2\sqrt{90}$ بالضرب

$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$ بالتبسيط

$= -3\sqrt{10}$ بالضرب

تحقق من فهمك

2A) $3i \cdot 4i$ **2B)** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C)** i^{31}

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها سابقاً .

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

$4x^2 + 256 = 0$ المعادلة الأصلية

$4x^2 = -256$ بطرح 256 من كلا الطرفين

$x^2 = -64$ بقسمة كلا الطرفين على 4

$x = \pm\sqrt{-64}$ خاصية الجذر التربيعي

$x = \pm 8i$ $\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي :

3A) $4x^2 + 100 = 0$ **3B)** $x^2 + 4 = 0$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة $3i + 2$، حيث 2 عدد حقيقي، $3i$ عدد تخيلي بحت، من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما. ويسمى هذا النوع من العبارات **بالعدد المركب**.

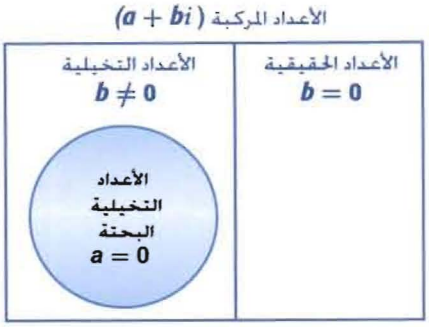
مفهوم أساسي الأعداد المركبة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

يوضح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عدداً حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا $a = c$ ، $b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x , y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساو الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزآن التخيليان.

$3x - 5 = 7$	الجزآن الحقيقيان	$y - 3 = 6$ الجزآن التخيليان
$3x = 12$	بجمع 5 لكلا الطرفين	$y = 9$ بجمع 3 لكلا الطرفين.
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 3	

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي x ، y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

على الرغم من أن الأعداد الحقيقية هي أعداد مركبة أيضًا، إلا أن العبارة "عدد مركب" تشير عادة إلى الأعداد غير الحقيقية فقط.

ويمكن استعمال كل من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمّع الأجزاء التخيلية معاً.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$ خواص التبديل و التجميع والتوزيع

$= 7 - 3i$ بالتبسيط

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$ خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$= 1 - 2i$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

5A) $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B)** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد يمكن تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

مثال 6 من واقع الحياة — ضرب الأعداد المركبة

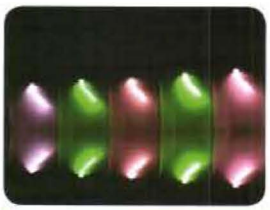
كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $2 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $9 - 3i$ أوم.

$V = C \cdot I$	الصيغة الرياضية
$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$	$C = 2 + 4i$, $I = 9 - 3i$
$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$	باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب
$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$	بالضرب
$= 18 + 30i - 12(-1)$	$i^2 = -1$
$= 30 + 30i$	بالجمع

فرق الجهد = $30 + 30i$ فولت.

تحقق من فهمك

6) أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم.



الربط مع الحياة

مصابيح الزينة هي من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

يسمى العددان المركبان $a - bi$, $a + bi$ **مترافقين مركبين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7 — قسمة الأعداد المركبة

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$	$3 - 6i$, $3 + 6i$ مترافقان مركّبان
$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	بالضرب
$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \frac{6i + 12}{45}$	بالتبسيط
$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$	بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$	بالضرب في $\frac{i}{i}$
$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$	بالضرب
$= \frac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$	بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$

تحقق من فهمك

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$ **7B)** $\frac{2 + i}{1 - i}$

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 1 , 2

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

3) $(4i)(-3i)$

4) $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

5) i^{40}

6) i^{63}

حل كل معادلة مما يأتي :

مثال 3

7) $4x^2 + 32 = 0$

8) $2x^2 + 24 = 0$

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

10) $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 5 , 7

11) $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12) $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

13) $(6 - 8i)(9 + 2i)$

14) $(3 + 2i)(-2 + 4i)$

15) $\frac{3 - i}{4 + 2i}$

16) $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

مثال 6

17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $3i - 5$ أمبير، وفي الجزء الآخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

تدرب وحل المسائل

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 1 , 2

18) $\sqrt{-121}$

19) $\sqrt{-169}$

20) $\sqrt{-100}$

21) $\sqrt{-81}$

22) $(-3i)(-7i)(2i)$

23) $4i(-6i)^2$

24) i^{11}

25) i^{25}

26) $(-3 + i) + (-4 - i)$

27) $(11 - 8i) - (2 - 8i)$

28) $(1 + 2i)(1 - 2i)$

29) $(3 + 5i)(5 - 3i)$

30) $(4 - i)(6 - 6i)$

31) $\frac{2i}{1 + i}$

32) $\frac{5}{2 + 4i}$

33) $\frac{5 + i}{3i}$

حل كل معادلة مما يأتي :

مثال 3

34) $4x^2 + 4 = 0$

35) $3x^2 + 48 = 0$

36) $2x^2 + 10 = 0$

37) $6x^2 + 108 = 0$

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي x، y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

38) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

39) $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

40) $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

41) $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 5 , 7

42) $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

43) $4i\left(\frac{1}{2}\,i\right)^2(-2i)^2$

44) i^{41}

45) $(4 - 6i) + (4 + 6i)$

46) $(8 - 5i) - (7 + i)$

47) $(-6 - i)(3 - 3i)$

48) $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$

49) $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$

50) $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$

مثال 6

51) **كهرباء :** تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $8i + 7$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $4i - 13$ أوم. اجمع هذين العددين المركّبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

كهرباء : استعمل الصيغة $V = C \cdot I$، حيث V فرق الجهد، C شدة التيار، I المعاوقة في حل السؤالين 53 , 52 :

52) إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3 + 6i$ أمبير، والمعاوقة $i - 5$ أوم ، فكم يكون فرق الجهد ؟

53) إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $12i - 20$ فولت، والمعاوقة $4i - 6$ أوم ، فكم تكون شدة التيار؟

54) أوجد ناتج جمع $7x + (4 + 5i)x^2 - 8i$ إلى $ix^2 - (2 + 6i)x + 3$.

55) بسّط العبارة: $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$

56) **تمثيلات متعددة :** ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية البحتة على المحور الرأسي.

a) بيانيًا : مثّل العدد $3 + 4i$ بيانيًّا في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$، وسمِّ تلك النقطة A.

b) بيانيًا : مثّل العدد $-2 - 5i$ بيانيًّا في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-5, -2)$، وسمِّها B.

c) بيانيًا : إذا كانت النقطتان A, B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليليًا : ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A, B, C

الربط مع الحياة

الكهرباء هي سريان شحنات كهربائية. والكهرباء التي نستعملها هي أحد مصادر الطاقة التي يتم توليدها أيضًا من الوقود الأحفوري والمفاعلات النووية ومصادر طبيعية أخرى.

مسائل مهارات التفكير العليا

57) **اكتشف الخطأ:** قامت كل من صفاء ومنال بتبسيط $(4i)(3i)(2i)$، فأي منهما على صواب؟ وضح إجابتك.

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

58) **تحدٍّ:** بسّط العدد المركب: $(1 + 2i)^3$.

59) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

60) **مسألة مفتوحة:** اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

61) **اكتب:** وضح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أم لا ؟

تدريب على اختبار

62) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحة؟

A $x = 6, y = 7$

B $x = 4, y = i$

C $x = 4, y = i$

D $x = 4, y = 7$

63) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

A $-27 + 36i$

B $9 + 36$

C $9 - 36$

D $36 - 27i$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي مستعملاً التحليل إلى العوامل: (مهارة سابقة)

64) $2x^2 + 7x = 15$ **65)** $4x^2 - 12 = 22x$ **66)** $6x^2 = 5x + 4$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا مما يأتي، (إذا كان ذلك ممكنًا): (مهارة سابقة)

67) مجموعهما 3−، وناتج ضربهما 40 − .

68) مجموعهما 21−، وناتج ضربهما 108 .

هل تمثّل كلٌّ من ثلاثيات الحدود الآتية مربعًا كاملًا أم لا؟ (مهارة سابقة)

69) $x^2 + 16x + 64$ **70)** $x^2 - 12x + 36$

71) $x^2 + 8x - 16$ **72)** $x^2 + 5x + 6.25$

3-2

القانون العام والمميز
The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن:
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات
القانون العام
Quadratic Formula
المميز
discriminant

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$h = -4.9t^2 + 117t + 42$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$.

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، وهنالك قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

الحالة العامة		مثال
$ax^2 + bx + c = 0$	معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	بقسمة كلا الطرفين على a	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	بطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	بإكمال المربع	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	بتحليل الطرف الأيسر	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	بتبسيط الطرف الأيمن	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	خاصية الجذر التربيعي	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بالتبسيط	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1 معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كل من a, b, c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^2 - 10x = 11 \rightarrow 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام.

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن: a بالعدد 1، b بالعدد 10-، c بالعدد 11- $= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$

بالضرب $= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$

بالتبسيط $= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$

$\sqrt{144} = 12$ $= \frac{10 \pm 12}{2}$

بالكتابة على صورة معادلتين. $x = \frac{10 + 12}{2}$ أو $x = \frac{10 - 12}{2}$

بالتبسيط $= 11$ $= -1$

وعليه يكون الحلان هما: 11، 1−.

تحقق: عوض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

1A) $x^2 + 6x = 16$ **1B)** $2x^2 + 25x + 33 = 0$

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإن للمعادلة جذرًا نسبيًّا واحدًا .

تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمى الآن بالقانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد

حل المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدد قيم كل من a, b, c، وعوّض هذه القيم في القانون العام .

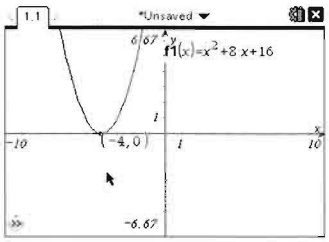
القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن: a بالعدد 1 ، b بالعدد 8 ، c بالعدد 16 $= \dfrac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$

بالتبسيط $= \dfrac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0} = 0$ $= \dfrac{-8}{2} = -4$

الحل هو -4 .



تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة وجود حل واحد عند $x = -4$.

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(2A) $x^2 - 16x + 64 = 0$ **(2B)** $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها على الصورة الجذرية .

مثال 3 الجذور غير النسبية

حل المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

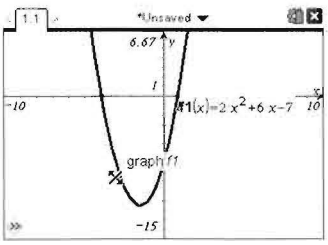
القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن: a بالعدد 2 ، b بالعدد 6 ، c بالعدد -7 $= \dfrac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$

بالتبسيط $= \dfrac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$

$\sqrt{92} = \sqrt{4\,(23)} = 2\sqrt{23}$ $= \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$

الحلان التقريبان هما: 0.9 ، -3.9



تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية Zero في الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفري الدالة المرتبطة وهما: -3.9 , 0.9

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(3A) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ **(3B)** $x^2 - 8x + 9 = 0$

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

تذكّر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

مثال 4 الجذور المركبة

حل المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

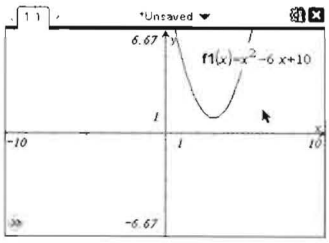
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$ بالتعويض عن: a بالعدد 1، b بالعدد -6، c بالعدد 10

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ بالتبسيط

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$

$$= 3 \pm i$$ بالتبسيط

الحلان هما: $3 + i$ ، $3 - i$ عددان مركبان مترافقان.



تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين هما عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما. وللتحقق من صحة الحلين المركبين، عوضهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	بإيجاد مفكوك $(3 + i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بالتبسيط
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$
$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	بإيجاد مفكوك $(3 - i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بالتبسيط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(4A $3x^2 + 5x + 4 = 0$

(4B $x^2 - 4x = -13$

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. تسمى العبارة $b^2 - 4ac$ **بالمميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← المميز

يمكن استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية، ونوعها، ويلخص الجدول في الصفحة الآتية الأنواع الممكنة للجذور. ويمكن أن يستعمل المميز للتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية.

إرشادات للدراسة

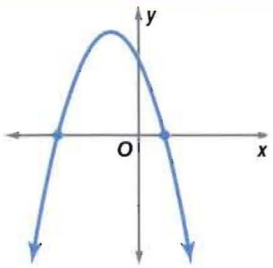
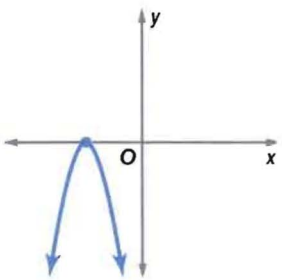
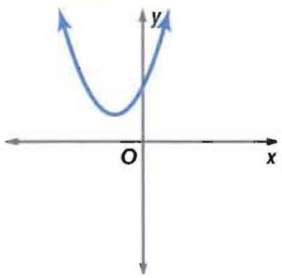
الجذور تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

مفهوم أساسي

المميز

اضف إلى مطويتك

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، **حيث** a,b,c **أعداد نسبية،** $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل.	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي واحد	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5

وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7، b = -11، c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان.

b. $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1، b = 22، c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد.

تحقق من فهمك

(5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(5B) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، ويلخص الجدول أدناه تلك الطرائق.

إرشادات للدراسة

دراسة الملاحظات

قد ترغب في تدوين هذه القائمة من الطرائق في دفتر ملاحظاتك أو في مطويتك لتكون مرجعًا لك عند الدراسة.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 7x = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	**عندما لايمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها.** مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد

الأمثلة 1–4

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$

2) $x^2 + 8x + 5 = 0$

3) $4x^2 - 5x - 2 = 0$

4) $9x^2 + 6x - 4 = 0$

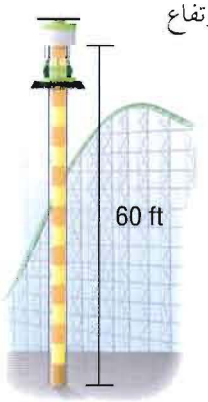
5) $10x^2 - 3 = 13x$

6) $22x = 12x^2 + 6$

7) $-3x^2 + 4x = -8$

8) $x^2 + 3 = -6x + 8$

9) ترفيه: تمثل حركة لعبة ترفيهية بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ ، حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع إلى قمة البرج ثم تهوي بسرعة تصل إلى $80\ ft\backslash s$ ، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع $60\ ft$ إلى $0\ ft$ ؟



مثال 5

أجب عن الفرعين a،b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

10) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

11) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

12) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

13) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

الأمثلة 4-1

14) $x^2 + 45x = -200$ **15)** $4x^2 - 6 = -12x$

16) $5x^2 - 9 = 11x$ **17)** $12x^2 + 9x - 2 = -17$

18) **سباحة:** يقفز متسابق فوق منصة ارتفاعها m 10 عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عن المنصة، ويمكن تقدير ارتفاع المتسابق عن سطح الماء h بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة: $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

a) حدد كلًّا من المجال والمدى المقبولين لهذه الدالة .

b) متى يصل المتسابق إلى سطح الماء؟

أجب عن الفروع **a-c** لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

مثال 5

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

19) $2x^2 + 3x - 3 = 0$ **20)** $3x^2 - 3x + 8 = 0$ **21)** $2x^2 + 4x + 7 = 0$

22) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$ **23)** $x^2 - 6x = -9$ **24)** $x^2 + 2x - 4 = -9$

25) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$ **26)** $5x^2 + 8x = 0$ **27)** $8x^2 = -2x + 1$

28) $4x - 3 = -12x^2$ **29)** $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$ **30)** $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

الربط مع الحياة

في إطار الجهود العالمية لمكافحة التدخين، بدأت وزارة الصحة بالمملكة العربية السعودية عام 1423هـ برنامجها الشامل لمكافحة التدخين، والذي يقدم خدماته التوعوية والعلمية والاستشارية والعلاجية للفرد وللأسرة وللمجتمع.

31) **التدخين:** تبذل دول العالم جهودًا مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، كانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالمعادلة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2015	?

a. احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامي 2010, 2015 .

b. استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما y=50.

c. اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسر إجابتك.

32) **نظرية الأعداد:** يعطى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ،... ،3 ،2 ،1 بالقانون $S = \frac{1}{2} n (n + 1)$. فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتشف الخطأ:** حددت كل من هدى ولولوة عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقان.

لولوة

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

34) **تحدَّ:** حل المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام.

35) **تبرير:** حدد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كل من المعاملين a، c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذري المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

36) **اكتب:** صف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة: $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟

تدريب على اختبار

37) قدرت شركة ربحها الشهري p بالدالة: $P = -8x^2 + 165x - 100$، حيث x سعر بيع القطعة الواحدة من المنتج. فأي مما يأتي يعد تقديرًا لأعلى سعر للقطعة الواحدة من المنتج بحيث لا تتعرض الشركة للخسارة؟

A 10 ريالات **B** 20 ريالًا **C** 30 ريالًا **D** 40 ريالًا

38) إذا علمت أن 75% من العدد 88 يساوي 60% من العدد x، فما قيمة x؟

A 100 **B** 101 **C** 108 **D** 110

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مما يأتي مربعًا كاملًا. ثم اكتبها على صورة مربع كامل: (مهارة سابقة)

39) $x^2 + 13x + c$ **40)** $x^2 + 2.4x + c$ **41)** $x^2 + \frac{4}{5}x + c$

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-3)

42) i^{26} **43)** $\sqrt{-16}$ **44)** $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$

3-2 مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

الهدف
كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلةالتربيعية: $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما -8 , 3
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

مجموع الجذرين $3 + (-8) = -5$ — -5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

حاصل ضرب الجذرين $3(-8) = -24$ — -24 هو الحد الثابت

ويمكن تعميم ذلك لأية معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية، فإذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 , r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{مجموع الجذرين}$$

$$= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{بالتبسيط}$$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{بضرب الجذرين}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{بالضرب}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \quad \text{الخاصية التوزيعية}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{بالتبسيط}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أية معادلة تربيعية علم جذراها.

مفهوم أساسي — **مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما**

أضف إلى مطويتك

إذا كان r_1 , r_2 هما جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

فإن $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$, $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

النشاط 1 **استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما**

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها -7 , 2.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة

بما أن $-14 = \frac{c}{a}$, $-5 = -\frac{b}{a}$ ، فإذا كانت $a = 1$ فإن: $b = -5$, $c = -14$.

وبالتالي المعادلة : $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 **استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما**

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}$, $\frac{3}{4}$.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين.

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين.

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة.

بما أن $-\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$, $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}$ ؛ فإذا كانت $a = 20$ فإن: $b = 33$, $c = -36$.

وبالتالي المعادلة : $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ **2)** $-7, \frac{2}{3}$ **3)** $\pm\frac{2}{5}$ **4)** $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ **6)** $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ **7)** $7 \pm 3i$ **8)** $\sqrt{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4 ، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$ ، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

3-3

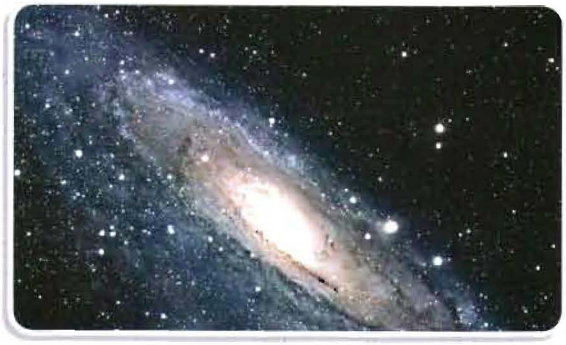
العمليات على كثيرات الحدود
Operations with Polynomials

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم القوى.

والآن:
- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسّطها.
- اجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:
التبسيط
simplifying
درجة كثيرة الحدود
Degree of a polynomial

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا. إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تقريبًا.

فكم الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} \text{m}$ تقريبًا؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها

تعني عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة. والأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير الضربي لعدد، و يلخص الجدول الآتي خصائص الأسس:

ملخص المفهوم — خصائص الأسس

أضف إلى مطويتك

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسّ السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ ، حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

تذكّر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر، وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة.

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد أنك قد بسّطتها على نحوٍ كامل.

مفهوم أساسي تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أسسًا سالبة.

إرشادات للدراسة

تحقق يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستعمال تعريف الأسس. فمثلًا:

$$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$$

$$= \frac{1}{q^5}$$

مثال 1 تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

العبارة الأصلية $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

تعريف الأسس السالبة $= 2\left(\frac{1}{a^2}\right)(3a^3b^2)\left(\frac{1}{c^2}\right)$

تعريف الأسس $= \left(\frac{2}{a \cdot a}\right)(3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b)\left(\frac{1}{c \cdot c}\right)$

بالقسمة على العوامل المشتركة $= \left(\frac{2}{\not{a} \cdot \not{a}}\right)(3 \cdot \not{a} \cdot \not{a} \cdot a \cdot b \cdot b)\left(\frac{1}{c \cdot c}\right)$

بالتبسيط $= \frac{6ab^2}{c^2}$

b) $\frac{q^2r^4}{q^7r^3}$

قسمة القوى $\frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3}$

بطرح الأسس $= q^{-5}r$

تعريف الأسس السالبة $= \frac{r}{q^5}$

c) $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

قوة ناتج القسمة $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3}$

قوة ناتج الضرب $= \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3}$

قوة القوة $= \frac{-8a^{12}}{b^6}$

تحقق من فهمك

1A) $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

1B) $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

1C) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

1D) $(-2x^3y^2)^5$

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوِّنة لها. فمثلاً درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

إرشادات للدراسة

الأس 1 تذكّر أن المتغير الذي لا يظهر عليه أسّ يكون أسّه 1.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

a) $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

تعدّ هذه العبارة كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيها هو وحيدة حد؛ ودرجة الحد الأول فيها تساوي $4 + 3 = 7$، ودرجة الحد الثاني 5، لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

b) $\sqrt{x} + x + 4$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن $\sqrt{x}$ ليست وحيدة حد؛

c) $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن كلًّا من: x^{-2}, x^{-3} ليست وحيدة حد:

حيث $x^{-2} = \frac{1}{x^2}, x^{-3} = \frac{1}{x^3}$، ووحيدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام .

تحقق من فهمك

2A) $\frac{x}{y} + 3x^2$ **2B)** $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

يمكنك تبسيط كثيرة الحدود تمامًا كما تبسّط وحيدة الحد، حيث تجري العمليات المطلوبة ثم تجمع الحدود المتشابهة.

إرشادات للدراسة

طرائق بديلة

لاحظ أن المثال 3a يستعمل طريقة الجمع الأفقي. على حين يستعمل المثال 3b طريقة الجمع الرأسي، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

مثال 3 تبسيط عبارات كثيرات الحدود

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

تخلّص من الأقواس وجمّع الحدود المتشابهة.

$(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$	العبارة الأصلية
$= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1$	بتوزيع العدد 1−
$= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1)$	بتجميع الحدود المتشابهة
$= 2x^2 - 8x + 7$	بجمع الحدود المتشابهة

b) $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

رتّب الحدود المتشابهة رأسيًّا، وأوجد ناتج الجمع.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 8 \\ (+)\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

تحقق من فهمك

3A) $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$ **3B)** $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

يمكن استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

مثال 4 التبسيط باستعمال خاصية التوزيع

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$

$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$ خاصية التوزيع

$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$ بالضرب في وحيدة الحد

تحقق من فهمك

أوجد ناتج:

(4A) $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

(4B) $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

يمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة كتابة عبارة كثيرة حدود

قيادة: تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يوميًّا، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h ، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها .

التعبير اللفظي: قاد السائق سيارته بسرعة 90 km/h في فترة ما قبل الاستراحة ، و 100 km/h في فترة ما بعد الاستراحة .

المتغير: ليكن x عدد ساعات القيادة قبل الاستراحة.

العبارة: $90x + 100(10 - x)$

$90x + 100(10 - x)$ العبارة الأصلية

$= 90x + 1000 - 100x$ خاصية التوزيع

$= 1000 - 10x$ بجمع الحدود المتشابهة

فتكون كثيرة الحدود هي $1000 - 10x$

تحقق من فهمك

5) استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18% ، والآخر في مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

الربط مع الحياة

تعقد معظم الدول دورات تدريبية متخصصة واختبارات مشددة لقائدي الشاحنات للتأكد من مستوى تأهيلهم لقيادتها، وتوعيتهم بكيفية التعامل مع الطرق السريعة، بما يقلل المخاطر ويؤمن حركة السير.

مثال 6 ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$

$(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$ العبارة الأصلية

$= n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$ خاصية التوزيع

$= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$ خاصية التوزيع

$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$ بضرب وحيدات الحد

$= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$ بجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي :

(6A) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

(6B) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$ **2)** $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$ **3)** $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$ **4)** $(6g^5h^{-4})^3$

مثال 2 حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5) $3x + 4y$ **6)** $\frac{1}{2}x^2 - 7y$ **7)** $x^2 + \sqrt{x}$ **8)** $\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$

الأمثلة 3 , 4 , 6 بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$ **10)** $(3a + 4b) + (6a - 6b)$

11) $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$ **12)** $(n - 9)(n + 7)$

مثال 5 **13) رياضة:** يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يوميًّا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال يحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الاثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

تمارين ومسائل

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

14) $(5x^3y^{-5})(4xy^3)$ **15)** $\frac{-y^3z^5}{y^2z^3}$ **16)** $\frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$ **17)** $(n^5)^4$

مثال 2 حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

18) $2x^2 - 3x + 5$ **19)** $a^3 - 11$ **20)** $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$ **21)** $\sqrt{m - 7}$

الأمثلة 3 , 4 , 6 بسّط كلًّا مما يأتي :

22) $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$ **23)** $4x(2x^2 + y)$

24) $(x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$ **25)** $(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$

مثال 5 **26) طلاء:** استأجر سلمان عاملين لطلاء منزله، فإذا تقاضى الأول 12 ريالاً عن كل ساعة عمل ، وتقاضى الثاني 11 ريالاً عن كل ساعة عمل، واحتاج المنزل إلى 15 ساعة عمل لطلائه، فاكتب كثيرة حدود تمثل تكلفة طلاء المنزل إذا عمل الأول مدة x ساعة، .

