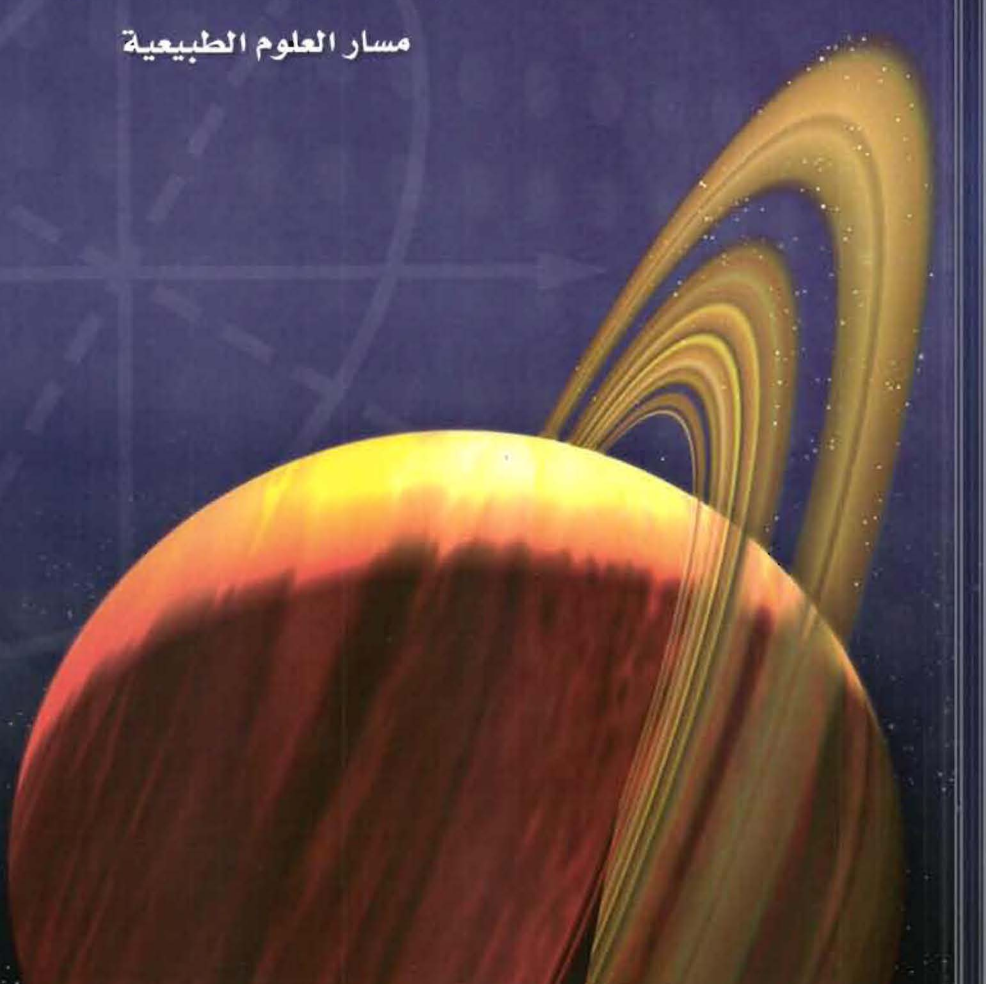
المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم

رياضيات ٥

التعليم الثانوي - نظام المقررات

مسار العلوم الطبيعية



الطبعة التجريبية
١٤٣٣هـ - ٢٠١٢م
يوزع مجانا ولا يباع

العبيكان
Obeikan

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

رياضيات ٥

التعليم الثانوي - نظام المقررات

مسار العلوم الطبيعية

العبيكان
Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجانًا ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة التجريبية
١٤٣٣ هـ - ٢٠١٢ م

رياضيات ٥

التعليم الثانوي- نظام المقررات - مسار العلوم الطبيعية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق

محمد بن عبدالله البصيص

عمر محمد أبوغليون

عبدالحكيم عبدالله سليمان

أحمد مصطفى سمارة

خلود عبدالحفيظ لوباني

د. خالد بن عبدالله المعثم

هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

Original Title:

Precalculus ©2011 & Algebra 2 ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

www.obeikaneducation.com

www.glencoe.com

Education

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies. Inc. © 2008.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

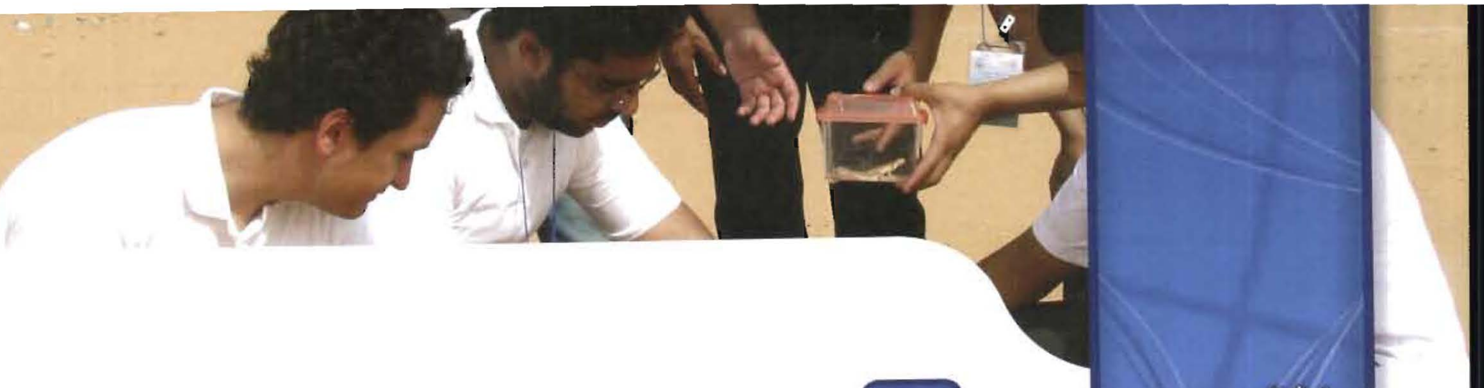
وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف إستراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدِّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تحوز على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.



الفهرس

الفصل 1 تحليل الدوال

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفهرس

الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الفصل
1

تحليل الدوال
Analyzing Functions

فيما سبق:

درستُ الدوال وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أستكشف تماثل منحنيات الدوال.
- أبحثُ الاتصال وأجدُ متوسط معدل تغير دالة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.
- أجدُ معكوس دالة جبريًا وهندسيًا.

لماذا؟

إدارة أعمال: تُستعملُ الدوالُ في عالم الأعمال والتجارة لتحليل التكلفة، والتنبُؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، وتوقُّع التكاليف، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... إلخ.

قراءة سابقة: كوِّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$ **2)** $x \leq -2$

3) $x \leq -5$ **4)** $x > 1$

5) $7 \geq x$ **6)** $-4 < x$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y - 3x = 2$ **8)** $y + 4x = -5$

9) $2x - y^2 = 7$ **10)** $y^2 + 5 = -3x$

11) $9 + y^3 = -x$ **12)** $y^3 - 9 = 11x$

13) **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $12D = n$ ، حيث D عدد العبوات الكرتونية من الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة كرتونية من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المبيعة 312 قطعة.

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

14) $3y - 4, y = 2$ **15)** $2b + 7, b = -3$

16) $x^2 + 2x - 3, x = -4a$ **17)** $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$

18) $-4c^2 + 7, c = 7a^2$ **19)** $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$

20) **درجات حرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي، حيث تمثّل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة 73°F ، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):

نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x .

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ،

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب.

الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x), b(x)$ دالتا كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):

العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد. ويشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني.