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

27) $\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4$ **28)** $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2}$ **29)** $(a^2b^3)(ab)^{-2}$

30) $(-3x^3y)^2(4xy^2)$ **31)** $\frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$ **32)** $\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

33) $x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$ **34)** $a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$

35) $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$ **36)** $(2x - 2y)^3$

37) فلك: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس.

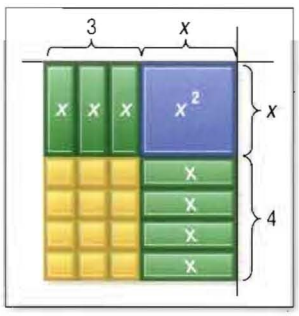
a) كم الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من المجرة المذكورة إلى الأرض؟

b) كم الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من الشمس إلى المريخ إذا كانت المسافة بينهما $2.28 \times 10^{11}\text{m}$؟

38) إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$، فما قيمة k؟

39) ماقيمة k التي تجعل $q^{41} = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟

40) تمثيلات متعددة: استعمل النموذج المجاور الذي يمثل حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.



a) هندسيًا: مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طوله في عرضه، أوجد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$ باستعمال النموذج.

b) جبريًا: استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.

c) لفظيًا: وضح كيف يمثّل النموذج كل حدّ في حاصل الضرب.

الربط مع الحياة

يصعب التنبؤ بالطقس على كوكب المريخ، نظرًا إلى بيئته المتقلبة. ويبدو أن فيه أعمق وادٍ، وأكبر بركان في المجموعة الشمسية.

مسائل مهارات التفكير العليا

41) برهان: وضح كيف يمكن برهنة خاصية الأسس السالبة باستعمال خاصيتي قسمة القوى والقوة الصفرية.

42) تحدٍّ: ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$؟

43) تبرير: فسّر لماذا يكون التعبير 0^{-2} غير معرَّف.

44) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث عبارات مختلفة مكافئة لـ x^{12}.

45) اكتب: وضح لماذا تُعد خصائص الأسس مهمة في الفلك، وضمّن توضيحك طريقة إيجاد الزمن اللازم لوصول الضوء من مصدرٍ ما إلى أحد الكواكب.

تدريب على اختبار

46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$

47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟

A x **B** $x + 1$ **C** $x - 1$ **D** $x - 2$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (مهارة سابقة)

48) $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx$

49) $x^2 + 2x + 6 + 3x$

50) $12y^2 + 9y + 8y + 6$

51) $2my + 7x + 7m + 2xy$

52) $8ax - 6x - 12a + 9$

53) $10x^2 - 14xy - 15x + 21y$

3-4 قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

فيما سبق:
درست قسمة وحيدات الحد.

والآن:
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:
القسمة التركيبية
Synthetic division

obeikaneducation.com

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس السابق قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملًا المهارات نفسها .

مثال 1 قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط العبارة : $\dfrac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$ بقسمة كل حد في البسط على المقام

$$= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1}$$ بإجراء القسمة

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$ $y^{1-1} = y^0 = 1$

تحقق من فهمك بسّط كل مقدار فيما يأتي :

(1A) $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$ **(1B)** $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2 خوارزمية القسمة

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{)\, x^2 + 3x - 40} \\ (-)\ x^2 - 5x \\ \hline 8x - 40 \\ (-)\ 8x - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

بضرب المقسوم عليه في x ، لأن $\frac{x^2}{x} = x$

بالطرح

بضرب المقسوم عليه في 8 ، لأن $\frac{8x}{x} = 8$

بالطرح

ناتج القسمة هو $x + 8$، والباقي 0.

تحقق من فهمك استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي :

(2A) $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$ **(2B)** $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلًا عند إيجاد 3 ÷ 11 يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3+\frac{2}{3}$. ويمكن كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3-a}$

B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3-a}$

D $-a - 10 - \frac{19}{3-a}$

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس 1−، فهذه إذن، مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r} -a - 10 \\ -a + 3 \overline{)\, a^2 + 7a - 11} \\ \underline{(-)\ a^2 - 3a} \\ 10a - 11 \\ \underline{(-)\ 10a - 30} \\ 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $a - 3$ على الصورة $-a + 3$.

$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$

$7a - (-3a) = 10a$

$-10(-a + 3) = 10a - 30$

$-11 - (-30) = 19$

ناتج القسمة هو $-a - 10$، والباقي 19 .

لذا، فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3-a}$، وعليه، فتكون الإجابة هي البديل C.

تحقق من فهمك

3) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$؟

F $-r - 6 + \frac{13}{1-r}$

G $r + 6$

H $r - 6 + \frac{13}{1-r}$

J $r + 6 - \frac{13}{1-r}$

القسمة التركيبية : **القسمة التركيبية** هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد . فمثلًا عند قسمة $2x^3 - 13x^2 + 26x - 24$ على $x - 4$ باستعمال القسمة الطويلة، قارن بين معاملات الحدود في هذه القسمة وما سيأتي في المثال4.

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا.

فمثلًا إذا كان المقسوم $2x^3 - 4x^2 + 6$ فاكتبه على الصورة $2x^3 - 4x^2 + ox + 6$.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 6 \\ x - 4 \overline{)\, 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24} \\ \underline{(-)\ 2x^3 - 8x^2} \\ -5x^2 + 26x - 24 \\ \underline{(-)\ -5x^2 + 20x} \\ 6x - 24 \\ \underline{(-)\ 6x - 24} \\ 0 \end{array}$$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القسمة التركيبية

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مثال 4

القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. واكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

4	2	−13	26	−24
	↓			
	2			

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r:
$2(4) = 8$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

4	2	−13	26	−24
		8		
	2↗			

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:
$-13 + 8 = -5$.

4	2	−13	26	−24
		8		
	2	−5		

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو 5− في الثابت r: $-5 \times 4 = -20$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:
$26+(-20)=6$. اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r:
$6(4) = 24$، واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي، ثم اجمع: $-24 + 24 = 0$.

4	2	−13	26	−24
		8	−20	24
	2	−5↗	6↗	0

تحقق: اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه، فيكون الناتج هو المقسوم.

$$2x^2 - 5x + 6$$
$$(\times) \quad x - 4$$
$$-8x^2 + 20x - 24$$
$$2x^3 - 5x^2 + 6x$$
$$2x^3 - 13x^2 + 26x - 24$$

ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$، والباقي 0.

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن تجمع الحدود عند إجراء القسمة التركيبية.

تحقق من فهمك

استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:

(4A) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

(4B) $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

(4C) $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

(4D) $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

إعادة كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1 وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام.

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًّا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$x - r = x + \frac{1}{3}, r = -\frac{1}{3}$. $\rightarrow -\frac{1}{3}$

1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

وعليه، فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$. وأخيرًا بسّط الكسر.

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

بإعادة كتابة الكسر على صورة عبارة قسمة.

$$= \frac{2}{3} \div \frac{3x + 1}{3}$$

$x + \frac{1}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3x + 1}{3}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3x + 1}$$

بالضرب في مقلوب المقسوم عليه.

$$= \frac{2}{3x + 1}$$

بالتبسيط.

وعليه، يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$.

تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملاً القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ 3x + 1 \overline{)\,3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\ (-)\,3x^4 + x^3 \\ \hline -6x^3 + x^2 + 7x \\ (-)\,-6x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 7x \\ (-)\,3x^2 + x \\ \hline 6x \\ (-)\,6x + 2 \\ \hline -2 \end{array}$$

وعليه، يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$. ✓

تحقق من فهمك

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

(5A) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

(5B) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

(5C) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

(5D) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

تأكد

الأمثلة 1, 2, 4 بسّط كل عبارة فيما يأتي :

(1 $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$

(2 $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$

(3 $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

(4 $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$

(5 $(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$

(6 $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$

مثال 3 **(7 اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟

A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ **B** $-x - 7$ **C** $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ **D** $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي :

(8 $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$

(9 $(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$

(10 $\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8}$

(11 $\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسّط كل عبارة فيما يأتي :

(12 $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$

(13 $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$

(14 $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$

(15 $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$

(16 $\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$

(17 $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$

(18 مخبز: يقدر عدد أرغفة الخبز التي ينتجها مخبز في اليوم بالعبارة: $-w^2 + 16w + 1000$ ، حيث w عدد العاملين في المخبز. اقسم العبارة المعطاة على w لتجد معدل عدد الأرغفة التي ينتجها العامل الواحد.

الأمثلة 2,4,5 بسّط كلًّا مما يأتي :

(19 $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$

(20 $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$

(21 $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

(22 $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4)$

(23 $\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$

(24 $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$

(25 $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$

(26 $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1}$

(27 هندسة: صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x. فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرضه، وما طوله؟

(28 فيزياء: يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار I، والقدرة p بالمعادلة $V = \frac{P}{I}$. فإذا عُبّر عن القدرة بالدالة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ ، وشدة التيار بالمعادلة $I = t + 4$، فاكتب عبارةً تمثل فرق الجهد V.

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(29 $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

(30 $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

(31 $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1}$

(32 $\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4}$

(33 $\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3}$

(34 $\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z + 2}$

35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

a) أجر عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2 + 100}$.

b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أنفق على الدعاية والإعلان 6000ريال؟

36) تمثيلات متعددة: افرض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$، وطوله $2x + 1$.

a) حسيًا: مثّل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية، ثم استعملها لإيجاد عرض المستطيل.

b) رمزيًا: اكتب عبارةً جبريّةً تمثّل إيجاد عرض المستطيل .

c) عدديًا: حل المسألة جبريًا باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة، وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟

الربط مع الحياة

شركات الإعلان هي شركات تقوم بالأنشطة الإعلانية نيابة عن الشركات في وسائل الإعلان المختلفة، فتقوم بتصميم الإعلانات، والشعارات، والعلامات المميزة.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: قسم كل من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة إن الباقي 26، وقال جمال إن الباقي 100−. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

38) تحد: إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟

39) تبرير: راجع أحد أسئلة القسمة في هذا الدرس، وبيّن العلاقة بين درجة كل من: المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة.

40) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة تتضمن قسمة كثيرتي حدود بحيث يكون الباقي 3 .

41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسر إجابتك.

$5b + 11c - 9ad^2$	$x + 5$	$\frac{5}{x^2}$	$3xy + 6x^2$

42) اكتب: استعن بالمعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس واكتب تعليمات متسلسلة لعمل غلاف لكتاب الرياضيات باستعمال قسمة كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

43) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $-(4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

A $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$

B $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$

44) أي كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$

B $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي : (الدرس 3-3)

45) $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ **46)** $(xy)^2(2xy^2z)^3$ **47)** $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$

إذا كان $f(x) = 4x + 3, h(x) = -2x^2 - 2x + 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

48) $f(-6)$ **49)** $h(3)$ **50)** $f(c)$ **51)** $h(2b + 1)$

3-5 دوال كثيرات الحدود
Polynomial Functions

فيما سبق:
درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية.

والآن:
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أتعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.

المفردات:
كثيرة الحدود بمتغير واحد
polynomial in one variable
المعامل الرئيس
leading coefficient
دالة كثيرة الحدود
polynomial function
دالة القوة
power function
دالة من الدرجة الرابعة
quartic function
دالة من الدرجة الخامسة
quintic function
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يمكن تمثيل حجم الهواء في رئة الإنسان خلال دورة تنفس مدتها 5 دقائق بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

دوال كثيرات الحدود: **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث a_n، a_{n-1}، $\ldots$، a_2، a_1، a_0 أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	a_n

مثال 1 الدرجات والمعاملات الرئيسة

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

a) $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 5، لذا درجتها **5** ، والمعامل الرئيس8.

b) $12x^2 - 3xy + 8x$

هذه ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما y, x .

c) $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 8، لذا درجتها 8، والمعامل الرئيس -4.

تحقق من فهمك

1A) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ **1B)** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **1C)** $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود ، فمثلًا $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم 6 لترات تقريبًا.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود

التنفس: ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتان.

بتعويض العدد 2 في الدالة نجد $v(2)$، وهو حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتين.

$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$	الدالة الأصلية
$v(2) = -0.037(2)^3 + 0.152(2)^2 + 0.173(2)$	بتعويض 2 بدلًا من t
$= -0.296 + 0.608 + 0.346$	بالتبسيط
$= 0.658$ L	بالجمع

تحقق من فهمك

2) أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ.

يمكنك إيجاد قيم الدوال عند متغيرات وعبارات جبرية.

مثال 3 إيجاد قيم الدالة عند متغيرات

إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فأوجد: $f(3c - 4) - 5f(c)$.

لإيجاد قيمة $f(3c - 4)$، عوض $3c - 4$ بدلًا من x في الدالة $f(x)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$f(3c - 4) = (3c - 4)^2 + 2(3c - 4) - 3$	بتعويض $3c - 4$ بدلًا من x
$= 9c^2 - 24c + 16 + 6c - 8 - 3$	بالضرب
$= 9c^2 - 18c + 5$	بالتبسيط

لإيجاد قيمة $5f(c)$، عوض c بدلًا من x في الدالة $f(x)$، واضرب الناتج في العدد 5.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$5f(c) = 5(c^2 + 2c - 3)$	بتعويض c بدلًا من x
$= 5c^2 + 10c - 15$	خاصية التوزيع

والآن، جد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$.

$$f(3c - 4) - 5f(c) = (9c^2 - 18c + 5) - (5c^2 + 10c - 15)$$

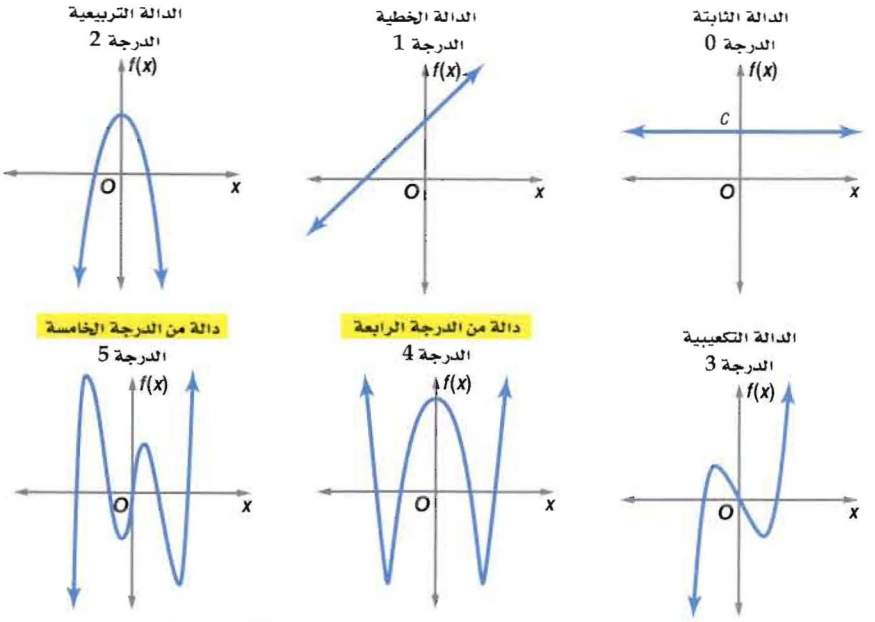
$= 9c^2 - 18c + 5 - 5c^2 - 10c + 15$	خاصية التوزيع
$= 4c^2 - 28c + 20$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.

3B) إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$.

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

مراجعة المفردات

المالانهاية غير محدد أو لاحدود له.

مفهوم أساسي

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى مطويتك

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: موجب.

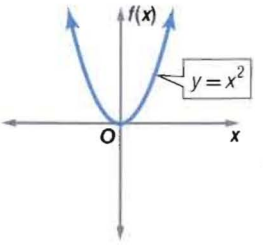
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى.

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$



الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: موجب.

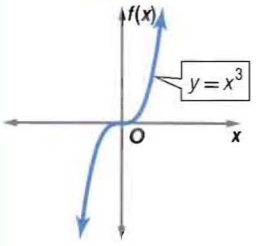
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية.

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$



الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: سالب

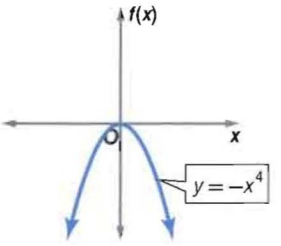
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى.

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$



الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: سالب

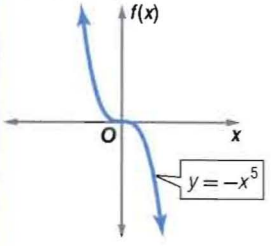
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$



يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكّر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار. ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

الجذر المكرر مرتين

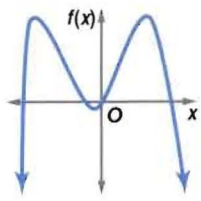
عندما يمس التمثيل البياني المحور x يكون للدالة جذران متساويان.

مفهوم أساسي أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

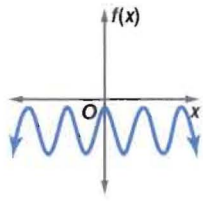
أضف إلى مطويتك

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة

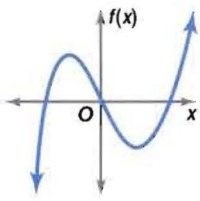


لها 4 أصفار حقيقية

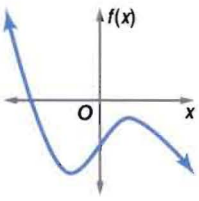


ليس لها أصفار حقيقية

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة



لها 3 أصفار حقيقية



لها صفر واحد حقيقي

مراجعة المفردات

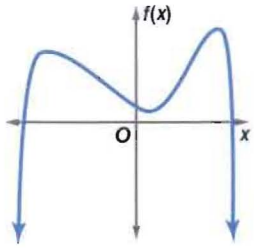
صفر الدالة هو الإحداثي X لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور X.

مثال 4 التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(a)

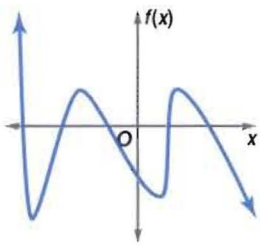


$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في نقطتين، لذا، فللدالة صفران حقيقيان.

(b)



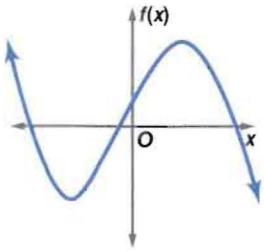
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

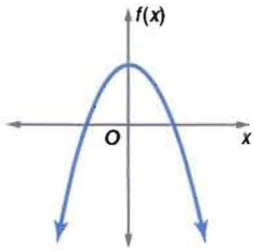
بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في 5 نقاط، لذا، فللدالة 5 أصفار حقيقية.

تحقق من فهمك

(4A)



(4B)



تأكد

مثال 1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

مثال 2 أوجد $w(5), w(-4)$ لكل من الدالتين الآتيتين:

5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2,\ d(x) = 3x^2 + 6x - 10$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7) $c(y^3)$

8) $-4[d(3z)]$

9) $6c(4a) + 2d(3a - 5)$

10) $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

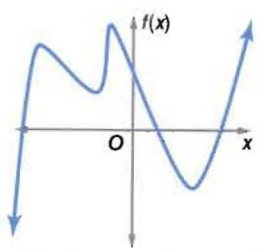
مثال 4 أجب عن الفروع **a – c** لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

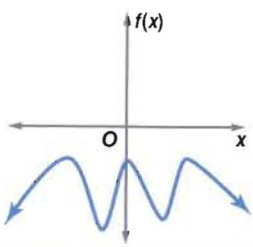
b) حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

11)



12)



تمارين ومسائل

مثال 1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

15) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$

16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

17) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$

18) $(5 - 2y)(4 + 3y)$

19) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$

20) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

مثال 2 أوجد $p(3)$, $p(-6)$ لكل دالة مما يأتي:

21) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

22) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$

23) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

24) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3\ ,\ d(x) = -x^3 + x + 1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

25) $c(3a)$

26) $5d(2a)$

27) $c(b^2)$

28) $d(4a^2)$

29) $d(4y - 3)$

30) $c(y^2 - 1)$

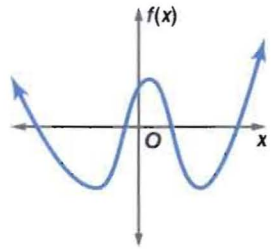
مثال 4 أجب عن الفروع من a–c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

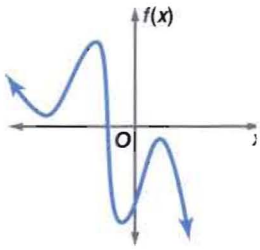
b) حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

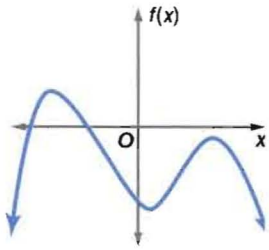
(31



(32



(33



(34 فيزياء: تعطى الطاقة الحركية KE بالجول لجسم متحرك كتلته m kg بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$، حيث تمثل v سرعة الجسم بالأمتار **لكل** ثانية. أوجد الطاقة الحركية لعربة كتلتها 171 kg تسير بسرعة $11m/s$.

أوجد $p(8), p(-2)$ لكل دالة مما يأتي:

(35 $p(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

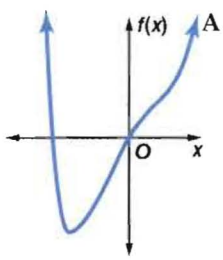
(36 $p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

(37 $p(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

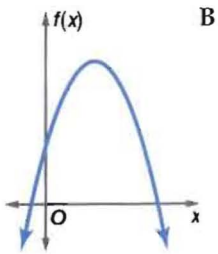
(38 $p(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

استعمل الدرجة وسلوك طرفي التمثيل البياني لتقابل بين كل دالة وتمثيلها البياني مما يأتي:

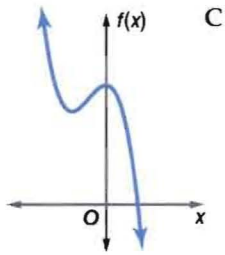
A



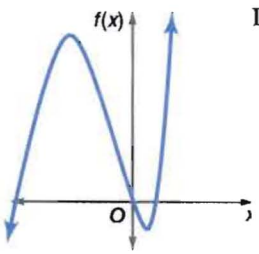
B



C



D



(39 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

(40 $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

(41 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

(42 $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$

إذا كانت $c(x) = x^3 - 2x$, $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(43 $3c(a - 4) + 3d(a + 5)$

(44 $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

(45 $5c(a^2) - 8d(6 - 3a)$

(46 $-7d(a^3) + 6c(a^4 + 1)$

الربط مع الحياة

يعد الشباب زبائن مهمين لمحال الملابس، ولذا يوفر تجار الملابس الأنواع التي يفضل الشباب شراءها.

(47 ملابس: تُمثل أرباح مصنع للملابس بدالة كثيرة الحدود $p(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$، حيث x عدد قطع الملابس المبيعة بالألوف، و$p(x)$ ربح المصنع بألوف الريالات.

a) استعمل جدول قيم لتمثيل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد أصفار الدالة.

c) بيّن أي قيمتين يجب أن يبيع المصنع من قطع الملابس ليحقق ربحًا.

d) وضّح لماذا أُخذ صفران فقط بعين الاعتبار في الفرع c.

48) **تمثيلات متعددة:** افرض أن $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$.

a) تحليليًا: حدد المقطع x والمقطع y والجذور، ودرجة الدالة $g(x)$، وصف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

b) جبريًا: اكتب الدالة بالصيغة القياسية.

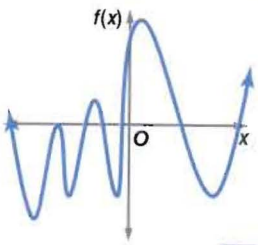
c) جدوليًا: أنشئ جدولًا لقيم الدالة.

d) بيانيًا: مثل الدالة بيانيًا بتعيين نقاط، والتوصيل بينها بمنحنى أملس.

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يأتي:

49) $f(x) = -5x^4 + 3x^2$ **50)** $g(x) = 2x^5 + 6x^4$ **51)** $h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

مسائل مهارات التفكير العليا



52) **اكتشف الخطأ:** حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

ماجد
يوجد 8 أصفار، لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.

بدر
يوجد 7 أصفار، لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

53) **تحد:** إذا كانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

54) **مسألة مفتوحة:** مثّل بيانيًا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدها مكرر مرتين.

55) **اكتب:** صف المقصود بسلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود، وكيف يتم تحديده؟

تدريب على اختبار

56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

A) -11 **B)** 1 **C)** -1 **D)** 11

57) إذا كان، $i = \sqrt{-1}$ فإن $5i(7i)$ يساوي :

A) 70 **B)** 35 **C)** -35 **D)** -70

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-3)

58) $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$ **59)** $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$ **60)** $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

حدد إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها : (الدرس 3-3)

61) $8x^2 + 5x^4 - 6x + 4$ **62)** $9x^4 + 12x^6 - 16$ **63)** $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$

حل كلًّا من المعادلات الآتية مستعملًا القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 2-3)

64) $x^2 - x - 3 = 0$ **65)** $x + x^2 + 1 = 0$ **66)** $x^2 - 13x + 12 = 0$

بسط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$

2) $(15-3i)-(4-12i)$

3) i^{37}

4) $\frac{3-i}{2+5i}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

5) $x^2-8x-9=0$

6) $-4.8x^2+1.6x+24=0$

بسط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

7) $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$

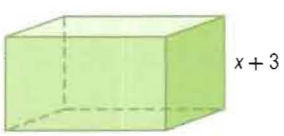
8) $4t(3rt-r)$

9) $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3}$

10) $\left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2$

11) $(4m^2-6m+5)-(6m^2+3m-1)$

12) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه هو $6x^3+19x^2+2x-3$. فأي كثيرة حدود فيما يأتي تمثل مساحة قاعدته؟



A $6x^4+37x^3+59x^2+3x-9$

B $6x^2+x+1$

C $6x^2+x-1$

D $6x+1$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية:

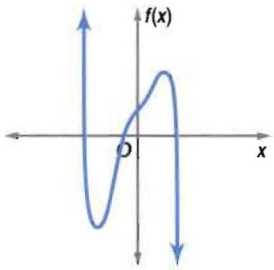
13) $(4r^3-8r^2-13r+20)\div(2r-5)$

14) $\frac{3x^3-16x^2+9x-24}{x-5}$

15) $(4x^3-6x^2+6x-3)\div(2x-1)$

16) $(x^4+3x^3-2x^2-4x+10)\div(x+3)$

17) صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



18) **اختيار من متعدد:** إذا كان $p(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-5x$، فما قيمة $p(-3)$؟

A 0

B 11

C 30

D 36

19) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $f(x)=x^2+3x, h(x)=2x^2-3x+5$، فإن $3f(a-4)-2h(a)$.

A $-a^2+15a-74$

B $-a^2-2a-1$

C a^2+9a-2

D $-a^2-9a+2$

20) **بندول:** يُعطى طول بندول بالصيغة $L(t)=\frac{8t^2}{\pi^2}$؛ حيث t الزمن الدوري له بالثواني، L طول البندول بالأقدام. أوجد طول بندول زمنه الدوري 4 ثوانٍ.

21) **طاقة:** يعبر عن القوة التقريبية التي تولدها طاحونة تعمل بطاقة الرياح بالدالة: $P(s)=\frac{s^3}{1000}$، حيث s سرعة الرياح بالكيلومتر لكل ساعة. فكم وحدة قوة تولدها الطاحونة عندما تكون سرعة الرياح 18km/h؟

3-6

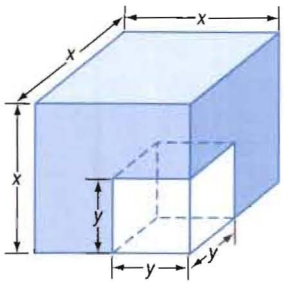
حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن:
- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

المفردات
كثيرة حدود أولية
prime polynomial
الصورة التربيعية
quadratic form

obeikaneducation.com



لماذا؟

قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل جانبًا، وأُعطي حجم الجزء المتبقي، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير.
لاحظ أنه يمكن إيجاده بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية $x^3 - y^3$.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكن تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكن تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها **كثيرة حدود أولية**.

مثال 1 مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

a) $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر.

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$ $(2x)^3 = 8x^3; (3y)^3 = 27y^3$

$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$ مجموع مكعبين

$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ بالتبسيط.

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ بكتابة العامل المشترك الأكبر

b) $9y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل لكن الحد الثاني ليس كذلك، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية، أو بإخراج العامل المشترك الأكبر. لذا فهي كثيرة حدود أولية.

تحقق من فهمك

1A) $5y^4 - 320yz^3$

1B) $-54w^4 - 250wz^3$

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال 2 التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

العبارة الأصلية	$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$
بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر	$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$
بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع	$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$
خاصية التوزيع	$= (4x + 3y)(2a + b + c)$

b $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

العبارة الأصلية	$20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$
بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر	$= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz)$
بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع	$= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$
خاصية التوزيع	$= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تحقق من فهمك

2A $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

2B $13ax + 18bz - 15by - 14az$

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر. أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكن تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

مثال 3 التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقًا بين مربعين أو فرقًا بين مكعبين، وفي مثل هذه الحالة يجب أن يتم التحليل أولًا على اعتبار أنها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار أنها فرق بين مكعبين تسهيلًا للتحليل.

$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ الفرق بين مربعين

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين

b) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود ، إذن **حلل** أولًا بتجميع الحدود.

$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$ بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$ خاصية التوزيع

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$ فرق بين مكعبين

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$ ثلاثية حدود المربع الكامل

إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

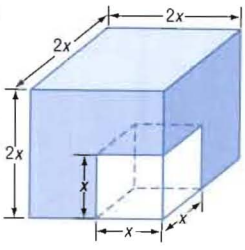
تحقق من فهمك

3A) $a^6 + b^6$

3B) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال 4 من واقع الحياة حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل



هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي $7000cm^3$، فما بُعدا المكعبين؟

بما أن طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن أن يعبر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x، وطول ضلع المكعب الكبير بـ $2x$.

لاحظ أن حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحًا منه حجم المكعب الصغير.

$(2x)^3 - x^3 = 7000$ حجم الجزء المتبقي

$8x^3 - x^3 = 7000$ $(2x)^3 = 8x^3$

$7x^3 = 7000$ بالطرح.

$x^3 = 1000$ بالقسمة.

$x^3 - 1000 = 0$ بطرح 1000 من كلا الطرفين.

$(x - 10)(x^2 + 10x + 100) = 0$ فرق بين مكعبين

$x - 10 = 0$ أو $x^2 + 10x + 100 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 10$ $x = -5 \pm 5i\sqrt{3}$

وبما أن العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد. فإن طولي ضلعي المكعبين هما 10cm, 20cm.

تحقق من فهمك

4) إذا كان طول ضلع المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي $3250cm^3$، فأوجد بُعدي المكعبين.

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكن كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية ، وتسمى كثيرة حدود على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي — الصورة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود التي تتضمن المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية
لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

مثال 5 — الصورة التربيعية

اكتب العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

a) $150n^8 + 40n^4 - 15$

$150n^8 + 40n^4 - 15 = 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$ $(5n^4)^2 = 25n^8$

b) $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية لأن $y^8 \neq (y^3)^2$.

تحقق من فهمك

5A) $x^4 + 5x + 6$

5B) $8x^4 + 12x^2 + 18$

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 6 — حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$	$2(3x^2)^2 = 18x^4$
$2u^2 - 7u + 3 = 0$	بفرض أن $u = 3x^2$.
$(2u - 1)(u - 3) = 0$	بالتحليل إلى العوامل.
$u = \frac{1}{2}$ أو $u = 3$	خاصية الضرب الصفري
$3x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad 3x^2 = 3$	بتعويض $3x^2$ بدلًا من u.
$x^2 = \frac{1}{6}$ $\quad x^2 = 1$	بالقسمة على 3.
$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\quad x = \pm1$	بإيجاد الجذر التربيعي.

حلول المعادلة هي: $-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 1, -1$.

تحقق من فهمك

6A) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

6B) $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

تأكد

الأمثلة 1-3 حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1) $3ax + 2ay - az + 3bx$

2) $16g^3 + 2h^3$

3) $12qw^3 - 12q^4$

4) $a^6x^2 - b^6x^2$

5) $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

6) $8c^3 - 125d^3$

مثال 4 حل كل معادلة مما يأتي:

7) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$

8) $x^3 - 64 = 0$

9) $x^3 + 27 = 0$

10) $x^4 - 33x^2 + 200 = 0$

11) إنشاءات: صنع أنس ممرًا خشبيًّا عرضه $x$ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30ft، ومساحتها مع الممر 2000ft^2، فما عرض الممر الخشبي؟

مثال 5 اكتب كلًّا من العبارتين الآتيين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

12) $4x^6 - 2x^3 + 8$

13) $25y^6 - 5y^2 + 20$

مثال 6 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

14) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

15) $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

16) $8c^3 - 27d^3$

17) $64x^4 + xy^3$

18) $a^8 - a^2b^6$

19) $x^6y^3 + y^9$

20) $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$

21) $18x^6 + 5y^6$

22) $8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$

23) $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$

مثال 4 حلّ كل معادلة مما يأتي:

24) $x^4 + x^2 - 90 = 0$

25) $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$

26) $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$

27) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$

28) $x^3 + 216 = 0$

29) $64x^3 + 1 = 0$

مثال 5 اكتب كل عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

30) $x^4 + 12x^2 - 8$

31) $-15x^4 + 18x^2 - 4$

32) $8x^6 + 6x^3 + 7$

33) $5x^6 - 2x^2 + 8$

34) $9x^8 - 21x^4 + 12$

35) $16x^{10} + 2x^5 + 6$

مثال 6 حلّ كل معادلة مما يأتي:

36) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

37) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

38) $4x^4 - 14x^2 + 12 = 0$

39) $9x^4 - 27x^2 + 20 = 0$

40) $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

41) $24x^4 + 14x^2 - 3 = 0$

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

42) $x^4 - 625$ **43)** $x^6 - 64$ **44)** $x^5 - 16x$ **45)** $8x^5y^2 - 27x^2y^5$

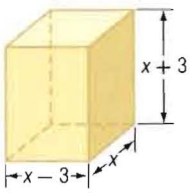
46) $15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz$

47) $6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2$

48) $6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x$

49) $20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2$

50) **هندسة:** إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي 440cm^3. فأوجد كلًّا من قيمة x، وطول المجسم، وعرضه وارتفاعه.



حلّ كل معادلة مما يأتي:

51) $8x^4 + 10x^2 - 3 = 0$ **52)** $6x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

53) $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$ **54)** $18x^4 + 43x^2 - 5 = 0$

55) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$ **56)** $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

57) $2x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ **58)** $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$

59) $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$ **60)** $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

61) **هندسة:** منشور متوازي مستطيلات أبعاده $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه $40x$ وحدة مكعبة.

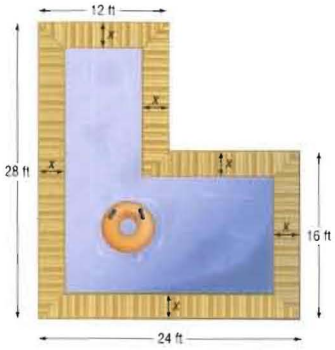
a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم المنشور.

b) حل المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل.

c) هل هناك قيم غير مقبولة للمتغير x؟ وضح إجابتك.

d) ما أبعاد المنشور؟

62) **تصميم:** يريد سليمان أن يبني بركة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.



a) إذا كانت مساحة البركة فقط 336ft^2، فما قيمة x؟

b) إذا أصبحت قيمة x مثليها وذلك بتقليل مساحة البركة، فما المساحة الجديدة للبركة؟

c) إذا نصفت قيمة x بزيادة مساحة البركة، فما مساحة البركة فقط عندئذٍ؟

63) **أحياء:** قدّر مأمون عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة: $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$، حيث t الزمن بالساعات، $P(t)$ عدد الفيروسات. فإذا أراد مأمون أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

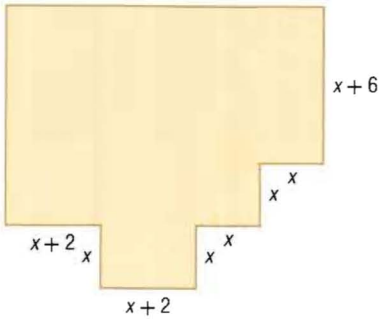
a) فأوجد قيمة t باستعمال التحليل إلى العوامل.

b) كيف أجريت عملية التحليل إلى العوامل؟

c) ماقيم t المقبولة؟ وما القيم غير المقبولة؟ وضح إجابتك.

الربط مع الحياة

يتراوح عدد الفيروسات في دم المصاب بالالتهاب الكبدي الفيروسي المزمن بين 50 ألف وَ 50 مليون فيروس في الملمتر الواحد.



64) تصميم المباني: يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية.

a) اكتب دالة بدلالة المتغير x تمثل مساحة الشقة.

b) إذا كانت مساحة الشقة 1366ft^2، فما قيمة x؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي تحليلًا تامًّا. وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

65) $x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64$ **66)** $y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1$

67) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

68) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 32ft و 40ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه.

a) ارسم شكلًا يمثل الموقف.

b) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل المساحة الجديدة، وحلها بالتحليل إلى العوامل.

c) مثّل الدالة بيانيًّا. **d)** ما الحل غير المقبول؟ وضّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

69) تحدٍّ: حلّل المقدار $36x^{2n} + 12x^n + 1$ إلى عوامله.

70) تبرير: أعط مثالًا مضادًّا للعبارة: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

71) مسألة مفتوحة: إذا كانت الصورة التكعيبية لمعادلة هي: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$، فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكعيبية.

72) اكتب: وضح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانيًّا على تحليلها.

تدريب على اختبار

73) إجابة قصيرة وضعت بطاقات تحمل الأعداد من 1 إلى 6 في كيس، وسُحبت عشوائيًّا لتحديد أي المهام الست سينفذها كل شخص من 6 أشخاص. فما احتمال ان تكون البطاقتان 5، و6 آخر البطاقات المسحوبة؟

74) إذا كان $k - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ فما قيمة k؟

A $\frac{1}{60}$ **B** $\frac{1}{20}$

C $\frac{1}{15}$ **D** $\frac{13}{60}$

مراجعة تراكمية

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 5-3)

75) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$ **76)** $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9$ **77)** $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$

78) كهرباء: دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصولين على التوالي؛ معاوقة الأول $4j + 3$ أوم، ومعاوقة الثاني $6j - 2$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 1-3)

اقسم كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-3)

79) $(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4)$ **80)** $(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1)$ **81)** $(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2)$

3-6 حل متباينات كثيرات الحدود

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

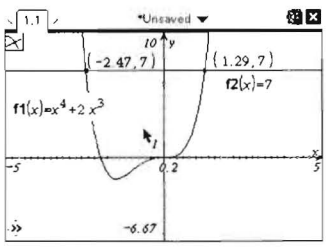
نشاط

حل المتباينة $x^4 + 2x^3 \leq 7$

الطريقة 1 : تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانيًّا بشكل منفصل .

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on ، واختر 1: New Doc ثم اختر 2:Add Graphs ، واكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f1(x) =$، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح tab ، لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
  ملاحظة: تدريج الآلة المعتاد على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f2(x) = 7$ قم بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 4: Window / Zoom ثم اختر منها 1: Window Settings لتمدد التدريج المناسب للمتغير y ليتضمن العدد 7. فمثلًا يمكن اختيار قيمة 10 = YMax: .
- حدد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح menu ومنها اختر 7: Points & Lines ، ثم اختر منها 3: Intersection Point(s)، وقم بالضغط على كلا التمثيلين لتظهر نقاط التقاطع، فيكون الحل هو :
  $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريبًا.

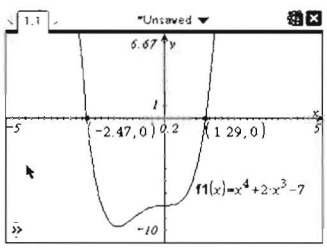


الطريقة 2 : تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانيًّا.

$$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$$

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1: New Doc ثم اختر 2:Add Graphs .
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
  ملاحظة: اختر التدريج المناسب.
- حدد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح menu ، ومنها اختر 6: Analyze Graph ، ثم اختر منها 1: Zero ، وقم بالضغط على التمثيل البياني والمحور x عند نقطتي تقاطع التمثيلين مع المحور x ، فتظهر إحداثياتهما، فيكون الحل هو : $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريبًا.



تمارين:

حل كل متباينة مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

1) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \geq -9$
2) $x^3 - 9x^2 + 27x \leq 20$
3) $x^3 + 1 \geq 4x^2$
4) $x^6 - 15 \leq 5x^4 - x^2$
5) $\frac{1}{2}x^5 \geq \frac{1}{5}x^2 - 2$
6) $x^8 < -x^7 + 3$
7) $x^4 - 15x^2 > -24$
8) $x^3 - 6x^2 + 4x < -6$
9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$

3-7 نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:
درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.

والآن:
- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أحدّد إذا كان ثنائي حد عاملًا من عوامل كثيرة حدود باستعمال التعويض التركيبي أم لا.

المفردات:
نظرية الباقي
Remainder Theorm
التعويض التركيبي
synthetic substitution
نظرية العوامل
Factor Theorm

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

إذا استعملنا الدالة : $S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، لتقدير عدد الطلاب في جامعة، حيث x عدد السنوات منذ العام 1413هـ، وتمثل $S(x)$ عدد الطلاب بالمئات.

فيمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير عدد الطلاب في الجامعة عام 1433هـ بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي كطريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

التعويض التركيبي: يمكن استعمال التعويض التركيبي لإيجاد قيمة دالة عند قيم معينة.

افرض أن دالة كثيرة الحدود هي: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$

فاقسم الدالة على $x - 3$.

الطريقة 1 القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x - 3 \overline{)\,-3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\ -4x + 4 \\ \underline{-4x + 12} \\ -8 \end{array}$$

الطريقة 2 القسمة التركيبية

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & -3 & 5 & 4 \\ & & -9 & -12 \\ \hline & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ بتعويض العدد 3 بدلاً من x .

$= -27 + 15 + 4$ بالضرب .

$= -8$ بالتبسيط .

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضح **نظرية الباقي**.

مفهوم أساسي — **نظرية الباقي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

تُسمى عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة عند عدد، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 1 التعويض التركيبي

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$، فأوجد $f(4)$.

الطريقة 1: **التعويض التركيبي**

بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما أنه لايوجد حد يحتوي على x^2، لذا ضع **0** للمحافظة على مكان عامل الحد x^2.

بما أن باقي القسمة يساوي 662 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

الطريقة 2: **التعويض المباشر**

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ الدالة الأصلية

$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$ بتعويض العدد **4** بدلاً من x.

$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$ بالتبسيط.

وعليه، فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $f(-1)$.

يمكن استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.

مثال 2 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة

جامعات: **ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما العدد المتوقع لطلاب الجامعة عام 1433؟**

أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملاً القسمة التركيبية.

20	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	−2.4	32.6	653.8
	0.02	−0.12	1.63	32.69	731.34

العدد المتوقع لطلاب الجامعة عام 1433هـ هو 73134 طالبًا تقريبًا.

الربط مع الحياة

بلغ عدد الطلبة المسجلين في الجامعات الحكومية عام 1430هـ في المملكة العربية السعودية 628081 طالبًا وطالبة .

تحقق من فهمك

2) يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام 1420، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المحافظة عام 1432.

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائي حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي — **نظرية العوامل**

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكن استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة، ويمكن استعمالها أيضًا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود .

مثال 3 استعمال نظرية العوامل

حدّد إذا كان $x - 5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

يكون ثنائي الحد $x - 5$ عاملاً لكثيرة الحدود إذا كان العدد 5 صفرًا للدالة المرتبطة بكثيرة الحدود.

استعمل نظرية العوامل والقسمة التركيبية.

5	1	-7	7	15
		5	-10	-15
	1	-2	-3	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود، لذا، يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ بتحليل ثلاثية الحدود

وعليه، فإن $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$

يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.

تحقق من فهمك

3) حدد إذا كان $x - 2$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

تأكد

مثال 1 أوجد $f(-2)$, $f(4)$ لكل من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

مثال 2

3) جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة، $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1438؟

مثال 3 في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى :

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

6) $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$

7) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$

تمارين ومسائل

مثال 1 أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

8) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

9) $f(x) = x^2 - 8x + 6$

10) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$

11) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

12) $f(x) = x^3 - 5x + 2$

13) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

14) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$

15) $f(x) = x^4 - 6x - 8$

مثال 2

16) وقود: يقدر استهلاك سيارة للوقود (بالميل لكل جالون) وفقًا للدالة $f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$، حيث x سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوقود إذا سارت بالسرعات الآتية 40mi/h, 50mi/h, 60mi/h.

مثال 3 في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى :

17) $x^3 - 3x + 2; x + 2$

18) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$

20) $x^3 - x^2 - 5x - 3; x - 3$

21) $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42; x - 1$

22) $2x^3 + 7x^2 - 53x - 28; x - 4$

23) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3; x - 1$

24) $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 2$

25) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8; 2x + 1$

26) $16x^5 - 32x^4 - 81x + 162; 2x - 3$

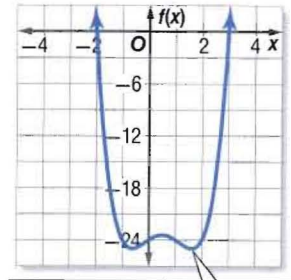
27) زوارق: تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$، حيث t الزمن بالثواني.

a) فأوجد سرعة الزورق بعد مرور زمن: 1s, 2s, 3s.

b) إذا استغرق الزورق، 6s ليقطع المسافة بين عوامتين أثناء تسارعه، فأوجد $f(6)$ مستعملاً التعويض التركيبي، ووضح ماذا يعني ذلك.

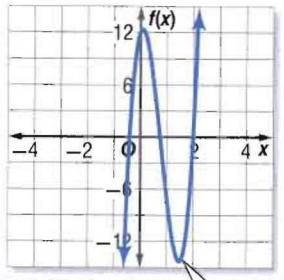
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

(29



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

(30 **تمثيلات متعددة:** لتكن الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$.

a) جبريًّا: إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$.

b) جدوليًّا: كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) تحليليًّا: اعتمادًا على جدول القيم الذي كونته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$؟ وضح إجابتك.

d) بيانيًّا: مثّل الدالة الأصلية بيانيًّا لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3:

(31 $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

(32 $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

(33 $(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$

(34 $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$

تنبيه!

التعويض التركيبي

تذكر أنه في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$. وفي هذه الحالة استعمل a، وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$، فاستعمل $-a$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحد: أوجد حلول كل من المعادلتين:

(35 $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

(36 $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$

(37 **تبرير:** إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟

b) الباقي يساوي 1؟

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟

(38 **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكعيبية يكون باقي قسمتها على $x - 2$ يساوي 8، وباقي قسمتها على $x - 3$ يساوي -5.

(39 **اكتب:** وضح كيف يمكن تحديد أصفار الدالة باستعمال نظريتي الباقي والعوامل.

تدريب على اختبار

40) أي مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

41) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 - i)(4 + i)$؟

A 15

B $16 - i$

C 17

D $17 - 8i$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$

43) $x^4 - 6x^2 = 27$

44) $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$

حل كلًّا من النظامين الآتيين بيانيًّا: (مهارة سابقة)

45)
$y = 3x - 1$
$y = -2x + 4$

46)
$3x + 2y = 8$
$-4x + 6y = 11$

إذا كان $c(x) = x^2 - 2x$ ، $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

47) $c(a + 2) - d(a - 4)$

48) $c(a - 3) + d(a + 1)$

49) $c(-3a) + d(a + 4)$

50) $3d(3a) - 2c(-a)$

51) $c(a) + 5d(2a)$

52) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

3-8 الجذور والأصفار
Roots and Zeros

فيما سبق:
درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.

والآن:
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد أصفار دالة كثيرة حدود.

المفردات:
النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorem of Algebra

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالة: $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$، لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

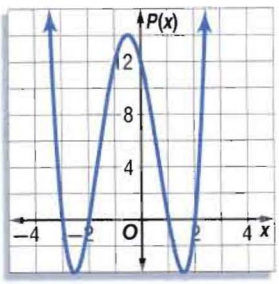
ملخص المفهوم
الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال افرض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

عوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x.

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي
النظرية الأساسية في الجبر

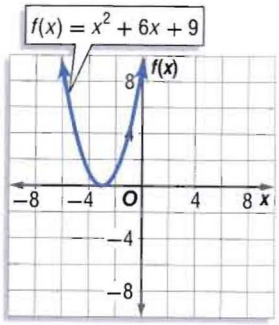
أضف إلى مطويتك

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

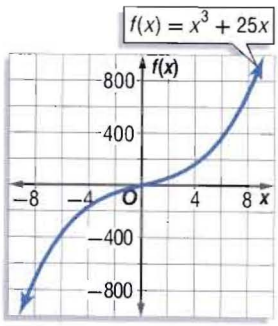


$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x + 3 = 0$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = -3$	بإيجاد قيمة x

وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3

تحقق: التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. وبما أن -3 جذر مكرر مرتين فلا يقطع التمثيل البياني للدالة المحور بل يمسه فقط. ✓

b) $x^3 + 25x = 0$



$x(x^2+25) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x = 0$ أو $x^2 + 25 = 0$	
$x^2 = -25$	
$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$	

للمعادلة جذر حقيقي واحد هو 0، وجذران تخيليان هما $5i$, $-5i$.

تحقق: يقطع التمثيل البياني للدالة المحور x في نقطة واحدة عندما $x = 0$. ✓

تحقق من فهمك

1A) $x^3 + 2x = 0$

1B) $x^4 - 16 = 0$

1C) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

1D) $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

اقرأ

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

اختبر حل كل معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$، أو أقل منه بعدد زوجي.

مثال 2 إيجاد عدد الأصفار الموجبة والسالبة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = x^6 \underset{\text{لا}}{+} 3x^5 \underset{\text{نعم}}{-} 4x^4 \underset{\text{لا}}{-} 6x^3 \underset{\text{نعم}}{+} x^2 \underset{\text{نعم}}{-} 8x \underset{\text{نعم}}{+} 5$$
$$+\,+ \quad +\,- \quad -\,- \quad -\,+ \quad +\,- \quad -\,+$$

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$
$$= x^6 \underset{\text{نعم}}{-} 3x^5 \underset{\text{لا}}{-} 4x^4 \underset{\text{نعم}}{+} 6x^3 \underset{\text{لا}}{+} x^2 \underset{\text{لا}}{+} 8x \underset{\text{لا}}{+} 5$$
$$+\,- \quad -\,- \quad -\,+ \quad +\,+ \quad +\,+ \quad +\,+$$

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0.

أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
4	2	0	$4+2+0=6$
4	0	2	$4+0+2=6$
2	2	2	$2+2+2=6$
2	0	4	$2+0+4=6$
0	2	4	$0+2+4=6$
0	0	6	$0+0+6=6$

تحقق من فهمك

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

إيجاد الأصفار: يمكنك استعمال الاستراتيجيات والنظريات المختلفة التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة جميعها.

مثال 3 استعمال التعويض التركيبي لإيجاد الأصفار

أوجد جميع الأصفار للدالة $f(x) = x^4 - 18x^2 + 12x + 80$.

الخطوة 1: حدّد عدد الأصفار.

حيث إن الدالة $f(x)$ من الدرجة الرابعة، فسيكون لها 4 أصفار.

الخطوة 2: حدد أنواع الأصفار. اختبر عدد مرات تغير إشارات معاملات كل من $f(x), f(-x)$.

$f(-x) = x^4 - 18x^2 - 12x + 80$ نعم لا نعم

$f(x) = x^4 - 18x^2 + 12x + 80$ لا نعم نعم

بما أن هناك تغيرين في إشارات معاملات الدالة $f(x)$، فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة سيكون 0 أو 2. وبما أن هناك تغيرين في إشارات معاملات الدالة $f(-x)$ فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $f(x)$ سيكون 0 أو 2. لذا فإن للدالة $f(x)$ 4 أصفار حقيقية، أو صفران حقيقيان، وصفران تخيليان، أو 4 أصفار تخيلية.

الخطوة 3: حدد الأصفار الحقيقية.

سجل بعض القيم الحقيقية الممكنة لـ x، واستعمل التعويض التركيبي لإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها.

x	1	0	−18	12	80
−3	1	−3	−9	39	−37
−2	1	−2	−14	40	0
−1	1	−1	−17	29	51
0	1	0	−18	12	80
1	1	1	−17	−5	75
2	1	2	−14	−2	76

يحدد كل صف معاملات كثيرة الحدود الناتجة عن القسمة وكذلك الباقي.

تلاحظ من الجدول أن أحد الأصفار يقع عند $x = -2$. ونظرًا لوجود صفرين حقيقيين سالبين، استعمل التعويض التركيبي والدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 14x + 40$ الناتجة عن القسمة لإيجاد الصفر الحقيقي السالب الثاني.

x	1	−2	−14	40
−4	1	−6	10	0
−5	1	−7	21	−65
−6	1	−8	34	−164

يقع الصفر الحقيقي السالب الثاني عند $x = -4$.

وبما أن كثيرة الحدود $x^2 - 6x + 10$ الناتجة عن القسمة تربيعية، فاستعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية لإيجاد بقية أصفار الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

القانون العام لحل المعادلة التربيعية $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1, b = -6, c = 10$ $= \dfrac{(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$

بالتبسيط $= 3 \pm i$

فتكون أصفار الدالة هي: $-4, -2, 3 + i, 3 - i$.

تحقق من فهمك

3) أوجد جميع أصفار الدالة: $h(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$.

إرشادات للدراسة

اختبار الأصفار

أي قيمة ليست صفرًا لكثيرة حدود لن تكون صفرًا لكثيرة الحدود الناتجة عن قسمتها أيضًا. لذا لا داعي لإعادة اختبارها مرة أخرى.

مراجعة المفردات

العددان المركبان المترافقان

العددان المركبان $a + bi, a - bi$ مترافقان.

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، والجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلاً إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، يكون الجذر الآخر $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي نظرية الأعداد المركبة المترافقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل في بعضها البعض لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

مثال 4 استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $i - 5$, -1 من أصفارها .

افهم بما أن $i - 5$ صفر للدالة، فإن $i + 5$ أيضاً صفر للدالة حسب نظرية الأعداد المركبة المترافقة. لذا، فإن $x - (5 + i)$, $x - (5 - i)$, $x + 1$ عوامل لكثيرة الحدود.

خطط اكتب دالة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

حل اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

بكتابة المعادلة	$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$
بإعادة تجميع الحدود	$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$
الفرق بين مربعين	$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$
بإيجاد مربع الحدين	$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$
بالتبسيط	$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$
بالضرب	$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$
بجمع الحدود المتشابهة	$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$

تحقق بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة وأصفارها هي: $5 + i$, $5 - i$, -1 .

تحقق من فهمك

4) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $1 + 2i$, -1 من أصفارها.

تأكد

مثال 1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$

4) $0 = x^3 - 8$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

6) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$

7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

8) $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$

مثال 3 أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي :

9) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 6x - 16$

10) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + 28$

11) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 32x - 384$

12) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10$

مثال 4 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

13) $4, -1, 6$

14) $3, -1, 1, 2$

15) $-2, 5, -3i$

16) $-4, 4 + i$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

17) $4x^2 + 1 = 0$

18) $2x^2 - 5x + 14 = 0$

19) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

20) $8x^3 - 27 = 0$

21) $16x^4 - 625 = 0$

22) $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

23) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

24) $x^5 + 2x^3 + x = 0$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

25) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

26) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

27) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$

28) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$

29) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$

30) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$

مثال 3 أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي :

31) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$

32) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 73x^2 + 384x + 576$

33) $f(x) = x^5 - 8x^3 - 9x$

34) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 85$

35) $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$

36) $f(x) = 9x^4 + 9x^3 + 4x^2 + 4x$

مثال 4 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

37) $5, -2, -1$

38) $-4, -3, 5$

39) $-1, -1, 2i$

40) $-3, 1, -3i$

41) $0, -5, 3 + i$

42) $-2, -3, 4 - 3i$

43) أرباح قدَّر مدير الإنتاج في مصنع للأجهزة الإلكترونية أن الربح الذي يحققه المصنع من إنتاج x جهاز يعطى بالدالة: $P(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x$.

a) ما عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لهذه الدالة؟

b) ماذا تعني الأصفار في هذه الحالة؟

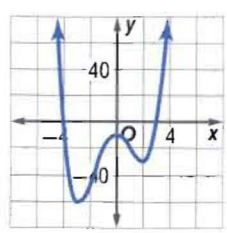
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

a) $-3, 4, i, -i$

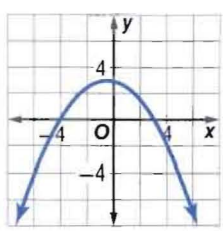
b) $-4, 3$

c) $-4, 3, i, -i$

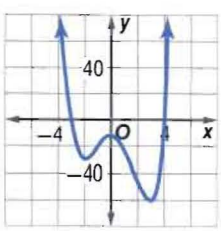
44)



45)

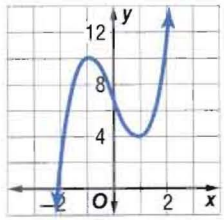


46)



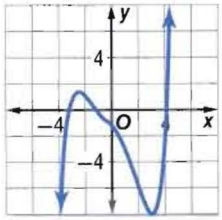
حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانيًّا فيما يأتي، ووضح إجابتك:

(47)



الدرجة : 3

(48)



الدرجة : 5

مسائل مهارات التفكير العليا

(49) **مسألة مفتوحة:** في كل مما يأتي، مثل بيانيًّا دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها :

a) 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان **b)** 4 أصفار حقيقية **c)** صفران تخيليان

(50) **تحد:** اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، وصفر غير صحيح، وصفران غير نسبيين، ووضح إجابتك .

(51) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضح إجابتك:

$r^3 - 8 = 0$ | $r^2 - 1 = 0$ | $r^3 + 1 = 0$ | $r^4 + 1 = 0$

(52) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا لكل عبارة فيما يأتي:

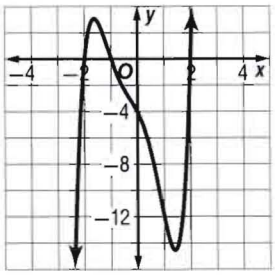
a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

(53) **اكتب:** وضح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة الممكنة لدالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

تدريب على اختبار

(54) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



A $x - 2$ **C** $x + 2$

B $x - 1$ **D** $x + 1$

مراجعة تراكمية

أوجد $f(4)$, $f(-8)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي: (الدرس 3-7)

(55) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$ **(56)** $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x$ **(57)** $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

(58) $x^6 - y^6$ **(59)** $4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z$ **(60)** $5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b$

3-9

نظرية الصفر النسبي
Rational Zero Theorem

لماذا؟

يمكن تقدير عدد الهواتف النقالة المبيعة سنويًا $d(x)$ في إحدى الشركات بالدالة: $d(x) = 30x^3 - 478x^2 + 1758x + 12392$، حيث تمثل x عدد السنوات منذ 1418هـ، ويمكن أن تستعمل هذه الدالة لمعرفة متى يبلغ عدد الهواتف النقالة المبيعة 200000 هاتف.

تحديد الأصفار النسبية إن عملية اختبار جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود من خلال التعويض التركيبي ليست عملية سهلة. وتساعد **نظرية الصفر النسبي** على اختيار بعض الأعداد النسبية لاختبارها. وإذا كان المعامل الرئيس للدالة 1، تستعمل نتيجة النظرية لاختيار بعض الأصفار

مفهوم أساسي — **نظرية الصفر النسبي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة، $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

مثال: لتكن $f(x) = 2x^3+3x^2-17x+12$، فإذا كان العدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفر للدالة $f(x)$، فإن 3 أحد عوامل العدد 12، و 2 أحد عوامل العدد 2.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيس لها 1، وحدها الثابت لا يساوي صفرًا، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

مثال 1 — **تحديد الأعداد النسبية وفق نظرية الصفر النسبي**

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدوال الآتية:

a $f(x) = 4x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 16$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفرًا نسبيًا، فإن p أحد عوامل العدد 16، و q أحد عوامل العدد 4.

$p: \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$ $\quad q: \pm1, \pm2, \pm4$

اكتب القيم الممكنة للعدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة.

$\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$

b $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 12$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفرًا نسبيًا، فإن p أحد عوامل العدد 12، و q أحد عوامل العدد 1.

$p: \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ $\quad q: \pm1$

لذا، فإن $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

تحقق من فهمك

1A $g(x) = 3x^3 - 4x + 10$ $\qquad$ **1B** $h(x) = x^3 + 11x^2 + 24$

فيما سبق:
درستُ إيجاد أصفار الدوال التربيعية التي على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

والآن:
- أتعرف نظرية الصفر النسبي وأطبقها.
- أجد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود.

المفردات:
نظرية الصفر النسبي
Rational Zero Theorn

www.obeikaneducation.com

إيجاد الأصفار النسبية: عندما تكتب جميع الأعداد النسبية، يمكنك اختبار كل عدد باستعمال التعويض التركيبي، واستعمال الطرائق الأخرى التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد الأصفار النسبية

نجارة: صنع إبراهيم صندوقًا على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه 8019in^3 ، أوجد أبعاد الصندوق إذا كان طوله يزيد على عرضه بمقدار **24in**، وارتفاعه يزيد على عرضه بمقدار **18in**.

بفرض أن عرض الصندوق x، فإن طوله $x + 24$، وارتفاعه $x + 18$.

اكتب معادلة الحجم.

$\ell wh = V$	قانون الحجم
$(x + 24)(x)(x + 18) = 8019$	بالتعويض
$x^3 + 42x^2 + 432x = 8019$	بالضرب
$x^3 + 42x^2 + 432x - 8019 = 0$	بطرح 8019 من كلا الطرفين

المعامل الرئيس يساوي 1. لذا فإن الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل العدد 8019.

$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 11, \pm 27, \pm 33, \pm 81, \pm 99, \pm 243, \pm 297, \pm 729, \pm 891, \pm 2673, \pm 8019$

وبما أن الأبعاد قيم موجبة دائمًا، فاختر القيم الموجبة فقط.

هنالك تغير واحد في إشارة المعاملات، وحسب قانون ديكارت للإشارات، فهناك صفر واحد حقيقي موجب. أنشئ جدولاً للقسمة التركيبية، واختبر القيم الممكنة.

p	1	42	432	−8019
1	1	43	475	−7544
3	1	45	567	−6318
9	1	51	891	0

بما أن العدد 9 صفر حقيقي موجب، فلا داعي لاختبار بقية القيم. ويكون البعدان الآخران هما: $9 + 24 = 33$ in و $9 + 18 = 27$ in.

تحقق: اضرب الأبعاد الثلاثة وتحقق من أن الناتج يساوي 8019

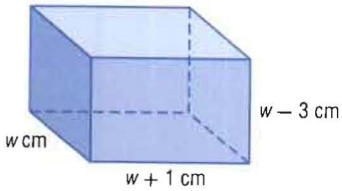
$9 \times 33 \times 27 = 8019$ ✓

إرشادات للدراسة

قانون ديكارت للإشارات: اختبر إشارات المعاملات في المعادلة، وفي هذا المثال هنالك تغير واحد موجب في الإشارة. لذا يوجد صفر حقيقي واحد فقط.

تحقق من فهمك

2) هندسة: منشور متوازي مستطيلات حجمه 1056cm^3، ويزيد طوله بمقدار 1cm على عرضه، ويقل ارتفاعه بمقدار 3cm عن عرضه، أوجد أبعاده.



ليس من الضروري في العادة اختبار جميع الأصفار الممكنة، فعند إيجاد أحدها، حلّل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها لتجد الأصفار الأخرى.

مثال 3 إيجاد جميع الأصفار

أوجد جميع الأصفار للدالة: $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 41x^2 - 72x - 36$.

اعتمادًا على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر يكون للدالة 4 أصفار مركبة فقط، وحسب قانون ديكارت للإشارات هناك صفر واحد أو 3 أصفار حقيقية موجبة، وهناك صفر واحد فقط حقيقي سالب، والأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{12}{5}, \pm\frac{18}{5}, \pm\frac{36}{5}$

أنشئ جدولاً، واختبر الأعداد النسبية.

$\frac{p}{q}$	5	−8	41	−72	−36
−1	5	−13	54	−126	90
1	5	−3	38	−34	−70
2	5	2	45	18	0

بما أن $f(2) = 0$، فإن $x = 2$ صفرًا للدالة.
حلّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x-2$ وهي $5x^3+2x^2+45x+18$:

$5x^3 + 2x^2 + 45x + 18 = 0$ بكتابة كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - 2$

$(5x^3 + 2x^2) + (45x + 18) = 0$ بتجميع الحدود

$x^2(5x + 2) + 9(5x + 2) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$(x^2 + 9)(5x + 2) = 0$ خاصية التوزيع

$5x + 2 = 0$ أو $x^2 + 9 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$5x = -2$ $\quad x^2 = -9$

$x = -\frac{2}{5}$ $\quad x = \pm 3i$

لذا، يوجد صفر حقيقي آخر هو $x = -\frac{2}{5}$، وصفران تخيليان هما $x = 3i$ و $x = -3i$.
لذا، فإن أصفار الدالة هي $-\frac{2}{5}, 2, 3i, -3i$.

تحقق من فهمك

أوجد جميع الأصفار لكل من الدالتين الآتيتين:

3A) $h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$

3B) $k(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18$

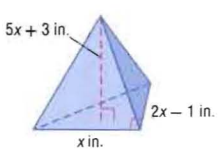
تأكد

مثال 1 اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24$

2) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 15$

مثال 2 **3) هندسة** إذا كان حجم الهرم الثلاثي المجاور 210 in^3، فأوجد أبعاده.



أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدالتين الآتيتين:

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$

5) $f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 29x + 12$

مثال 3 أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي :

6) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5$

7) $f(x) = 8x^3 + 14x^2 + 11x + 3$

8) $f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12$

9) $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 14x - 15$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة مما يأتي:

10) $f(x) = x^4 + 8x - 32$

11) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10$

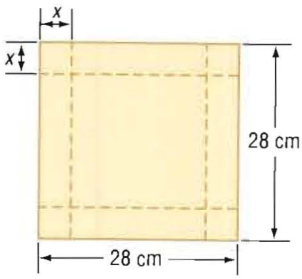
12) $f(x) = 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35$

13) $f(x) = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 18$

14) $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 42$

15) $f(x) = 15x^3 + 6x^2 + x + 90$

مثال 2 **16) تصنيع** يُراد تصنيع صندوق بقص مربعات صغيرة متساوية في المساحة من زوايا ورقة مقواة مربعة الشكل، ثم ثني الجوانب إلى الأعلى.



a) اكتب الدالة $V(x)$ التي تمثل حجم الصندوق.

b) ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق 1152cm^3؟

c) إذا كان $x = 6\,\text{cm}$ ، فما حجم الصندوق؟

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:

17) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$

18) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 100x + 75$

19) $f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10$

20) $f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$

21) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4$

22) $f(x) = 81x^4 - 256$

مثال 3 أوجد جميع أصفار كل دالة فيما يأتي:

23) $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 9x + 2$

24) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

25) $f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$

26) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x$

27) $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$

28) $f(x) = 6x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 38x - 40$

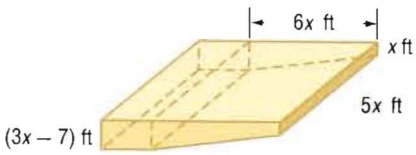
29) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28$

30) $f(x) = 9x^5 - 94x^3 + 27x^2 + 40x - 12$

31) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 10$

32) $f(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$

33) بركة سباحة يوضح الشكل الآتي مخطط بركة سباحة تسع 9175ft^3 من الماء.



a) اكتب دالة كثيرة حدود تمثل حجم البركة.

b) ما قيم x الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟

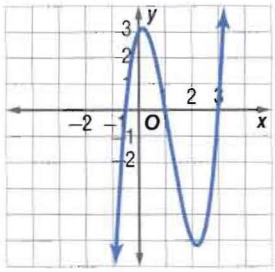
34) أفعوانة: يمكن تمثيل ارتفاع قطار أفعوانة عن مستوى الأرض في مدينة الألعاب بالدالة $f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ ارتفاع الأفعوانة. استعمل نظرية الصفر النسبي لتحدد الأوقات الأربعة التي تكون عندها الأفعوانة عند مستوى الأرض.

35) يُباع أحد أنواع الزيوت في عبوّات أسطوانية الشكل حجم كل منها $160\pi\text{in}^3$ تقريبًا، ويزيد ارتفاعها 6in على نصف قطرها.

a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم عبوة الزيت مستعملاً قانون حجم الأسطوانة $V = \pi r^2 h$

b) ما قيم r الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟

c) أوجد أبعاد العبوة.



36) اعتمادًا على التمثيل البياني المجاور.

a) أوجد جميع أصفار كل من الدالتين: $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

b) أي الدالتين لها التمثيل البياني المجاور f أم g؟

أوجد جميع أصفار كل من الدالتين الآتيتين :

37) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 19x^3 - 43x^2 + 18x + 40$

38) $f(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 33x^2 + 126x - 216$

مسائل مهارات التفكير العليا

39) **اكتشف الخطأ:** كتبت كل من سلمى ونوف جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة: $f(x) = 4x^4 + 8x^5 + 10x^2 + 3x + 16$ فأي منهما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

سلمى	نوف
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$

40) **تحد:** اكتب دالة كثيرة حدود يكون كل من العددين $5 + 2i$ ، $1 + \sqrt{3}$ صفراً من أصفارها.

41) **تبرير:** حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبداً؟ وضح إجابتك.

"إذا كانت جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود أعدادًا صحيحة فإن معاملها الرئيس إما 1 أو -1".

42) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكون جميع أصفارها الممكنة:

$\pm 18, \pm 9, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm\frac{9}{4}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$

43) **اكتب:** وضح طريقة استعمال نظرية الصفر النسبي لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة.

تدريب على اختبار

44) أي مما يأتي يعدّ صفرًا للدالة: $f(x) = 12x^5 - 5x^3 + 2x - 9$؟

A -6 **B** $-\frac{2}{3}$ **C** $\frac{3}{8}$ **D** 1

45) كم صفرًا حقيقيًّا سالبًا للدالة: $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$؟

A 3 **B** 2 **C** 1 **D** 0

مراجعة تراكمية

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها: الدرس (3-8)

46) $6, -3, \sqrt{2}$ **47)** $5, -1, 4i$ **48)** $-4, -2, i\sqrt{2}$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى: الدرس (3-7)

49) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6; x + 3$ **50)** $a^4 - 2a^3 - 17a^2 + 18a + 72; a - 3$ **51)** $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12; x + i$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الأعداد المركبة (الدرس 3-1)

- i هي الوحدة التخيلية، $i^2 = -1$ ، $i = \sqrt{-1}$

القانون العام والمميز (الدرس 3-2)

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

العمليات على كثيرات الحدود (الدرس 3-3)

- عند الجمع أو الطرح: أجمّع الحدود المتشابهة.
- عند الضرب: أستعمل خاصية التوزيع.
- عند القسمة: أستعمل القسمة الطويلة أو التركيبية.

حل معادلات كثيرات الحدود (الدرس 3-6)

- يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال العامل المشترك الأكبر أو تجميع الحدود، أو بإحدى طرائق تحليل الدالة التربيعية.

نظريتا الباقي والعوامل (الدرس 3-7)

- نظرية العوامل: تكون ثنائية الحد $x - a$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذًا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

الجذور، والأصفار، ونظرية الصفر النسبي (الدرسان 3-8،3-9)

- نظرية الأعداد المركبة المترافقة: إذا كان $a + bi$ صفرًا للدالة، فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.
- نظرية الصفر النسبي: إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

المطويات منظم أفكار

تأكد ان المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

العدد المركب (103)
المعامل الرئيس (131)
القانون العام (109)
دالة كثيرة الحدود (132)
المميز (109)
دالة القوة (132)
التبسيط (119)
سلوك طرفي التمثيل البياني (133)
درجة كثيرة الحدود (119)
كثيرة الحدود الأولية (139)
القسمة التركيبية (126)
الصورة التربيعية (142)
كثيرة حدود بمتغير واحد (131)
التعويض التركيبي (147)

اختبار مفرداتك

بيّن إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) العدد 6i تخيلي بحت

2) تسمى المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{29}$ بالمميز

3) يُسمّى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعاملَ الرئيس.

4) تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد.

5) دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

6) تبسيط تعابير تتضمن قوى، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

7) القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

8) $(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ هي دالة قوة.

مراجعة الدروس

3-1 الأعداد المركبة (الصفحات: 102-108)

بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $\sqrt{-8}$ **10)** $(2-i)+(13+4i)$

11) $(6+2i)-(4-3i)$ **12)** $(6+5i)(3-2i)$

13) كهرباء تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $2i+3$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $3i-4$ أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $2x^2+50=0$ **15)** $4x^2+1=0$

مثال 1

حل المعادلة: $3x^2+12=0$

$3x^2+12=0$	المعادلة الأصلية
$3x^2=-12$	بطرح 12 من كلا الطرفين.
$x^2=-4$	بقسمة كلا الطرفين على 3.
$x=\pm\sqrt{-4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x=\pm 2i$	$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$

3-2 القانون العام والمميز (الصفحات: 109-116)

أجب عن الفروع a-c لكل معادلة تربيعية فيما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $x^2-10x+25=0$ **17)** $x^2+4x-32=0$

18) $2x^2+3x-18=0$ **19)** $4x^2-4x+1=0$

20) فيزياء قذف محمد كرة رأسيًّا إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft\s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالمعادلة $h=-16t^2+40t+5$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض الذي قذفت منه.

مثال 2

حل المعادلة: $x^2-4x-45=0$

$a=1, b=-4, c=-45$

القانون العام $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-45)}}{2(1)}$

$=\dfrac{4\pm 14}{2}$

بالكتابة على صورة معادلتين $x=\dfrac{4+14}{2}$, $x=\dfrac{4-14}{2}$

$=9$ $=-5$

إذن مجموعة الحل $\{-5, 9\}$.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود (الصفحات: 119-124)

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

21) $\dfrac{14x^4y}{2x^3y^5}$

22) $3t(tn-5)$

23) $(4r^2+3r-1)-(3r^2-5r+4)$

24) $(x^4)^3$

25) $(m+p)(m^2-2mp+p^2)$

26) $3b(2b-1)+2b(b+3)$

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-4a^3b^5)(5ab^3)$

بضرب القوى $(-4a^3b^5)(5ab^3)=(-4)(5)a^{3+1}b^{5+3}$

بالتبسيط $=-20a^4b^8$

b) $(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$=(2x^2+3x^2)+(3x-5x)+[-8+(-7)]$

$=5x^2-2x-15$

3-4 قسمة كثيرات الحدود (الصفحات: 125-130)

بسّط كلًّا مما يأتي:

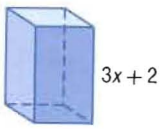
27 $\dfrac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5}$

28 $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$

29 $(a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1}$

30 $(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1)$

31 **هندسة:** حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور يساوي $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$ وحدة مكعبة، فما مساحة القاعدة؟



مثال 4

بسّط المقدار: $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x - 1 \overline{)\,6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ \underline{(-)\ 6x^3 - 3x^2} \\ -28x^2 - 34x + 22 \\ \underline{(-)\ -28x^2 + 14x} \\ -48x + 22 \\ \underline{(-)\ -48x + 24} \\ -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \dfrac{2}{2x - 1}$.

3-5 دوال كثيرات الحدود (الصفحات: 131-137)

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

32 $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$

33 $6xy^2 - xy + y^2$

34 $12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3$

أوجد $p(x + h)$ ، $p(-2)$ لكل دالة فيما يأتي :

35 $p(x) = x^2 + 2x - 3$

36 $p(x) = 3x^2 - x$

37 $p(x) = 3 - 5x^2 + x^3$

مثال 5

حدّد درجة كثيرة الحدود $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$ ؟ وما معاملها الرئيس؟

أكبر أس يساوي 7، لذا فدرجة كثيرة الحدود تساوي 7، والمعامل الرئيس هو -7.

مثال 6

إذا كان $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$، فأوجد $p(a - 2)$.

$$\begin{aligned} p(a - 2) &= 3(a - 2) + 2(a - 2)^2 - (a - 2)^3 \\ &= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \\ &= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10 \end{aligned}$$

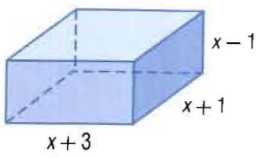
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود (الصفحات: 139-145)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

38 $x^3 + 2x^2 - 35x = 0$

39 $8x^4 - 10x^2 + 3 = 0$

40 **هندسة:** إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي $315\ \text{in}^3$. فأوجد كلًّا من قيمة x وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.



مثال 7

حلّ المعادلة: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$.

$$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$$

$x^2 - 4 = 0$ أو $4x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 4$ $\qquad x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x = \pm 2$ $\qquad x = \pm\dfrac{3}{2}$

الحلول هي: $-2, 2, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}$.

3-7 نظريتا الباقي والعوامل (الصفحات: 147-152)

أوجد $f(4)$, $f(-2)$ لكل دالة فيما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

41 $f(x) = x^2 - 3$

42 $f(x) = x^2 - 5x + 4$

43 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

44 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

45 $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10,\ x + 5$

46 $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5,\ 2x + 5$

47 $x^3 + 2x^2 - 23x - 60,\ x - 5$

مثال 8

حدد إذا كان $x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود الآتية أم لا:

$x^3 - 2x^2 - 21x - 18$

6	1	−2	−21	−18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود؛ لأن باقي قسمة كثيرة الحدود عليه يساوي صفرًا.

$x^3 - 2x^2 - 21x - 18 = (x - 6)(x^2 + 4x + 3)$

3-8 الجذور والأصفار (الصفحات: 153-159)

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

48 $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$

49 $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$

50 $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$

51 $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$

52 $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

مثال 9

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 26x - 48$.

تتغير إشارة الدالة $f(x)$ مرة واحدة. لذا يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تتغير إشارة الدالة $f(-x)$ ثلاث مرات. لذا يوجد للدالة صفر واحد، أو ثلاثة أصفار حقيقية سالبة.

الدالة ليس لها أصفار تخيلية، أو لها صفران تخيليان.

3-9 نظرية الصفر النسبي (الصفحات: 160-164)

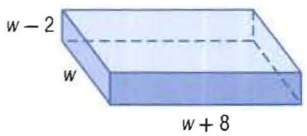
أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

53 $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

54 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

55 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

56 **تخزين:** صنعت سعاد صندوقًا للتخزين على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه $96\ ft^3$. أوجد أبعاد الصندوق باستعمال الشكل أدناه.



مثال 10

أوجد جميع أصفار الدالة: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

هنالك 3 أصفار فقط؛ صفر واحد حقيقي موجب، وصفران حقيقيان سالبان، والأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$.

3	1	4	-11	-30
		3	21	30
	1	7	10	0

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10)$
$= (x - 3)(x + 2)(x + 5)$

$f(x) = 0$ عندما $(x - 3)(x + 2)(x + 5) = 0$ أي عندما $x = 3, -2, -5$

اختبار الفصل

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\frac{2-i}{1+3i}$

2) $(2+3i)-(2-3i)$

3) $(3-i)\,.\,(4+2i)$

بسّط كلًّا مما يأتي:

4) $(3a)^2(7b)^4$

5) $(7x-2)(2x+5)$

6) $(2x^2+3x-4)-(4x^2-7x+1)$

7) $(4x^3-x^2+5x-4)+(5x-10)$

8) $(x^4+5x^3+3x^2-8x+3)\div(x+3)$

9) $(3x^3-5x^2-23x+24)\div(x-3)$

10) إذا كانت $c(x)=3x^3+5x^2-4$ ، فما قيمة $4c(3b)$؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

11) $8y^4+x^3y$

12) $2x^2+2x+1$

13) $a^2x+3ax+2x-a^2y-3ay-2y$

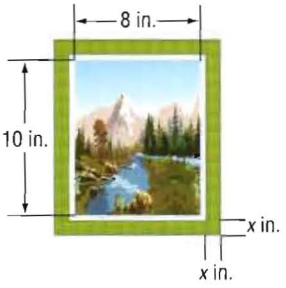
حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

14) $8x^3+1=0$

15) $x^4-11x^2+28=0$

16) حل المعادلة: $x^2-4x+3=0$

17) **إطارات:** إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي 168 in^2، فما عرض الإطار؟



18) **اختيار من متعدد:** إذا كان $f(x)=x^4-3x^3+5x-3$، فاستعمل التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$.

A 37 **B** 27

C −33 **D** −21

19) فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها . أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3+15x^2+22x-15\ ;x+5$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الآتيتين:

20) $p(x)=x^3-x^2-x-3$

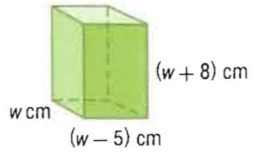
21) $p(x)=2x^6+5x^4-x^3-5x-1$

أوجد جميع أصفار كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

22) $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

23) $p(x)=x^3+2x^2+4x+8$

24) **هندسة:** إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات الموضح بالشكل أدناه 612 cm^3، فأوجد أبعاده.



25) اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$f(x)=2x^4+3x^2-12x+8.$

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) أبسط صورة للمقدار $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$هي:

A $3n^2 + 11n - 11$

B $3n^2 + 11n - 1$

C $7n^2 + 11n - 11$

D $7n^2 + 11n - 1$

2) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة: $x^3 - 37x - 84 = 0$ ؟

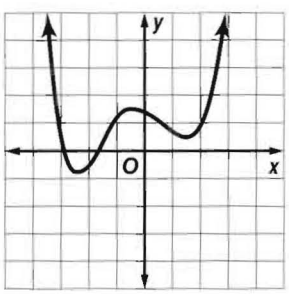
A -4

B -3

C 6

D 7

3) كم صفرًا حقيقيًّا للدالة كثيرة الحدود الممثلة بيانيًّا أدناه؟



A 2

B 3

C 4

D 5

4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي، فإن قيمة x تساوي:

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$

5) استعمل عبد الرحمن الدالة:
$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$
لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي 1390، 1430هـ ؛ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390هـ ، P عدد السكان بالملايين. فما قيمة $P(20)$ التي تمثل عدد سكان هذه المدينة عام 1410هـ ؟

A 2 مليون تقريبًا

B 2.5 مليون تقريبًا

C 3 ملايين تقريبًا

D 3.5 ملايين تقريبًا

6) أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ هي:

A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

C $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

D $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما قيمة مميِّز المعادلة: $x^2 - x - 20 = 0$ ؟

A 9

B 81

C 5

D -4

8) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت X مصفوفة رتبتها 2×2 بحيث $X = 2A - B$ فإن:

A $X = 3B$

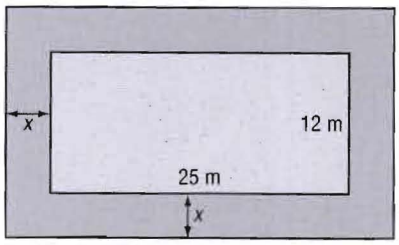
B $X = 2A$

C $X = -2B$

D $X = 3A$

إجابة قصيرة

9) يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر $558\ m^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



10) حلّل المقدار: $64a^4 + ab^3$ تحليلًا تامًّا، وبيّن خطوات الحلّ.

11) بسّط المقدار:

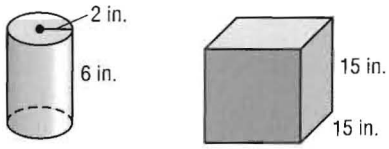
$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبينًا خطوات الحل.

12) ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

13) يريد صالح أن يملأ الإناء المكعب بالماء مستعملاً العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟



إجابة طويلة

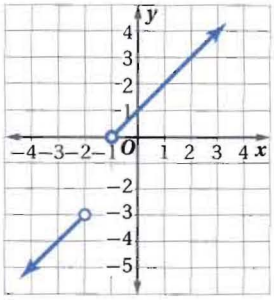
14) منشور متوازي مستطيلات حجمه $864\ cm^3$، ويقل طوله بمقدار 1 cm عن ارتفاعه، ويزيد عرضه بمقدار 3 cm على ارتفاعه.

a) اكتب معادلة كثيرة حدود لإيجاد ارتفاع المنشور h.

b) كم جذرًا ممكنًا لمعادلة كثيرة الحدود التي كتبتها؟ فسّر إجابتك.

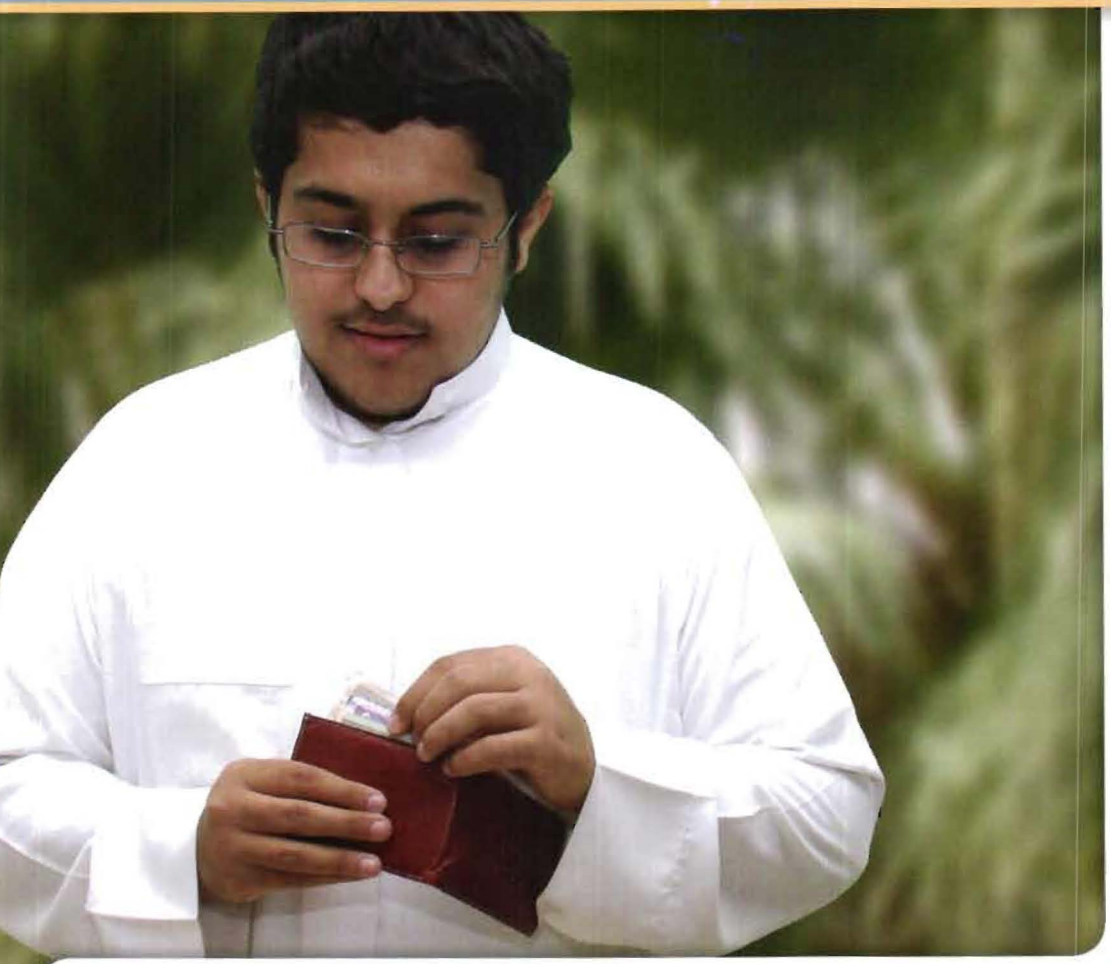
c) أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة التي كتبتها؟ وأوجد أبعاد المنشور.

15) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-6	3-8	2-5	3-5	3-1	3-2	2-2	3-6	3-5	3-4	2-5	3-8	3-9	1-3

الفصل 4
العلاقات والدوال العكسية والجذرية
Inverses and Radical Functions and Relations



فيما سبق
درست تبسيط كثيرات الحدود.

والآن
- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًّا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلّلها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

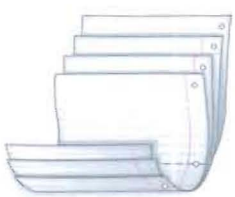
لماذا؟
تمويل: يعد ربط التمويل بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

المطويات منظم أفكار

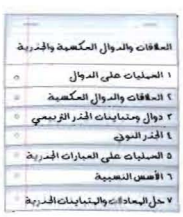
العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.

2. **اطو** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذ الحواف بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.



3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثن الأوراق جيداً، ثم ثبتها على طول خط الطي، واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.



التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حدّد جذور كل معادلة مما يأتي مستعملاً التمثيل البياني للدالة المرتبطة. وإذا لم تستطع تحديد الجذور بدقة فاكتب الأعداد الصحيحة المتتالية التي تقع بينها الجذور.

1) $x^2 - 4x + 1 = 0$

2) $2x^2 + x - 6 = 0$

3) **فيزياء:** أسقط خالد كرة من على سطح بناية ارتفاعها 30ft. فكم الزمن الذي تستغرقه الكرة لتصل إلى الأرض؟ أهمل مقاومة الهواء للكرة، واستعمل الصيغة $h(t) = -16t^2 + h_0$، حيث t تمثل الزمن بالثانية، h_0 الارتفاع الابتدائي بالأقدام.

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملاً القسمة التركيبية:

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

5) $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$

6) $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$

7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

8) **تمويل** يمكن تقدير عدد السلع المبيعة من متجر بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$، حيث x تمثل المبلغ الذي أُنفق بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المبيعة.

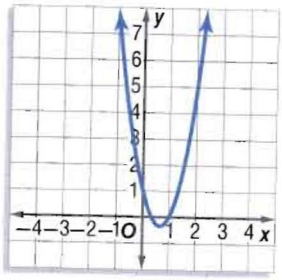
a) أجر عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$.

b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مراجعة سريعة

مثال 1

استعمل الشكل المجاور والذي يبين التمثيل البياني للدالة المرتبطة لتحديد جذور المعادلة $3x^2 - 4x + 1 = 0$ وإذا لم تستطع تحديد الجذور بدقة فاكتب الأعداد الصحيحة المتتالية التي تقع بينها الجذور.



الجذور هي إحداثيات x لنقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور x.

يقطع التمثيل البياني المحور x بين العددين الصحيحين 0 و1، وعند العدد 1.

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4 + 4x^3 + x^2 + 9x - 6) \div (x + 2)$ مستعملاً القسمة التركيبية.

$x - r = x + 2$، لذلك $r = -2$.

-2	3	4	1	9	-6
	↓	-6	4	-10	2
	3	-2	5	-1	-4

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

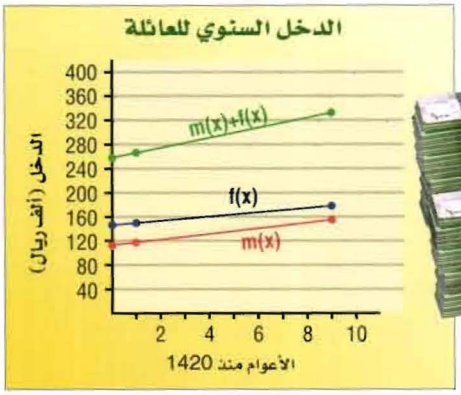
4-1 العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق
درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن
- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات
تركيب دالتين
composition of functions

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1420هـ؛ حيث $f(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.

العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x + 1$، فأوجد كل دالة فيما يأتي:

a) $(f+g)(x)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ — جمع دالتين

$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$ — $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = 2x + 1$

$= x^2 + 2x - 3$ — بالتبسيط.

b) $(f-g)(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ — طرح دالتين

$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$ — $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = 2x + 1$

$= x^2 - 2x - 5$ — بالتبسيط.

تحقق من فهمك

إذا كان $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$، فأوجد كل دالة فيما يأتي:

1A) $(f+g)(x)$ **1B)** $(f-g)(x)$

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12$, $g(x) = 3x - 4$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

ضرب دالتين $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

بالتعويض $= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$

خاصية التوزيع $= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$

بالتبسيط. $= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

قسمة دالتين $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

بالتعويض $= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا. فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

تحقق من فهمك

إذا كان $f(x) = x^2 - 7x + 2$, $g(x) = x + 4$، فأوجد كل دالة مما يأتي :

2A $(f \cdot g)(x)$ **2B** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند تركيب دالتين فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

مفهوم أساسي تركيب دالتين

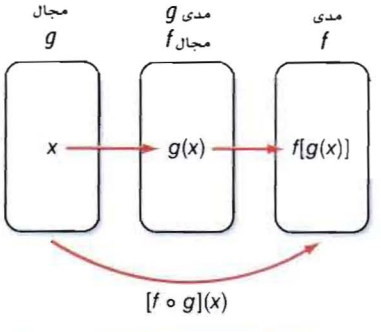
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي

إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج



يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك، تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

a) $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$g(10) = 14$ $f[g(10)] = f(14) = 9$

$g(9) = 0$ $f[g(9)] = f(0) = 13$

$g(8) = 15$ $f[g(8)] = f(15) = 11$

$g(5) = 1$ $f[g(5)] = f(1) = 8$

$$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لإيجاد $g[f(x)]$

$f(14) = 9$ $g[f(14)] = g(9) = 0$

$f(15) = 11$ $g[f(15)] = g(11)$

$f(1) = 8$ $g[f(1)] = g(8) = 15$

$f(0) = 13$ $g[f(0)] = g(13)$

$g(11)$ غير معرّفة

$g(13)$ غير معرّفة

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(14)] = 0, g[f(1)] = 15$ ، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

b) $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب الدالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	بالتعويض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	بالتعويض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بالتبسيط	$= 8x - 20$

تحقق من فهمك

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3A) $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$. لذا، فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

إرشادات للدراسة

التركيب كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

الربط مع الحياة

منيت كبرى شركات صناعة السيارات بخسائر كبيرة في الأزمة المالية العالمية عام 1429 هـ، مما اضطرها إلى تخفيض أسعار مبيعاتها.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال تركيب دالتين

سيارات: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضاً بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافاً إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال. فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم افرض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم.

خطط اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة . فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x$$

يخصم الوكيل 1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة. لذا فإن دالة الخصم هي:

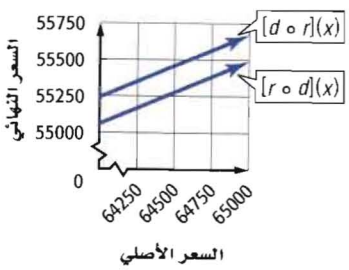
$$r(x) = x - 1500$$

حل إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$\begin{aligned}
[r \circ d](x) &= r[d(x)] \\
[r \circ d](64500) &= r[d(64500)] \\
&= r[64500 - 0.12(64500)] \\
&= r(64500 - 7740) \\
&= r(56760) \\
&= 56760 - 1500 = 55260
\end{aligned}$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$\begin{aligned}
[d \circ r](x) &= d[r(x)] \\
[d \circ r](64500) &= d[r(64500)] \\
&= d(64500 - 1500) \\
&= d(63000) \\
&= 63000 - 0.12(63000) \\
&= 63000 - 7560 = 55440
\end{aligned}$$



وبما أن $[d \circ r](64500) = 55440$, $[r \circ d](64500) = 55260$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر، لذا، ستكون قيمة التخفيض أعلى.

تحقق من فهمك

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالاً، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

تأكد

المثالان 1 , 2 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

1) $f(x)=x+2$ ، $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$ ، $g(x)=-x+8$

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$
$g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$
$g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $[f\circ g](x)$, $[g\circ f](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

5) $f(x)=-3x$ ، $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$ ، $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4 **7) ادخار:** يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسط آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضِّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

8) $f(x)=x-1$ ، $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x^2-4$ ، $g(x)=x^2-8x+4$

11) مشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) فما سرعته الكلية إذا كان يمشي باتجاه سير الممر المتحرك؟

b) كم تصبح سرعته الكلية إذا سار بعكس اتجاه سير الممر المتحرك؟

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية ، إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$
$g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$
$g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$
$g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$
$g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

16) $f(x)=2x^2-x+1$ ، $g(x)=4x+3$

17) $f(x)=4x-1$ ، $g(x)=x^3+2$

18) $f(x)=2x^2$ ، $g(x)=8x^2+3x$

مثال 4 **19) صناعة:** ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x)=6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x)=0.75x+1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و1000 فنجان و5000 فنجان.

الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة LCD هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالاً، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$.

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثّل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$، أم $[t \circ p](x)$؟ وضح إجابتك.

c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12, g(x) = x - 3$. فأوجد كل دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$ **22)** $2(g \cdot f)(x)$ **23)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $f(x) = 5x, g(x) = -2x + 1, h(x) = x^2 + 6x + 8$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $g[h(3)]$ **25)** $h[f(-5)]$ **26)** $h[f(9)]$

27) $f[g(3a)]$ **28)** $f[h(a + 4)]$ **29)** $g[f(a^2 - a)]$

30) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$.

a) جدوليًا: أنشئ جدولاً يبين بعض قيم الدوال: $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

b) بيانيًا: مثّل بيانيًا الدوال $f(x), g(x), (f + g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) بيانيًا: مثّل بيانيًا الدوال $f(x), g(x), (f - g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيًا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1414 هـ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414 هـ.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $f(x) = x + 2, g(x) = -4x + 3, h(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

32) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ **33)** $[(f + g) \cdot h](1)$ **34)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6)$

35) $[f \circ (g \circ h)](2)$ **36)** $[g \circ (h \circ f)](-4)$ **37)** $[h \circ (f \circ g)](5)$

38) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال العلاقة بين الدالتين $\left(\frac{f}{g}\right), (f \cdot g)$ عندما تكون $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x - 3$.

a) جدوليًا: انقل الجدول المجاور إلى دفترك، ثم أكمله

b) بيانيًا: مثّل الدالتين $\left(\frac{f}{g}\right), (f \cdot g)$ بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

c) لفظيًا: بيّن العلاقة بين الدالتين $\left(\frac{f}{g}\right)$ و $(f \cdot g)$.

x	$(f \cdot g)(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
1		
2		
3		
4		
5		

مسائل مهارات التفكير العليا

39) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

40) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 58$$

41) تحد: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

a) $g(x) \cdot g(x)$ **b)** $f(x) \cdot f(x)$

42) تبرير: حدد إذا كانت كل من الجملتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسر إجابتك.

a) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ مشروطاً بمجال الدالة f.

b) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ مشروطاً بمجال الدالة g.

43) اكتب: وضح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعط مثالاً من واقع الحياة يمكنك حله باستعمال تركيب دالتين.

تدريب على اختبار

44) إذا كان $h(x) = 2(x + 5)^2, g(x) = x^2 + 9x + 21$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

45) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية: (الدرس 3-9)

46) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ **47)** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكل من الدوال الآتية: (الدرس 3-8)

48) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ **49)** $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3$

50) صندوق أبعاده 12in, 16in, 18in . ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كل بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985in^3؟ (الدرس 3-6)

حل كل معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة)

51) $5x - 7y = 12, x$ **52)** $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ **53)** $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$

4-2 العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق
درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن
- أجد كلًا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات
العلاقة العكسية
inverse relation
الدالة العكسية
inverse function

obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\,r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\,d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

السعودية	أمريكا
	0.267
3.75	

السعودية	أمريكا

إيجاد العلاقة العكسية : تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **والعلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكن الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي العلاقة العكسية — أضف إلى مطويتك

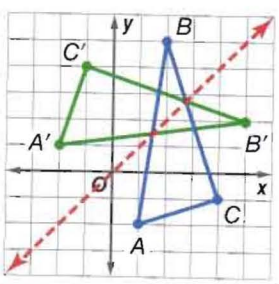
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

مثال 1 إيجاد العلاقة العكسية

هندسة : يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$. أوجد العلاقة العكسية لها. وصف تمثيلها البياني.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(-1, 4), (5, 2), (-2, 1)\}$.

من تمثيل الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية لها يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

1) هندسة : إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-6, -3), (-6, -8), (-3, -8)\}$ تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة **والدالة العكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$. أوجد $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $f^{-1}(x) = x + 4$

$f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

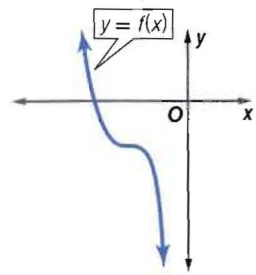
وبما أن كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

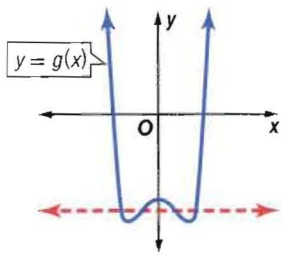
الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكن استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل، يمكن استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة. لذا يكون معكوس الدالة $y = f(x)$ يمثّل دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة. لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x وَ y في قاعدة الدالة.

مثال 2

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1 أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$

الخطوة 2 بدل بين كلٍ من المتغير x والمتغير y في المعادلة

$x = 2y - 5$

الخطوة 3 حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = 2y - 5$

$x + 5 = 2y$ بإضافة 5 للطرفين

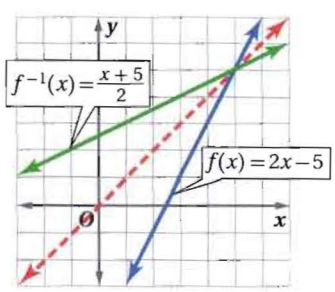
$\frac{x+5}{2} = y$ بقسمة الطرفين على 2

الخطوة 4 ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y.

$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.



ارشادات للدراسة

الدوال معكوس الدالة f في الفرع b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن الدالة f لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

b $f(x) = x^2 + 1$

الخطوة 1 $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

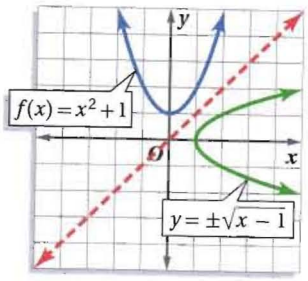
الخطوة 2 $x = y^2 + 1$

الخطوة 3 $x = y^2 + 1$

$x - 1 = y^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\pm\sqrt{x-1} = y$

الخطوة 4 $y = \pm\sqrt{x-1}$



مثّل بيانيًّا $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$

2B $f(x) = 3x^2$

التأكد من الدالة العكسية: يمكن تحديد إذا كانت دالتان تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كل من تركيبيهما. فإذا كان الناتج في كل منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = x$، فإن كل من الدالتين تمثل دالة عكسية للأخرى.

مفهوم أساسي — **الدالة العكسية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كل من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان تركيب كل منهما يساوي الدالة المحايدة.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $[f \circ g](x) = x$ و $[g \circ f](x) = x$.

تنبيه!

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ يساوي كلّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

مثال 3 — **التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى**

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ وضح إجابتك.

a $g(x) = \frac{1}{3}x - 3$ و $f(x) = 3x + 9$

تأكد بأن تركيب الدالتين $g(x), f(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{3}x - 3\right) = 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9 = x - 9 + 9 = x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)] = g(3x + 9) = \frac{1}{3}(3x + 9) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

إذن، تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

b $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

$$[f \circ g](x) = f(2\sqrt{x}) = 4(2\sqrt{x})^2 = 4(4x) = 16x$$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $g(x)$ و $f(x)$ لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك

3A $f(x) = 3x - 3 \, , g(x) = \frac{1}{3}x + 4$ **3B** $f(x) = 2x^3 - 1 \, , g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

تأكد

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$ **2)** $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

8) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$ **10)** $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $y = -2x + 1$

14) $h(x) = \frac{x-4}{3}$ **15)** $y = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $y = (x + 1)^2 + 3$

مثال 3 في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$

22) $f(x) = \frac{x+10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

24) $f(x) = (x + 6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$

25) $f(x) = 2\sqrt{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$.

a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) أوجد معكوس الدالة.

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2.

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد إذا كان معكوس كل دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا:

28) $f(x) = x^3 - 8$ **29)** $h(x) = 2x^2$ **30)** $g(x) = 3x + 7$

31) تسوق: اشترى خالد منتجًا عن طريق الإنترنت ودفع مبلغ 2500 ريال. فإذا كانت تكلفة التسوق عبر الإنترنت هي 3.5% من السعر الأصلي، وأجرة الشحن 223 ريالًا. فما السعر الأصلي للمنتج؟

32) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السليوسية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بين أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى.

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟

33) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) بيانيًا: مثّل الدوال $y = x^n$ بيانيًّا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) جدوليًا: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول.

c) تحليليًا: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.
"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالةً أيضًا."

35) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على دالة، ودالتها العكسية . وتحقق من أن كلًّا منهما دالة عكسية للأخرى.

36) تحد: أعط مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها.

37) اكتب: إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

38) إذا كان $g(x) = -x + 1$ ، $f(x) = x^2 + 3$، فأي مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟

A $x^2 - x + 2$ **C** $-x^3 + x^2 - 3x + 3$

B $-x^2 - 2$ **D** $x^2 - 2x + 4$

39) أيّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$ **C** $g(x) = 2x + 5$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$ **D** $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x + 5$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس: 1-4)

40) $g[f(3)]$ **41)** $f[h(-2)]$ **42)** $h[g(1)]$

43) مساحة: قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدةً على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2؟ (الدرس: 3-6)

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 3-1)

44) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **45)** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **46)** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **47)** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$

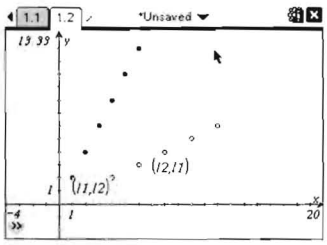
4-2 الدالة العكسية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لمقارنة دالة بمعكوسها، باستعمال الجداول والتمثيلات البيانية.

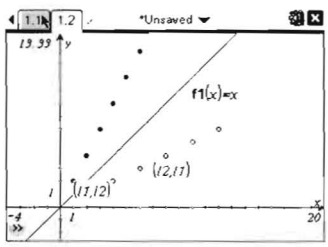
نشاط 1 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًا.

الخطوات:



- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1: New Doc ، ومنها اختر 4:Add Lists & Spreadsheet فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز $l1$ ثم اضغط enter ، واكتب في أعلى العمود B الرمز $l2$ ثم اضغط enter .
- أدخل قيم x في العمود $l1$ بالترتيب، وقيم y في العمود $l2$.
- اضغط مفتاح on واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط enter فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على menu واختر منها 3: Graph Type ومنها اختر 4: Scatter Plot ، فتظهر شاشة تتضمن مستوى إحداثيًا أسفله إشارة لقيم x, y .



- اضغط مفتاح var واختر $l1$ الموجودة عند x ثم تحرك بالسهم عند y ، ثم اضغط مفتاح var مرّة ثانية واختر $l2$ ، ثم اضغط enter .
- اضغط tab ، ثم أعد الخطوة السابقة باختيار $l2$ عند x ، $l1$ عند y ثم اضغط enter .
- اضغط menu ثم اختر منها 3: Graph Type ومنها اختر 1: Function ، ثم أدخل الدالة $f1(x) = x$ ثم اضغط enter .
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط menu ومنها 4: Window / Zoom واختر منها 6: Zoom – Quadrant 1 .

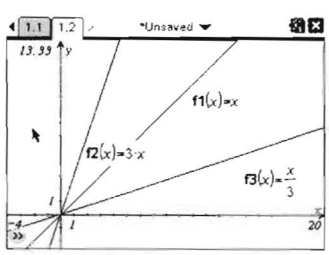
نشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ودالتها العكسية $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًا.

يمكن استعمال الآلة في تمثيل الدالة ومعكوسها بالضغط على المفاتيح:

on 1: New Doc 2:Add Graphs

ثم كتابة الدوال $f1(x) = x, f2(x) = 3x, f3(x) = \frac{x}{3}$ كما مرّ سابقًا، فيظهر التمثيل المطلوب.



تمارين: مثّل بيانيًا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

1) $f(x) = 5x$
2) $f(x) = x - 3$
3) $f(x) = 2x + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^2 - 3$

7) ما العلاقة بين التمثيل البياني لدالة والتمثيل البياني لمعكوسها ؟

8) **خمن:** ماذا يساوي $[(f \circ g)](x)$ لأي دالة $f(x)$ ودالتها العكسية $g(x)$ ؟

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

فيما سبق
درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية.

والآن
- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات
دالة الجذر التربيعي
square root function
الدالة الجذرية
radical function
متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

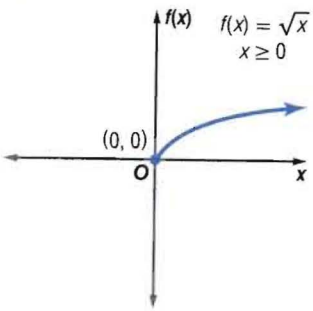
obeikaneducation.com

لماذا؟
يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x)=\sqrt{x}$
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$
المقطع x والمقطع y:	$x=0, f(x)=0$
غير معرّفة عندما:	$x<0$
سلوك الدالة عند طرفيها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

مثال 1 — تعيين المجال والمدى

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x)=\sqrt{x+4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط قيمًا يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

$x+4 \geq 0$ — اكتب المتباينة.

$x \geq -4$ — اطرح 4 من الطرفين.

وبالتالي المجال هو: $\{x \mid x \geq -4\}$.

أوجد $f(-4)$ لتعيين الحد الأدنى للمدى.

$f(-4)=\sqrt{-4+4}=0$

لذلك، فالمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

تحقق من فهمك

عين المجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

1A) $f(x)=\sqrt{x-3}$

1B) $f(x)=\sqrt{x+6}+2$

يمكنك تطبيق التحويلات على التمثيل البياني للدالة الرئيسية $\sqrt{x}$ للحصول على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

مفهوم أساسي تحويلات دوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك

$$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$$

h : إزاحة أفقية	k : إزاحة رأسية
إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة يميناً، إذا كانت h موجبة. إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة يساراً، إذا كانت h سالبة. المجال هو $\{x \mid x \geq h\}$.	إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى الأعلى، إذا كانت k موجبة. إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى الأسفل، إذا كانت k سالبة. المدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$.

a : الشكل والاتجاه

- إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x.
- إذا كانت $\lvert a \rvert > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا.
- إذا كانت $0 < \lvert a \rvert < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

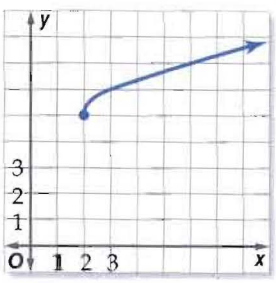
مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًا

مثّل بيانيًا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x-2} + 5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(h, k) = (2, 5)$. اعمل جدولاً من قيم x، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًا. تلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-2} + 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$، مع إزاحة وحدتين إلى اليمين، و5 وحدات إلى الأعلى. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y. المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

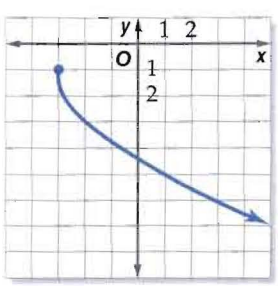
x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4



b) $y = -2\sqrt{x+3} - 1$

القيمة الصغرى للمجال عند $h = -3$. اعمل جدولاً من قيم x، حيث $x \geq -3$، مثل الدالة بيانيًا. بما أن a سالبة، فإن التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$، مع الانعكاس حول المستقيم $y = 0$. وإزاحة 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل وبما أن $\lvert a \rvert > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا.

x	y
−3	−1
−2	−3
−1	−3.8
0	−4.5
1	−5
2	−5.5
3	−5.9



المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$،
المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

تحقق من فهمك

مثّل بيانيًا كل دالة مما يلي، وحدد مجالها ومداها:

2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

2B) $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x-5} + 3$

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

قراءة الرياضيات

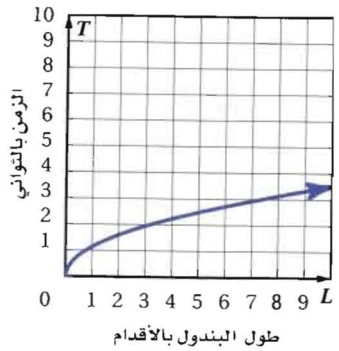
الدوال الأسية

دوال الجذر التربيعي هي دوال أسية أيضاً، فدالة الجذر التربيعي هي دالة أسية، أسها $\frac{1}{2}$.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكن تحديد الزمن T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le L \le 10$.



L	T
0	0
1	1.11
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51

b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **الصوت:** يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $F = 200\sqrt{T}$ ، حيث F تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، T كتلة ثقل قوة الشد مقيسة بالرطل. مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le T \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشد 3 أرطال.

إرشادات حل المسألة

عمل جدول يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

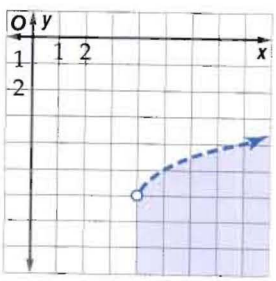
متباينات الجذر التربيعي: **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًّا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا

مثّل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \ge 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي« y أقل من »، فإن التمثيل البياني
للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.



تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

اختبر $(7, -5)$: $-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{7-4} - 6$

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{3} - 6$

$-5 < -4.27$ ✓

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من المتباينتين الآتيتين بيانيًّا:

(4A $f(x) \ge \sqrt{2x+1}$

(4B $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$

تأكد

مثال 1 عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x}$ **2)** $f(x) = \sqrt{x-5}$ **3)** $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$ **5)** $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$ **7)** $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 **8) محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال المعادلة: $v = 356\sqrt{d}$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر.

مثال 4 مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

9) $f(x) \geq \sqrt{x} + 4$ **10)** $f(x) \leq \sqrt{x-6} + 2$

11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$ **12)** $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **14)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **15)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

16) $f(x) = \sqrt{6x}$ **17)** $f(x) = -\sqrt{5x}$ **18)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **20)** $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **21)** $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3 **22) القفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالعلاقة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$. فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

23) العربة الدوّارة: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة في مدينة الألعاب أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالعلاقة: $V = \sqrt{v^2 + 64h}$، حيث v السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.

b) حتى يتحقق ما يريده المصمم كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10ft/s ؟

مثال 4 مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

24) $y < \sqrt{x-5}$

25) $y > \sqrt{x+6}$

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$

27) $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$

29) $y \leq 6 - 3\sqrt{x-4}$

الربط مع الحياة

توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى إرسال رسائل نصية من هواتفهم في أثناء القيادة.

30) **قيادة:** تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال المعادلة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افرض أن $f = 0.6$.

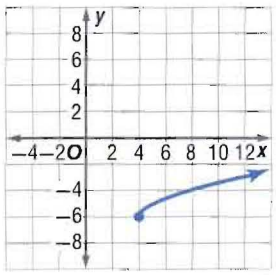
a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft.

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف وقوفًا تامًا؟

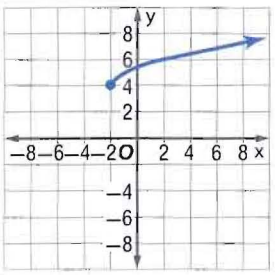
c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك.

اكتب دالة الجذر التربيعي لكل تمثيل بياني مما يأتي:

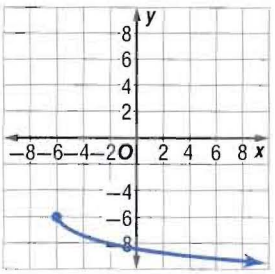
31)



32)



33)



34) عين المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$، ثم مثلها بيانيًّا.

35) **تمثيلات متعددة:** في هذا السؤال ستستعمل الدوال الثلاث الآتية لتكتشف التحويلات الهندسية لدوال الجذر التربيعي.

$h(x) = \sqrt{x+3} + 2$

$g(x) = \sqrt{16x+1} - 6$

$f(x) = 4\sqrt{x-6} + 3$

a) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا جميع الدوال السابقة على المستوى الإحداثي نفسه.

b) تحليليًّا: ما الانسحاب الذي أجريته على التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) لتمثل بيانيًّا كلًّا من الدوال السابقة؟

c) تحليليًّا: ما الدوال التي أظهر تمثيلها البياني اتساعًا أو ضيقًا رأسيًّا في التمثيل البياني للدالة الرئيسة؟ فسر إجابتك.

d) لفظيًّا: يبدو أن الدالتين المتسعتين رأسيًّا اتسعتا بالمقدار نفسه. فكيف يكون ذلك ممكنًا؟

e) جدوليًّا: اعمل جدولًا لمعدلات التغير في الدوال الثلاث بين 8 و12 وقارنها بمعدلات التغير بين 12 و16، وبناءً على ذلك، ما التعميم الذي يمكنك التوصل إليه فيما يخص معدل تغير دوال الجذر التربيعي؟

مسائل مهارات التفكير العليا

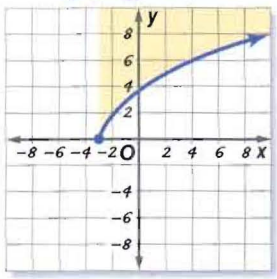
36) **تحد:** اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$، ومداها $\{y \mid y \leq 6\}$، وتمر بالنقطة $(5, 3)$.

37) **تبرير:** ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ؟

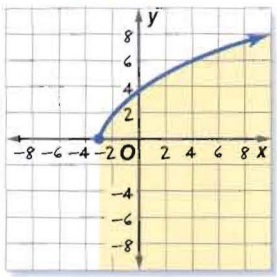
38) **اكتب:** وضح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة.

39) **اكتشف الخطأ:** مثل كل من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيهما إجابته صحيحة ؟ برر إجابتك

عبد الرحمن



عبد العزيز



تدريب على اختبار

40) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{-64x^6}{8x^3}$, $x \neq 0$:

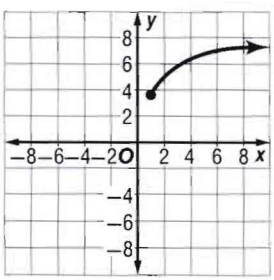
A $8x^2$

B $8x^3$

C $-8x^2$

D $-8x^3$

41) يمثّل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. أي مما يأتي صحيح؟



I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A I فقط **B** II , III فقط **C** I, II, III **D** III فقط

مراجعة تراكمية

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟ (الدرس: 2-4)

42) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$

43) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$

44) $f(x) = \frac{3x + 2}{5}$, $g(x) = \frac{5x - 2}{3}$

45) **زمن:** إذا كانت الصيغة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h والصيغة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d. فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (الدرس: 2-1)

حدد إذا كان كل عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)

46) 6.34 **47)** 3.787887888... **48)** 5.333... **49)** 1.25

4-4 الجذر النوني
nth Root

لماذا؟

لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالمعادلة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعد إيجاد الجذر التربيعي لعدد عملية عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني.

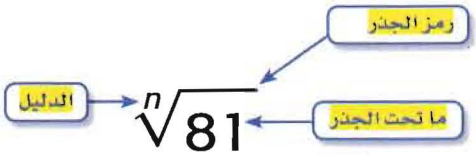
مفهوم أساسي — **تعريف الجذر النوني**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b، ولأي عدد صحيح موجب n، إذا كان $a^n = b$، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $(-3)^4 = 81$، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81، والعدد 3 يُسمى الجذر الرئيس.

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، وتكون n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر غير السالبُ يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

فيما سبق

درست دوال الجذر التربيعي.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- استعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات

الجذر النوني
nth root
رمز الجذر
radical sign
الدليل
index
ما تحت الجذر
radicand
الجذر الرئيس
principal root

obeikaneducation.com

مفهوم أساسي — الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$

مثال 1 — إيجاد الجذور

بسّط كلاً ممّا يأتي:

a $\pm\sqrt{16y^4}$

$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$

$= \pm 4y^2$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$

$= -(x^2-6)^4$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$

$= 3a^4b^5$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d $\sqrt[7]{128}$

$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

تحقق من فهمك

بسّط كلاً ممّا يأتي:

1A $\sqrt[3]{8x^6}$

1B $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2 — التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلاً مما يأتي:

a $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y.

b $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2|(x^2-3)^3|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة x^2-3 (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

تحقق من فهمك

بسّط كلاً مما يأتي:

2A $\sqrt{36y^6}$

2B $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$

إرشادات للدراسة

دليل الجذر إذا كان n عددًا فرديًا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها كأعداد عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

تجنب الحوادث: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، وb تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمر خلاله كل شهر.

افهم تريد إيجاد عدد الحوادث.

خطّط عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$= \sqrt[5]{1000^2}$ — $b = 1000$

≈ 15.85 — باستعمال الحاسبة

فهناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 15.85$

$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$ — برفع الطرفين للأس 5

$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$ — بالتبسيط

$1000 \approx b$ ✓ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي سارت على ذلك الطريق.

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$21 = \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 27$

$21^5 = b^2$ — برفع الطرفين للأس 5

$4084101 = b^2$ — بالتبسيط

$2021 \approx b$ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

تحقق من فهمك

3A) يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال القانون $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$.

3B) إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة.

تأكد

المثالان 1 , 2 بسّط كلاً مما يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$

3) $\sqrt{(y-6)^8}$

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$

5) $\sqrt[3]{-125}$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

7) $\sqrt{58}$

8) $-\sqrt{76}$

9) $\sqrt[5]{-43}$

10) $\sqrt[4]{71}$

مثال 3 **11) قمر اصطناعي:** إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالصيغة $\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض. فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت
$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$, $M = 5.98 \times 10^{24}\,kg$, $t = 2.6 \times 10^6 s$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 بسّط كلاً مما يأتي:

12) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ **14)** $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$

15) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt[5]{-243}$ **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$ **19)** $\sqrt[3]{a^{12}}$ **20)** $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ **22)** $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ **23)** $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

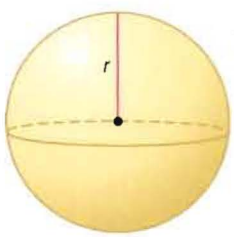
مثال 3 **24) شحن:** يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيْ أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$ والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة . جد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$.

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** $\sqrt{0.43}$ **28)** $\sqrt[5]{-4382}$ **29)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a) أوجد نصف قطر كل من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3, 8000\,cm^3, 64000\,cm^3$.

b) ما مقدار التغير في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسّط كلًا مما يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[4]{-16x^{16}y^8}$ **34)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

35) فيزياء: طوّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) الصيغة $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس ، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كانت سنة كوكب المريخ تساوي 687 يومًا أرضيًّا، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟

36) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$، العلاقة بين كتلة كائن حي بالكيلوجرام m ومتوسط الأيض اليومي له بالسعرات الحرارية P. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور.

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

الربط مع الحياة

الأيض هي عملية تجري داخل الخلية الحية، وفيها يتم تفكيك المواد الممتصة من الطعام مثل البروتينات والدهون وتحويلها إلى طاقة يستفيد منها جسم الكائن الحي في نشاطاته.

37) **تمثيلات متعددة:** سوف تستعمل في هذا السؤال كلًّا من: $f(x) = x^n, g(x) = \sqrt[n]{x}$ لاستكشاف المعكوس.

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا لكل من $f(x), g(x)$ مستعملاً $n = 4, n = 3$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من المعادلتين السابقتين بيانيًّا.

c) تحليليًّا: أي المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة متباينة؟

d) تحليليًّا: ماقيم n التي يكون عندها كل من الدالتين $f(x), g(x)$ معكوسًا للأخرى؟

e) لفظيًّا: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **تحد:** ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $\sqrt[3]{x} > x$؟

39) **مسألة مفتوحة:** أوجد عدداً يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.

40) **اكتب:** وضح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟

41) **تحد:** حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$.

تدريب على اختبار

42) ما قيمة w في المعادلة: $\frac{1}{2}(4w + 36) = 3(4w - 3)$؟

A 2

B 2.7

C 27

D 36

43) ما ناتج ضرب العددين المركبين $(5 - i)$ و $(5 + i)$؟

A 24

B 26

C $25 - i$

D $25 - 10i$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-3)

44) $y = \sqrt{x - 5}$

45) $y = \sqrt{x} - 2$

46) $y = 3\sqrt{x} + 4$

47) **صحة:** تبلغ كتلة طفل ولد حديثاً $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريبًا، والسنتميتر الواحد يساوي 0.3937in تقريبًا. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتميترات. (مهارة سابقة)

بسّط كلاً مما يأتي: (الدرس 3-3)

48) $(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19)$

49) $(2a^2 + 6)^2$

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

50) $(x + 4)(x + 5)$

51) $(x + 2y)(x - y)$

52) $2(w + z)(w - 4z)$

4-4 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذور النونية بيانيًّا.

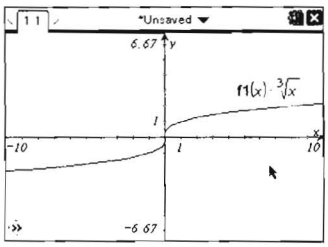
مثال 1 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

مثِّل بيانيًّا $y = \sqrt[3]{x}$.

- استعمل المفاتيح التالية بالترتيب.

on 1: New Doc 2:Add Graphs

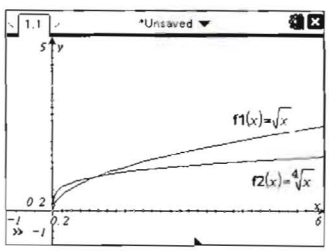
- أدخل الدالة الجذرية بالضغط على مفتاح ctrl ثم مفتاح ^ ، ثم أدخل الدالة. ثم اضغط enter فيظهر تمثيلها البياني.



مثال 2 دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين: $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[4]{x}$ بيانيًّا .

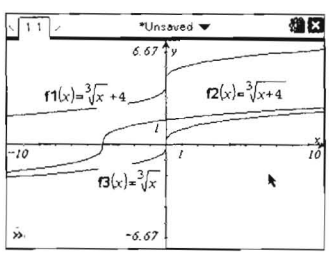
أدخل المعادلة $f1(x) = \sqrt{x}$ ومثلها مستعملًا الخطوات السابقة، ثم أدخل المعادلة $f2(x) = \sqrt[4]{x}$ فيظهر التمثيل البياني المجاور.



مثال 3 دوال الجذور النونية المختلفة فيما تحت الجذر

مثِّل الدوال الثلاث: $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x + 4}$, $y = \sqrt[3]{x} + 4$ بيانيًّا .

باستعمال الخطوات السابقة يظهر التمثيل البياني المجاور.



تمارين:

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

1) $y = \sqrt[4]{x}$ **2)** $y = \sqrt[4]{x+2}$ **3)** $y = \sqrt[4]{x} + 2$

4) $y = \sqrt[5]{x}$ **5)** $y = \sqrt[5]{x-5}$ **6)** $y = \sqrt[5]{x} - 5$

7) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت لما تحت الجذر على التمثيل البياني لدالة الجذر النوني؟

8) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت لدالة الجذر النوني على تمثيلها البياني؟

إذا كان $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ ، $g(x) = 5x - 2$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

1) $(f+g)(x)$
2) $(f-g)(x)$
3) $(f \cdot g)(x)$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
5) $[f \circ g](x)$
6) $[g \circ f](x)$

7) **مطاعم:** حصل سعيد على قسيمة خصم بنسبة 25% من المبلغ الإجمالي في أحد المطاعم. فإذا أضيف بدل خدمة بنسبة 6% إلى المبلغ الإجمالي بعد خصم نسبة القسيمة.

a) عبر عن المبلغ الإجمالي بعد خصم القسيمة، والمبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة مستعملاً رمز الدالة. اجعل x المبلغ قبل الخصم، $p(x)$ المبلغ بعد الخصم، $g(x)$ المبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة.

b) أي الدالتين الآتيتين تمثل المبلغ النهائي $p[g(x)], g[p(x)]$؟ وضح إجابتك.

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية أم لا :

8) $f(x) = 2x + 16$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$

9) $g(x) = 4x + 15$, $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$

10) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5 + x^{-2}$

11) $g(x) = -6x + 8$, $h(x) = \frac{8-x}{6}$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$

13) $f(x) = \frac{4}{9}(x-3)$

14) $h(x) = -\frac{10}{3}(x+5)$

15) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

16) **تنسيق حدائق:** تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق 25 ريالاً أجرة للمعدات، إضافة إلى 15 ريالاً عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 15h + 25$ تكلفة العمل لمدة h ساعة.

a) أوجد $f^{-1}(h)$. وماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة 85 ريالاً، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

17) $y < \sqrt{x-5}$

18) $y \le -2\sqrt{x}$

19) $y > \sqrt{x+9} + 3$

20) $y \ge \sqrt{x+4} - 5$

مثّل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال كل منهما ومداها:

21) $y = 2 + \sqrt{x}$

22) $y = \sqrt{x+4} - 1$

23) **اختيار من متعدد:** ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x+5}$؟

A $\left\{x \middle| x > \frac{5}{2}\right\}$

C $\left\{x \middle| x \ge \frac{5}{2}\right\}$

B $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{2}\right\}$

D $\left\{x \middle| x \ge -\frac{5}{2}\right\}$

بسّط كلاً مما يأتي:

24) $\sqrt{121a^4b^{18}}$

25) $\sqrt{(x^4+3)^{12}}$

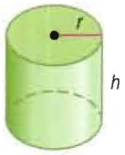
26) $\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$

27) $\sqrt[5]{-(y-6)^{20}}$

28) $\sqrt[3]{8(x+4)^6}$

29) $\sqrt[4]{16(y+x)^8}$

30) **اختيار من متعدد:** نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\ \text{in}^3$ ؟



A 2.53 in

B 5.42 in

C 7.94 in

D 24.92 in

31) **إنتاج:** إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية h ساعة عمل يُعبر عنه عمل بالدالة: $P(h) = 40h$.

a) أوجد $C[p(h)]$.

b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل.

4-5 العمليات على العبارات الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق

درستُ تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني.

والآن

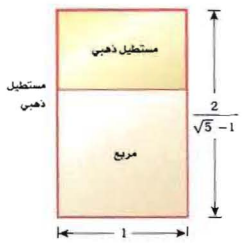
- أبسّط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات

إنطاق المقام
rationalizing the denominator
الجذور المتشابهة
like radical expressions
المرافق
conjugate

obeikaneducation.com

لماذا؟



عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا.
وسنتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

مفهوم أساسي — **خاصية ضرب الجذور** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًا.

مثال: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ و $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة، يجب أن لا يحتوي ما تحت الجذر عوامل هي قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 — **تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب**

بسّط كلًّا مما يأتي:

a $\sqrt{32x^8}$

$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة
$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور
$= 4x^4\sqrt{2}$ — بالتبسيط

b $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4
$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$ — خاصية ضرب الجذور
$= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$ — بالتبسيط

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا، فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$.

تحقق من فهمك

1A $\sqrt{12d^3c^{12}}$

1B $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي — خاصية قسمة الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

أمثلة: $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{27}{3}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلًا:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

مثال 2 — تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

(a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$ — بالتبسيط

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ — إنطاق المقام

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$ — $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

(b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

$\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$ — إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$ — بالضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$ — $\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

تحقق من فهمك

(2A) $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$ $\qquad$ **(2B)** $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

تبسيط العبارات الجذرية

أضف إلى مطويتك

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- **إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.**
- **إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.**
- **إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.**
- **إذا لم توجد جذور في المقام.**

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{-12ab^4 \cdot 18a^2b^2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^2 \cdot 3 \cdot ab^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2}$ بتحليل الثوابت

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6}$ بتجميع العوامل على صورة أسس تكعيبية، إذا أمكن ذلك

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ بالتبسط

$= -90ab^2$ بالضرب

تحقق من فهمك

بسّط العبارات الجذرية الآتية:

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$

يمكن جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع أحاديات الحدود أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية و طرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

$\sqrt{98} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$ بتبسيط العبارات الجذرية

$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ بالضرب

$= -\sqrt{2}$ $(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع أحاديات الحدود وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6) = 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\cdot(-6) + 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cdot(-6)$$

خاصية ضرب الجذور $= 12\sqrt{3\cdot 2} - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2^2} - 30\sqrt{2}$

بالتبسيط $= 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

بسط كلًّا من:

(5A $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$

(5B $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

إرشادات للدراسة

المُرافق حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تعتبر كلٌّ من ثنائيتي الحدود اللتين على الصورة $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}, a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة معمارية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

$\sqrt{5}+1$ مرافق لـ $\sqrt{5}-1$ $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$

بالضرب $= \frac{2\sqrt{5}+2(1)}{(\sqrt{5})^2+1(\sqrt{5})-1(\sqrt{5})-1(1)}$

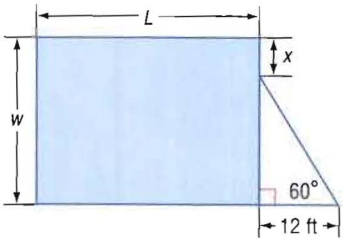
بالتبسيط $= \frac{2\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}$

بالطرح $= \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$

بالتبسيط $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

تحقق من فهمك

6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ \text{ft}^2$، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



تأكد

الأمثلة 1-5 بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

(1 $\sqrt{36ab^4c^5}$

(2 $\sqrt{144x^7y^5}$

(3 $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}$

(4 $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}$

(5 $5\sqrt{2x}\cdot 3\sqrt{8x}$

(6 $3\sqrt[3]{36xy}\cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$

(7 $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$

(8 $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

9) $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$

10) $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

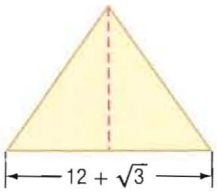
11) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+3}$

12) $\dfrac{8}{\sqrt{6}-5}$

13) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

14) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$

مثال 6 **15)** **هندسة:** أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $189+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4 بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

16) $\sqrt{72a^8b^5}$

17) $\sqrt{9a^{15}b^3}$

18) $\sqrt{18a^6b^3c^5}$

19) $\sqrt{\dfrac{7x}{10y^3}}$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$

21) $\sqrt[4]{\dfrac{7x^3}{4b^2}}$

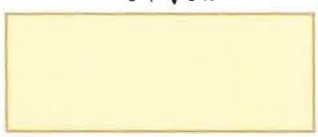
22) $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$

23) $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

24) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$

25) $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$

26) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.



المثالان 5, 6 بسّط كلًا من العبارات الجذرية الآتية:

27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$

28) $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$

29) $\dfrac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

30) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

31) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$

32) $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

بسّط كلًا من العبارات الجذرية الآتية:

33) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$

34) $\sqrt[4]{\dfrac{12x^3y^2}{5a^2b}}$

35) $\dfrac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$

36) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

37) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

38) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

39) **تفاح:** يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالصيغة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات.

الربط مع الحياة

يطفو التفاح الطازج على الماء لأن 25% من حجمه هواء.

بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

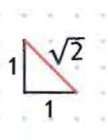
40) $\sqrt[b]{a^b}$

41) $\sqrt[b]{a^{4b}}$

42) $\sqrt[b]{a^{2b}}$

43) $\sqrt[b]{a^{3b}}$

44) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة.



a) عدديًا: انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

b) بيانيًا: زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c) تحليليًا: استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}=2$.

d) بيانيًا: استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعة $\sqrt{2}$ وحدة.

e) عدديًا: برهن على أن مساحة المربع تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

خالد

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

46) تحد: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1.

47) تبرير: ما قيم a، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسر إجابتك.

48) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا.

49) اكتب: وضّح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما .

تدريب على اختبار

50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$؟

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلاًّ من العبارات الجذرية الآتية:

51) $\sqrt{81x^6}$ **52)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ **53)** $\sqrt{(g+5)^2}$

54) مثّل المتباينة $y \le \sqrt{x-2}$ بيانيًّا. (الدرس: 3-1)

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس: 3-6)

55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ **56)** $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$ **57)** $27x^3 + 1 = 0$

58) قوارب: تربح شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (الدرس: 3-6)

أوجد ناتج كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ **60)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **61)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

4-6 الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق
درست استعمال خصائص الأسس.

والآن
- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أبسّط عبارات أسية أو جذرية.

obeikaneducation.com

لماذا؟
يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتماداً على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدل التضخم، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلاً يمكن أن تستعمل الصيغة

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ اكتبه على صورة حاصل ضرب

$= b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ اجمع الأسس

$= b^1 = b$ بسّط

لذا فإن، $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b. إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

$b^{\frac{1}{n}}$

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي b، وأي عدد صحيح موجب n، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

$\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

تحقق من فهمك

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية.

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية.

1C) اكتب $d^{\frac{7}{4}}$ على الصورة الجذرية.

1D) اكتب $\sqrt[3]{c^{-5}}$ على الصورة الأسّية.

وبشكل عام يمكن تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي الأسس النسبية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = \left(\sqrt[y]{b}\right)^x$ لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًّا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$, $(-16)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{-16}\right)^3 = (4i)^3 = -64i$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مثال 2 إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$

$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$ — $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$ — $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$ — $81 = 3^4$

$= \frac{1}{3}$ — بالتبسيط

b) $216^{\frac{2}{3}}$

$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$ — $216 = 6^3$

$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$ — خاصية قوة القوة

$= 6^2$ — ضرب الأسس

$= 36$ — بالتبسيط

تحقق من فهمك

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$

2B) $256^{\frac{3}{8}}$

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافرض أن ثمن جهاز تبريد الماء الآن 390 ريالاً. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3% ؟

الصيغة — $P = c(1 + r)^n$

$= 390(1 + 0.053)^{\frac{1}{2}}$ — $c = 390, r = 0.053, n = \frac{\text{6 أشهر}}{\text{12 شهرًا}} = \frac{1}{2}$

≈ 400.20 — باستعمال الحاسبة

$400.20 - 390.00 = 10.20$ إذًا سيزيد ثمن جهاز تبريد الماء بعد ستة أشهر بمقدار 10.20 ريال تقريبًا.

الربط مع الحياة

التضخم المالي هو الارتفاع المتزايد في أسعار السلع والخدمات خلال فترة زمنية معينة.

تحقق من فهمك

3) افرض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالات. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية. لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة، لذلك؛ يمكن أن يكون من الضروري إنطاق المقام.

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كل عبارة مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{6}{7}}$ جمع الأسس

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$ $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ لماذا نضرب في $\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ ؟

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$ $b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$ $b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$

تحقق من فهمك

4A) $p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

4B) $r^{-\frac{4}{5}}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات: عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلاً من كتابة العبارة على الصورة الجذرية.

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كل عبارة مما يأتي:

a) $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ الأسس النسبية

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ $27 = 3^3$

$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ خاصية قوة القوة

$= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ خاصية قسمة قوتين

$= 3^{\frac{1}{4}}$ بالتبسيط

$= \sqrt[4]{3}$ إعادة كتابة العبارة على الصورة الجذرية

b) $\sqrt[3]{64z^6}$

$\sqrt[3]{64z^6} = (64z^6)^{\frac{1}{3}}$ الأسس النسبية

$= (8^2 \cdot z^6)^{\frac{1}{3}}$ $64 = 8^2$

$= 8^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{6}{3}}$ خاصية قوة القوة

$= 4z^2$ $8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} - 2}$ $3x^{\frac{1}{2}} - 2$ مرافق لـ $3x^{\frac{1}{2}} + 2$

بالضرب $= \dfrac{3x^{\frac{2}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x^{\frac{2}{2}} - 4}$

بالتبسيط $= \dfrac{3x - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x - 4}$

تحقق من فهمك

(5A $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$ **(5B** $\sqrt[3]{16x^4}$ **(5C** $\dfrac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2}$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

أضف إلى مطويتك

ملخص المفاهيم

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر / الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

(1 $10^{\frac{1}{4}}$ **(2** $x^{\frac{3}{5}}$ **(3** $\sqrt[3]{15}$ **(4** $\sqrt[4]{7x^6y^9}$

مثال 2 أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(5 $343^{\frac{1}{3}}$ **(6** $32^{-\frac{1}{5}}$ **(7** $125^{\frac{2}{3}}$ **(8** $\dfrac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$

مثال 3 **(9** إذا علمت مساحة مربع، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل 169m^2، فما طول ضلعها؟

المثالان 4, 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(10 $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ **(11** $\dfrac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ **(12** $\dfrac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$

(13 $\sqrt[4]{9g^2}$ **(14** $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ **(15** $\dfrac{g^{\frac{1}{2}} - 1}{g^{\frac{1}{2}} + 1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسّية في كل مما يأتي:

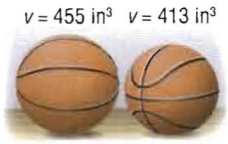
(16 $8^{\frac{1}{5}}$ **(17** $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ **(18** $\sqrt{17}$ **(19** $\sqrt[4]{625x^2}$

مثال 2 أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(20 $27^{\frac{1}{3}}$ **(21** $256^{\frac{1}{4}}$ **(22** $16^{-\frac{1}{2}}$ **(23** $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

مثال 3

24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يعبر عنه بالعلاقة $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$:



a) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير.

b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير.

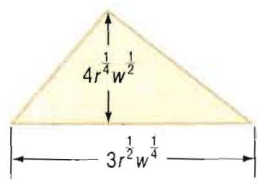
المثالان 4, 5

بسّط كل عبارة مما يأتي:

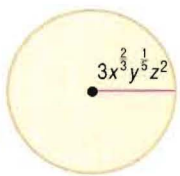
25) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ **26)** $y^{-\frac{4}{5}}$ **27)** $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **28)** $\sqrt[4]{25x^2}$ **29)** $\frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

30)



31)



32) ما أبسط صورة للعبارة $18^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$ ؟

الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لأحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

33) $a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$ **34)** $\left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ **35)** $\sqrt[6]{216}$ **36)** $w^{-\frac{7}{8}}$

37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ فأجب عما يأتي:

a) كم يصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟

b) اعمل جدولاً يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.

d) قرر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا. ووضح إجابتك.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

38) $\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}}$ **39)** $\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2}$ **40)** $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ **41)** $\sqrt{23} \cdot \sqrt[3]{23^2}$

42) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **43)** $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$ **44)** $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$ **45)** $\frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a) جدوليًا: انسخ الجدول المجاور، وأكمله.

x	$f(x)$	$g(x)$
−2		
−1		
0		
1		
2		

b) بيانيًا: مثّل بيانيًا كلًّا من: $f(x), g(x)$.

c) لفظيًا: ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) تبرير: حدد إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك.

48) اكتشف الخطأ: بسَّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

محمود

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}}$$

علي

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

49) مسألة مفتوحة: أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كل منهما 2 .

50) اكتب: وضح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

تدريب على اختبار

51) تكون العبارة $\sqrt{56-c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي:

A 8 **B** -8 **C** 56 **D** 36

52) ماقيمة p التي تحقق المعادلة: $p = 3^3 \cdot 3^5$؟

A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2 **D** 2^3

مراجعة تراكمية

بسّط كلاً مما يأتي: (الدرس 5-4)

53) $\sqrt{243}$ **54)** $\sqrt[3]{16y^3}$ **55)** $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$

56) فيزياء: تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \text{N/m}^2, d = 10^3\ \text{kg/m}^3$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس 5-4)

أوجد $p(x+h), p(-4)$ لكل دالة مما يأتي: (الدرس 2-1)

57) $p(x) = x - 2$ **58)** $p(x) = -x + 4$ **59)** $p(x) = 6x + 3$

60) $p(x) = x^2 + 5$ **61)** $p(x) = x^2 - x$ **62)** $p(x) = 2x^3 - 1$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ لكل دالتين فيما يأتي: (الدرس 1-4)

63) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

64) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 5-4)

65) $(\sqrt{x-3})^2$ **66)** $(\sqrt[3]{3x-4})^3$ **67)** $(2\sqrt{x}-5)^2$

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية
Solving Radical Equations and Inequalities

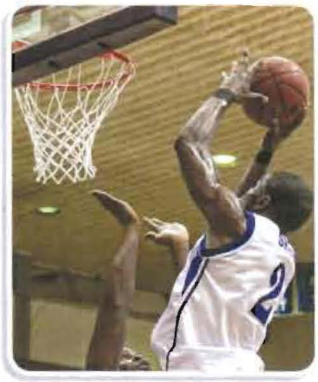
فيما سبق
درست حل معادلات كثيرات الحدود.

والآن
- أحل معادلات تحتوي جذورًا.
- أحل متباينات تحتوي جذورًا.

المفردات
المعادلة الجذرية
radical equation
الحل الدخيل
extraneous solution
المتباينة الجذرية
radical inequality

obeikaneducation.com

لماذا؟



عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا. فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

مفهوم أساسي — **حل المعادلات الجذرية**

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2 ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3 حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا دخيلًا**.

مثال 1 — **حل معادلات جذرية**

حلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{x+2} = 3$	بطرح 4 من الطرفين لفصل الجذر
$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$	بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر
$x + 2 = 9$	بإيجاد مربع الطرفين
$x = 7$	بطرح 2 من الطرفين

تحقق:

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7+2} + 4 \stackrel{?}{=} 7$	عوض عن x بالعدد 7
$7 = 7$ ✓	بالتبسيط

b) $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{x-12})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$	بتربيع الطرفين
$x - 12 = 4 - 4\sqrt{x} + x$	بإيجاد مربع الطرفين
$-16 = -4\sqrt{x}$	بطرح $x + 4$ من الطرفين لفصل الجذر
$4 = \sqrt{x}$	بقسمة الطرفين على -4
$16 = x$	بتربيع الطرفين

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

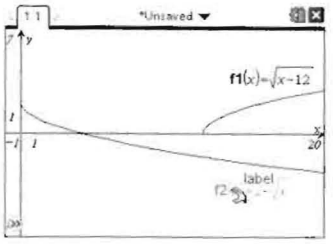
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تحقق $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{16-12} \stackrel{?}{=} 2 - \sqrt{16}$

$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2 - 4$

$2 \neq -2$



يكون حل هذه المعادلة، دخيلًا. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y = \sqrt{x-12}$ ، والمعادلة $y = 2 - \sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لا يوجد حل حقيقي.

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

1A) $5 = \sqrt{x-2} - 1$ **1B)** $\sqrt{x+15} = 5 + \sqrt{x}$

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حل المعادلة: $2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$.

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي) يجب أولًا جعل المقدار المرفوع للأس $\frac{1}{3}$ في طرف لوحده، ثم رفع طرفي المعادلة للأس 3.

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 4$	بإضافة العدد 4 للطرفين
$(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$	بقسمة الطرفين على العدد 2
$\left[(6x-3)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 2^3$	بتكعيب الطرفين
$6x - 3 = 8$	بإيجاد مكعب الطرفين
$6x = 11$	بإضافة العدد 3 للطرفين
$x = \frac{11}{6}$	بقسمة الطرفين على العدد 6

تحقق:

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2\left(6 \cdot \frac{11}{6} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	عوض عن x بالعدد $\frac{11}{6}$
$2(8)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	بالتبسيط
$2(2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$	الجذر التكعيبي للعدد 8 هو 2
$0 = 0$ ✓	بالطرح

تحقق من فهمك

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

2A) $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$ **2B)** $3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي تعبير ارفعه للأس n.

مثال 3 على اختبار

ما حل المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 11

$3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$	المعادلة الأصلية
$3(\sqrt[4]{2n+6}) = 6$	بإضافة العدد **6** للطرفين
$\sqrt[4]{2n+6} = 2$	بقسمة الطرفين على **3**
$(\sqrt[4]{2n+6})^4 = 2^4$	برفع الطرفين للأس **4**
$2n + 6 = 16$	بإيجاد ناتج كل من الطرفين
$2n = 10$	بطرح **6** من الطرفين
$n = 5$	إذن الجواب هو **C**

تحقق من فهمك

3) ما حل المعادلة: $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$؟

A $x = 7$ **B** $x = 25$ **C** $x = 29$ **D** $x = 37$

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضًا حل سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لإختيار الحل الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة .

حل المتباينات الجذرية: **المتباينة الجذرية** هي متباينة تحوي متغيرًا في الصورة الجذرية. ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حل المتباينات الجذرية

الخطوة 1 إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، فعين قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.

الخطوة 2 حل المتباينة جبريًّا.

الخطوة 3 اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

مثال 4 حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \leq 8$.

الخطوة 1: بما أن ما تحت الجذر التربيعي يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفرًا، فحّل أولًا $5x - 10 \geq 0$ لتعين قيم المتغير x التي تجعل الطرف الأيسر من المتباينة معرّفًا.

$5x - 10 \geq 0$	ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفر
$5x \geq 10$	بإضافة العدد **10** للطرفين
$x \geq 2$	بقسمة الطرفين على العدد **5**

الخطوة 2: حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \leq 8$

$3 + \sqrt{5x - 10} \leq 8$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{5x - 10} \leq 5$	بطرح العدد **3** من الطرفين لفصل الجذر
$5x - 10 \leq 25$	بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر
$5x \leq 35$	بإضافة العدد **10** للطرفين
$x \leq 7$	بقسمة الطرفين على العدد **5**

إرشادات الاختبار

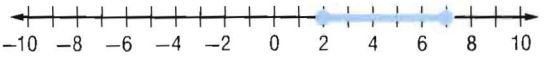
المتباينات الجذرية

بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالبًا أبدًا، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \leq c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل.

الخطوة 3: يبدو أن حل المتباينة هو $2 \le x \le 7$. ويمكنك اختبار بعض قيم x للتأكد من الحل. استعمل ثلاث قيم؛ إحداها أقل من 2، والأخرى تقع بين 2 و 7، والثالثة أكبر من 7. ونظم النتائج في جدول:

$x = 0$	$x = 4$	$x = 9$
$3 + \sqrt{5(0) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ $3 + \sqrt{-10} \le 8$ ✗ وبما أن $\sqrt{-10}$، ليس عددًا حقيقيًا فإن المتباينة لا تتحقق.	$3 + \sqrt{5(4) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ $6.16 \le 8$ ✓ وبما أن $6.16 \le 8$، فإن المتباينة تتحقق.	$3 + \sqrt{5(9) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ $8.92 \le 8$ ✗ وبما أن $8.92 \not\le 8$، فإن المتباينة لا تتحقق.

تم التحقق من حل المتباينة. والقيم التي تقع في الفترة $2 \le x \le 7$ فقط هي التي تحقق المتباينة. ويمكنك تمثيل الحل على خط الأعداد كما يأتي:



تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي:

(4A) $\sqrt{2x + 2} + 1 \ge 5$ **(4B)** $\sqrt{4x - 4} - 2 < 4$

تأكد

المثالان 1, 2 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

(1) $\sqrt{x - 4} + 6 = 10$ **(2)** $\sqrt{x + 13} - 8 = -2$

(3) $8 - \sqrt{x + 12} = 3$ **(4)** $\sqrt[3]{x - 2} = 3$

(5) $(x - 5)^{\frac{1}{3}} - 4 = -2$ **(6)** $(4y)^{\frac{1}{3}} + 3 = 5$

(7) $\sqrt{y} - 7 = 0$ **(8)** $2 + 4z^{\frac{1}{2}} = 0$

(9) $5 + \sqrt{4y - 5} = 12$ **(10)** $\sqrt{2t - 7} = \sqrt{t + 2}$

(11) فيزياء: يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، ويساوي $32\,\text{ft/s}^2$.

a) ما الزمن الدوري لبندول ضخم طوله 73 ft ؟

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5 s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

مثال 3 **(12) اختيار من متعدد:** حل المعادلة $(2y + 6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو:

A $y = 1$ **B** $y = 5$ **C** $y = 11$ **D** $y = 15$

مثال 4 حل كل متباينة مما يأتي:

(13) $\sqrt{3x + 4} - 5 \le 4$ **(14)** $\sqrt{b - 7} + 6 \le 12$

(15) $2 + \sqrt{4y - 4} \le 6$ **(16)** $\sqrt{3a + 3} - 1 \le 2$

(17) $1 + \sqrt{7x - 3} > 3$ **(18)** $\sqrt{3x + 6} + 2 \le 5$

(19) $-2 + \sqrt{9 - 5x} \ge 6$ **(20)** $6 - \sqrt{2y + 1} < 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

21) $6+\sqrt{3x+1}=11$

22) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$

23) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$

24) $2+\sqrt{3y-5}=10$

25) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$

26) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$

27) فيزياء: تصف الصيغة: $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65 m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟

مثال 2 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

28) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$

30) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$

32) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$

مثال 3 **34) اختيار من متعدد:** حل المعادلة: $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو:

A 23 **B** 53 **C** 123 **D** 623

مثال 4 حُلّ كل متباينة مما يأتي:

35) $\sqrt{2x+14}-6\geq 4$

36) $10-\sqrt{2x+7}\leq 3$

37) $6+\sqrt{3y+4}<6$

38) $\sqrt{d+3}+\sqrt{d+7}>4$

39) $\sqrt{2y+5}+3\leq 6$

40) $-2+\sqrt{8-4z}\geq 8$

41) $-3+\sqrt{6a+1}>4$

42) $\sqrt{2}-\sqrt{b+6}\leq -\sqrt{b}$

43) بندول: تمثل الصيغة $s=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{32}}$ الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث ℓ طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته.

44) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L=0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M.

45) زمن التحليق: عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزة زمن تحليقها 0.98 ثانية.

46) رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة $M=512-146230B^{-\frac{8}{5}}$، لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470 kg على الأكثر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) تحد: قالت عائشة أنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حل حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}}=-4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضح إجابتك.

48) أي معادلة مما يأتي ليس لها حل؟

$\sqrt{x-1}+3=4$	$\sqrt{x+1}+3=4$
$\sqrt{x-2}+7=10$	$\sqrt{x+2}-7=-10$

49) **تبرير:** حدد إذا كانت $x=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$ ، صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًّا. وضح إجابتك.

50) **مسألة مفتوحة:** اختر عددًا كليًّا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

51) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلها برفع كلا الطرفين للأس المعطى:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{8}$

52) **تحد:** حُلّ المعادلة: $7^{3x-1}=49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x=b^y$ إذا وفقط إذا كان $x=y$).

53) **اكتب:** وضح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلها.

تدريب على اختبار

54) أي المجموعات الآتية تمثل دالة؟

A $\{(3,0),(-2,5),(2,-1),(2,9)\}$

B $\{(-3,5),(-2,3),(-1,5),(0,7)\}$

C $\{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2)\}$

D $\{(3,1),(-3,2),(3,3),(-3,4)\}$

55) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in. فما طول الضلع الثالث؟

56) ما حل المعادلة $\sqrt{x+5}+1=4$ ؟

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كل مما يأتي: (الدرس 6-4)

57) $27^{-\frac{2}{3}}$ **58)** $9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{5}{3}}$ **59)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

60) **هندسة:** العبارتان $4x^2y^2$ ، $8x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارةً ثالثةً تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس 6-4)

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: (الدرس 2-4)

61) $y=3x-4$ **62)** $y=-2x-3$ **63)** $y=x^2$ **64)** $y=(2x+3)^2$

حل كل معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

65) $\frac{3}{10}=\frac{12}{25}a$ **66)** $\frac{6}{7}=9m$ **67)** $\frac{9}{8}b=18$ **68)** $\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}$

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات الجذرية. وإحدى طرق الحل هي إعادة كتابة المعادلة أو المتباينة بحيث يكون أحد طرفيها صفرًا، ثم استعمال ميزة **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحل.

مثال 1 المعادلة الجذرية

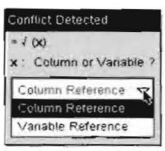
حل المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

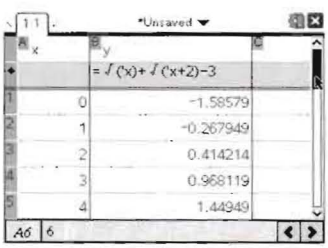
- اطرح العدد 3 من طرفي المعادلة لتحصل على المعادلة

$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3 = 0$.

الخطوة 2 استعمل جدولًا وقدّر الحل.



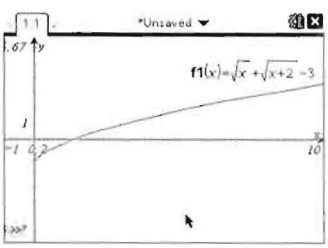
- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب: 1: New Doc ⊞4:Add Lists & Spreadsheet
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x ثم أدخل قيمًا تختارها لِـ x .
- سمِّ رأس العمود B بالرمز y واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$. ثم اضغط enter فتظهر شاشة اختر منها Variable Reference ثم اضغط enter فتحصل على الجدول المطلوب.



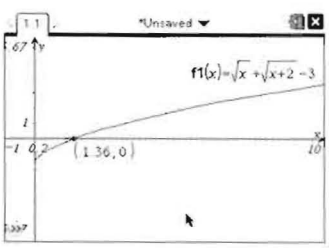
بما أن إشارة الدالة تتغير من سالب إلى موجب بين $x = 2$, $x = 1$ فهناك حل بين العددين 2 , 1.

الخطوة 3 استعمل ميزة التقاطع و أوجد الحل.

- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب:
  on 1. New Doc Ψ2:Add Graphs
- اكتب الدالة: $f1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$
  ثم اضغط enter فيظهر التمثيل البياني المجاور.



- أوجد نقطة تقاطع الدالة والمحور x بالضغط على المفاتيح:
  menu 7: Points & Lines 3: Intersection Point(s)



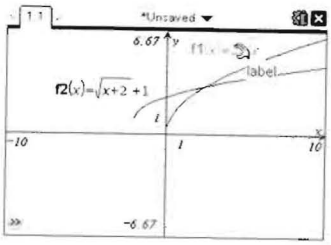
ثم الضغط على كل من منحنى الدالة والمحور x فتظهر نقطة التقاطع كما في الشكل المجاور.
فيكون الحل هو 1.36 تقريبًا وهو يقع بين العددين 2 , 1 كما تبين في الخطوة 2 .

مثال 2 المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} + 1$.

الخطوة 1 ارسم طرفي المتباينة

- مثّل المعادلة المرتبطة بالطرف الأيسر $f1(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًّا، والمعادلة المرتبطة بالطرف الأيمن $f2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ بيانيًّا فتظهر الشاشة التالية:



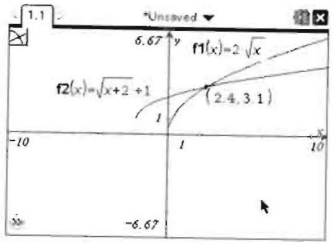
تبين الشاشة في الأعلى أنه للنقاط التي تقع على يسار نقطة تقاطع المنحنيين تكون عندها، $f1 < f2$ أي $2\sqrt{x} < \sqrt{x+2} + 1$. ولحل المتباينة الأصلية، يجب أن تجد النقاط التي تكون عندها $f1 > f2$. وهذه النقاط تقع على اليمين من نقطة تقاطع المنحنيين.

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع intersection Points.

- يمكنك استعمال ميزة نقاط التقاطع بالضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب:

menu ▸ 7: Points & Lines ⨯ 3: Intersection Point(s)

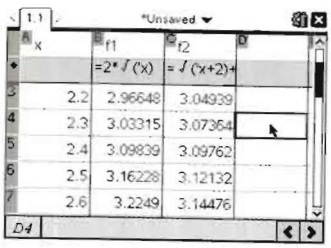
- ثم اضغط على كلا المنحنيين فتظهر الشاشة التالية:



تبين الشاشة في الأعلى أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 2.40 تقريبًا. لذلك فإن الحل التقريبي للمتباينة هو $x > 2.40$. استعمل الرمز $>$ في الحل؛ لأنه الرمز الموجود في المتباينة الأصلية.

الخطوة 3 تحقق من حلّك باستعمال ميزة table

- اضغط مفتاح on ، اختر الجدول.
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا عشرية بين العددين الصحيحين 3 ، 2 .
- سمِّ رأس العمود B بالرمز f1، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $f1(x) = 2\sqrt{x}$ ثم اضغط enter.
- سم رأس العمود C بالرمز f2، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $f2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ ثم اضغط enter فيظهر الشكل المجاور.



لاحظ أنه عندما تكون x أقل من أو تساوي 2.4، فإن $f1 < f2$.

وهذا يثبت أن الحل هو $\{x | x > 2.40\}$.

تمارين:

استعمل طريقة التمثيل البياني لحل كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{x+4} = 3$

2) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+4}$

3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 4$

4) $\sqrt{x-3} \geq 2$

5) $\sqrt{x+3} > 2\sqrt{x}$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 4$

7) **اكتب:** وضح كيف يمكنك تطبيق الأسلوب المتبع في حل المثال الأول لحل متباينة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 4-1)

العملية	التعريف
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
التركيب	$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي (الدرسان 4-2, 4-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.

جذور الأعداد الحقيقية. (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد b، $\sqrt[n]{b}$ ، $-\sqrt[n]{b}$			
n	إذا كان $b>0$ فإن $\sqrt[n]{b}$	إذا كان $b<0$ فإن $\sqrt[n]{b}$	إذا كان $b=0$ فإن $\sqrt[n]{b}$
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

العبارات الجذرية (الدروس 4-5 إلى 4-7)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وَ n, x, y أعداد صحيحة حيث $n>1, y>1, b\neq 0$ يُعد كل مما يأتي صحيح.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=\left(\sqrt[y]{b}\right)^x, b\geq 0$

عندما تكون جميع الجذور معرفة.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

تركيب دالتين (175) — ما تحت الجذر (193)
العلاقة العكسية (181) — الجذر الرئيس (193)
دالة عكسية (181) — إنطاق المقام (201)
دالة الجذر التربيعي (187) — الجذور المتشابهة (202)
الدالة الجذرية (187) — المرافق (203)
متباينة الجذر التربيعي (189) — المعادلة الجذرية (212)
الجذر النوني (193) — الحل الدخيل (212)
رمز الجذر (193) — المتباينة الجذرية (214)
الدليل (193)

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) عند _____، تستعمل قيم دالة منهما لحساب قيم الدالة الأخرى.

2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمّى _____.

3) للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمّى _____.

4) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد _____.

5) دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____.

6) _____. هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية.

7) إذا ساوى كل من تركيبي دالتين الدالة المحايدة فإن كلتاهما تكون _____ للأخرى.

8) تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالًا على: _____

مراجعة الدروس

4-1 العمليات على الدوال (الصفحات: 174-180)

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ لكل مما يأتي:

9) $f(x) = 2x + 1$
$g(x) = 4x - 5$

10) $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = x - 7$

11) $f(x) = x^3$
$g(x) = x - 1$

12) $f(x) = 4x$
$g(x) = 5x - 1$

13) قياسات: تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل الياردات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل بوصات n إلى أقدام f. اكتب الصيغة التي تحول الياردات إلى بوصات.

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2 + 3, g(x) = 3x - 2$ فأوجد كلًّا من $g[f(x)], f[g(x)]$.

$g[f(x)] = 3(x^2 + 3) - 2$ بالتعويض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$

$= 3x^2 + 9 - 2$ بالضرب

$= 3x^2 + 7$ بالتبسيط

$f[g(x)] = (3x - 2)^2 + 3$ بالتعويض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$

$= 9x^2 - 12x + 4 + 3$ بالضرب

$= 9x^2 - 12x + 7$ بالتبسيط

4-2 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات: 181-185)

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

14) $f(x) = 5x - 6$ **15)** $f(x) = -3x - 5$

16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **17)** $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

18) $f(x) = x^2$ **19)** $f(x) = (2x + 1)^2$

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد إذا كان معكوس كل دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا أم لا:

20) $f(x) = 3x^2$ **21)** $h(x) = x^3 - 3$

22) $g(x) = 4x^3 - 5x$ **23)** $g(x) = -3x^4 + 2x - 1$

24) $h(x) = 4x^4 + 7x$ **25)** $f(x) = -3x^5 + x^2 - 3$

26) ثقافة مالية: قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالاً، ثم سحب مبلغ 350 ريالاً خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالاً، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وكم كان رصيده في بداية الشهر؟

مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين y , x، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = -2y + 7$ بالتبديل بين المتغيرين

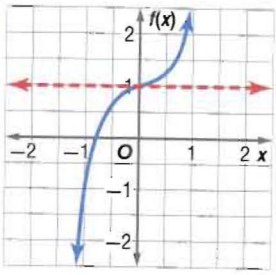
$2y = -x + 7$ بالحل بالنسبة للمتغير y

$y = \frac{-x + 7}{2}$ بقسمة الطرفين على 2

$f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$ ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y

مثال 3

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد إذا كان معكوس الدالة $f(x) = 2x^3 + 1$ دالة أيضًا أم لا.



مثّل الدالة بيانيًّا.

لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة. لذلك فمعكوس هذه الدالة هو دالة أيضًا.

مراجعة الدروس

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي (الصفحات: 187-192)

مثّل بيانيًّا كل دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

27) $f(x) = \sqrt{3x}$

28) $f(x) = -\sqrt{6x}$

29) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

30) $f(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

31) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x - 1} + 5$

32) $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x + 4} - 1$

33) **هندسة:** يُعبر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. فما نصف قطر دائرة مساحتها $300\,\text{cm}^2$؟

مثّل بيانيًّا كل متباينة فيما يأتي:

34) $y \geq \sqrt{x} + 3$

35) $y < 2\sqrt{x - 5}$

36) $y > -\sqrt{x - 1} + 2$

مثال 4

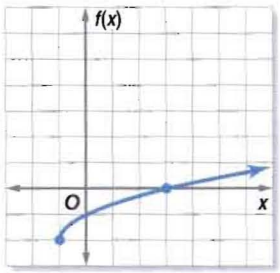
مثل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها:

تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$x \geq -1$ اطرح العدد 1 من الطرفين.

اعمل جدولاً لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.



x	$f(x)$
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45

المجال هو $\{x | x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$.

4-4 الجذر النوني (الصفحات: 193-197)

بسّط كلًّا مما يأتي:

37) $\pm\sqrt{121}$

38) $\sqrt[3]{-125}$

39) $\sqrt{(-6)^2}$

40) $\sqrt[6]{(x^2 + 2)^{18}}$

41) $\sqrt[3]{27(x + 3)^3}$

42) $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$

43) $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$

44) **فيزياء:** تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولاً.

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$64x^6 = (8x^3)^2$ $\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$

بالتبسيط $= 8|x^3|$

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 6

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$ $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$

بالتبسيط $= 4x^2y^4$

4-5 العمليات على العبارات الجذرية (الصفحات: 205-200)

بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

45) $\sqrt[3]{54}$

46) $\sqrt{144a^3b^5}$

47) $4\sqrt{6y} \cdot 3\sqrt{7x^2y}$

48) $6\sqrt{72} + 7\sqrt{98} - \sqrt{50}$

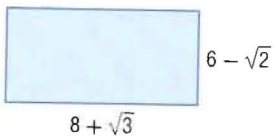
49) $(6\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$

50) $\dfrac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

51) $\dfrac{3}{5 + \sqrt{2}}$

52) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

53) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته



مثال 7

بسّط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$.

$2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

خاصية ضرب الجذور $= (2 \cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b \cdot 12ab^5}$

بالتحليل إلى العوامل $= 6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$

خاصية ضرب الجذور $= 6 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$

بإيجاد الجذر التكعيبي $= 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$

بالتبسيط $= 36ab^2$

مثال 8

بسّط العبارة $\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}$.

$\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \dfrac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{y}}$ بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \dfrac{x^2}{y^2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ بإنطاق المقام

$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$ $= \dfrac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$

4-6 الأسس النسبية (الصفحات: 211-206)

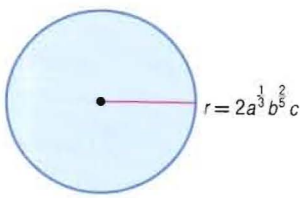
بسّط كل عبارة مما يأتي:

54) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ **55)** $m^{-\frac{3}{4}}$ **56)** $\dfrac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

57) $\dfrac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ **58)** $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ **59)** $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

60) هندسة: ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



مثال 9

بسّط العبارة $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$.

خاصية ضرب القوى $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$

بجمع الأسس $= a^{\frac{13}{15}}$

مثال 10

بسّط العبارة $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}}$.

بكتابة العبارة على الصورة الأسية $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$

بإنطاق المقام $= \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$

بكتابة العبارة على الصورة الجذرية $= \dfrac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \dfrac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية (الصفحات: 217-212)

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

61 $\sqrt{x-3}+5=15$

62 $-\sqrt{x-11}=3-\sqrt{x}$

63 $4+\sqrt{3x-1}=8$

64 $\sqrt{m+3}=\sqrt{2m+1}$

65 $\sqrt{2x+3}=3$

66 $(x+1)^{\frac{1}{4}}=-3$

67 $a^{\frac{1}{3}}-4=0$

68 $3(3x-1)^{\frac{1}{3}}-6=0$

69 **فيزياء:** تمثل الصيغة $t=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{32}}$ الزمن الدوري للبندول، حيث t الزمن بالثواني، ℓ طول البندول بالأقدام. أوجد طول البندول الذي يستغرق 2.75 s لإتمام دورته.

حل كل متباينة مما يأتي:

70 $2+\sqrt{3x-1}<5$

71 $\sqrt{3x+13}-5\geq 5$

72 $6-\sqrt{3x+5}\leq 3$

73 $\sqrt{-3x+4}-5\geq 3$

74 $5+\sqrt{2y-7}<5$

75 $3+\sqrt{2x-3}\geq 3$

76 $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6+x}>0$

مثال 11

حل المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9}-2=5$.

$\sqrt{2x+9}-2=5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{2x+9}=7$	بإضافة العدد 2 للطرفين
$(\sqrt{2x+9})^2=7^2$	بتربيع الطرفين
$2x+9=49$	بإيجاد مربع الطرفين
$2x=40$	بطرح العدد 9 من الطرفين
$x=20$	بقسمة الطرفين على العدد 2

مثال 12

حل المتباينة $\sqrt{2x-5}+2>5$.

$2x-5\geq 0$	ما تحت الجذر ليس سالبًا
$2x\geq 5$	بإضافة العدد 5 للطرفين
$x\geq 2.5$	بقسمة الطرفين على العدد 2

يجب أن يكون الحل أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

$\sqrt{2x-5}+2>5$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{2x-5}>3$	بطرح العدد 2 من الطرفين
$(\sqrt{2x-5})^2>3^2$	بتربيع الطرفين
$2x-5>9$	بإيجاد مربع الطرفين
$2x>14$	بإضافة العدد 5 للطرفين
$x>7$	بقسمة الطرفين على العدد 2

بما أن $x\geq 2.5$ تحوي $x>7$، فإن حل المتباينة هو $x>7$.

اختبار الفصل

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟

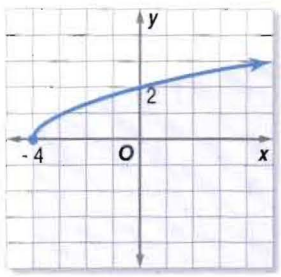
1) $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$

2) $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$

3) $f(x)=x+7, g(x)=x-7$

4) $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$

5) **اختيار من متعدد:** أي المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟



A $y \geq \sqrt{x+4}$ C $y \geq \sqrt{x-4}$

B $y \leq \sqrt{x+4}$ D $y \leq \sqrt{x-4}$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$ فأوجد كل دالة مما يأتي:

6) $(f+g)(x)$ **7)** $(f \cdot g)(x)$

8) $(f-g)(x)$ **9)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

10) $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$

11) $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$

12) $4(\sqrt[4]{3x+1})-8=0$

13) $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$

14) $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$

15) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$

16) **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي:

A -5 B $-\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{5}$ D 5

بسّط كلاً مما يأتي:

17) $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$ **18)** $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$

19) $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$ **20)** $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$

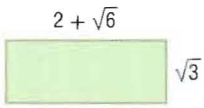
21) $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$ **22)** $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$

23) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$ **24)** $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$

25) $w^{-\frac{4}{5}}$ **26)** $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$

27) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$ **28)** $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$

29) **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟



A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة

B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة

C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة

D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

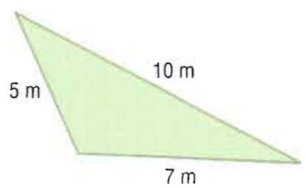
حل كل متباينة مما يأتي:

30) $\sqrt{4x-3}<5$ **31)** $2+\sqrt{4x-4} \leq 6$

32) $\sqrt{2x+3}-4 \leq 5$ **33)** $\sqrt{b+12}-\sqrt{b}>2$

34) $\sqrt{y-7}+5 \geq 10$ **35)** $\sqrt{a-5}-\sqrt{a+7} \leq 4$

36) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c من القانون: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة.



اسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أي عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأي الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالاً؟

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) إذا كان $X = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & c+d \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 8 & d \\ b & a \end{bmatrix}$ وكانت $X = Y$ فإن قيمة c تساوي:

A -1

B 2

C -2

D 1

3) أي العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1) - (2a-2)(a+3)$؟

A $2a^2 + 6a + 7$

B $4a^2 - a + 6$

C $4a^2 + 6a - 6$

D $4a^2 - 3a + 7$

4) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالاً رسوم نقل الملكية، أوجد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال.

A 64140

B 68000

C 64000

D 68160

5) ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$.

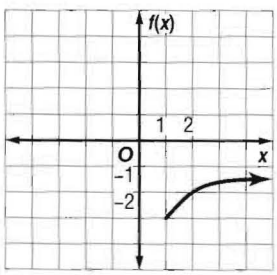
A $-3b^3c^6$

B $-3b^2c^4$

C $3b^2c^4$

D $3b^3c^6$

6) أيّ دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟



A $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$

B $f(x) = \sqrt{x+1} - 3$

C $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$

D $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$

7) ما حل المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$ ؟

A 2

B 20

C 200

D 1000

8) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$.

A $f(x) = x + 5$

B $f(x) = 5x$

C $f(x) = \frac{x}{5}$

D $f(x) = 5 - x$

9) أي المعادلات الآتية لها جذران نسبيان مختلفان؟

I. $3x^2 + x - 2 = 0$

II. $x^2 - 2x + 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A I فقط

B II فقط

C II، III فقط

D I، III فقط

أسئلة مقالية

إجابات قصيرة

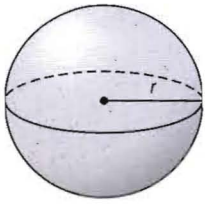
أجب عن كلٍّ مما يلي:

10) مثّل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها.

11) قُذف جسم من منصة إلى أعلى. وتستعمل الصيغة الآتية $h = -16t^2 + 40t + 70$ لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟

12) يمكن إيجاد نصف قطر كرة r حجمها V باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

$V = 8580\ \text{in}^3$

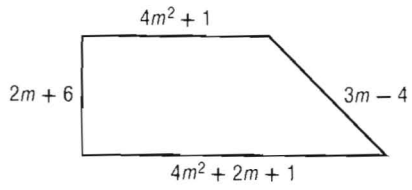


a) ما نصف قطر الكرة في الشكل المجاور مقرباً إلى أقرب عُشر؟

b) استعمل الصيغة السابقة لإيجاد الحجم V بدلالة نصف القطر r.

c. احسب حجم كرة سلة قطرها 9 in مقرباً إلى أقرب عُشر.

13) إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m؟



إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يلي موضحًا خطوات الحل:

14) عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

a) اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

c) أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

15) إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى.

a) صف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$, $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

b) ما قيمة $f[g(2)]$؟ وضح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس ...	4-1	2-1	3-3	4-2	4-3	4-3	4-7	4-2	3-2	1-3	4-7	4-4	3-3	2-5	4-2

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

نقطة المنتصف $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الجمع $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

الضرب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

الطرح $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

محددة الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

الضرب بثابت $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$ $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$

مجموع مكعبين $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

مربع المجموع $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

الفرق بين مكعبين $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

مربع الفرق $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

مكعب المجموع $(a+b)^3 = a^3 b + 3b^2 a + b^3$

حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما $(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

مكعب الفرق $(a-b)^3 = b^3$

الإحصاء والاحتمال

$n! = n(n-1).(n-2)\ldots 2.1$

$nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

$0! = 1$

$P(B/A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$

${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$P(A') = 1 - P(A)$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الجبرية $a_n = a_1 + (n-1)d$

الحد النوني في المتتابعة الهندسية $a_n = a_1 r^{n-1}$

مجموع حدود المتتابعة الجبرية $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

مجموع حدود المتتابعة الهندسية $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

الصيغ

حساب المثلثات

قانون الجيب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},\ a, b, c \neq 0$$

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

الدوال المثلثية

$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

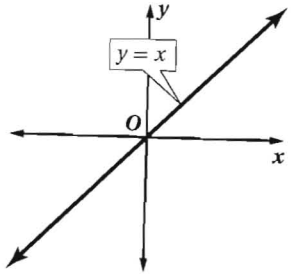
$$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

متطابقات مثلثية

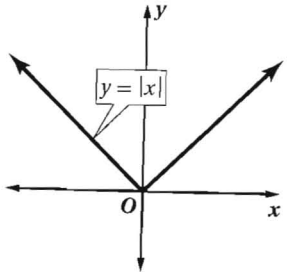
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

الدوال الرئيسة (الأم)

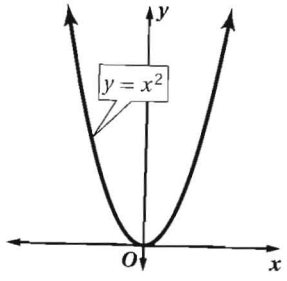
الدوال الخطية



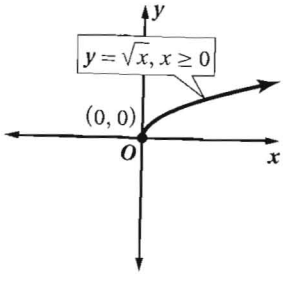
دوال القيمة المطلقة



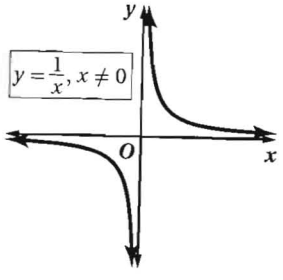
الدوال التربيعية



دوال الجذر التربيعي



المقلوب والدوال النسبية



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
مصفوفة الوحدة	I
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\bar{x}$
الإنحراف المعياري	s
الحدث المتمم	A'
احتمال الحدث A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\mathrm{Cot}(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\mathrm{Csc}(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\mathrm{Sec}(x)$
معكوس دالة Sin	$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$
معكوس دالة Cos	$\mathrm{Cos}^{-1}\, x$
معكوس دالة Tan	$\mathrm{Tan}^{-1}\, x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة متعددة التعريف	$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [\![x]\!]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	$\boldsymbol{i}$
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\mathrm{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة A	$\lvert \mathrm{A} \rvert$