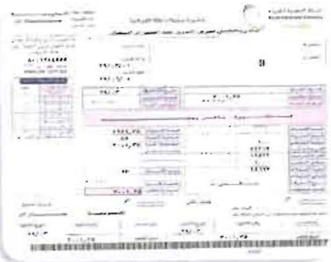
الدليل ← رمز الجذر

$$\sqrt[n]{81}$$

ما تحت الجذر

1-1

الدوالّ
Functions



لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

فيما سبق:

درستُ مجموعات الأعداد ورموزها.

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات:

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

المتغير المستقل
independent variable

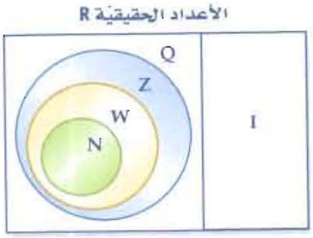
المتغير التابع
dependent variable

الدالة متعددة التعريف
piecewise-defined function

www.obeikaneducation.com

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية: تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية



الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

يمكن وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في.

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث . . .

x لها هذه الخصائص . . .

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال 1 — استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، و x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ 1B) $x \leq -3$ 1C) $-1 \leq x \leq 5$

قراءة الرياضيات

غير محدودة: تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيستعملُ الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات غير محدودة		فترات محدودة	
رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة	المتباينة
$[a, \infty)$	$x \geq a$	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	(a, b)	$a < x < b$
(a, ∞)	$x > a$	$[a, b)$	$a \leq x < b$
$(-\infty, a)$	$x < a$	$(a, b]$	$a < x \leq b$
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$		

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \leq 16$ $\quad (-8, 16]$

b) $x < 11$ $\quad (-\infty, 11)$

c) $x > 5$ أو $x \leq -16$ $\quad (-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

✔ تحقق من فهمك

2A) $-4 \leq y < -1$ $\quad$ 2B) $a \geq -3$ $\quad$ 2C) $x > 9$ أو $x < -2$

إرشادات للدراسة

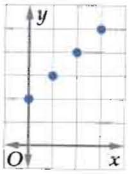
الرمزان $\cup$ ، $\cap$
يُقرأ الرمز "$\cup$" إتحاد، ويعني جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.
يُقرأ الرمز "$\cap$" تقاطع، ويعني جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة للربط بين كميتين، بحيث ترتبط عناصر مجموعة مثل A مع عناصر من مجموعة مثل B، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة هي:

1) **لفظيًا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.



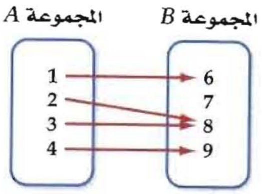
4) **جبريًا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x ، y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثّلة في المخطط المجاور تمثّل دالة.
حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.



إرشادات للدراسة

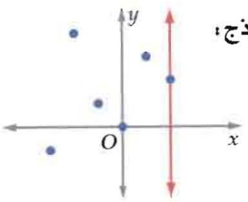
المجال والمدى
في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعملَ الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{6, 8, 9\}$

كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي — اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: **تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.**

النموذج:



مثال 3 — تحديد العلاقات التي تمثل دوالّ

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

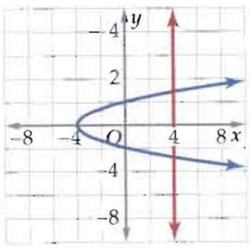
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y ، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة ، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لـ y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ بإضافة $2x$ لكلا الطرفين

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لـ y ، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

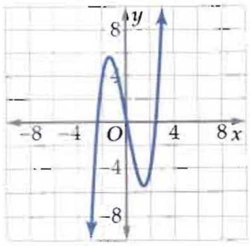
✓ تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



3D) $3y + 6x = 18$

إرشادات للدراسة

جدوليًّا

إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y ، كما يوضح الجدول أدناه:

x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y

لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b .

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

المعادلة	**الدالة المرتبطة بالمعادلة**
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$f(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$ بتعويض 6 مكان x

$= 36 + 48 - 24$ بالتبسيط

$= 60$ بالتبسيط

b) $f(-4x)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$ بتعويض $-4x$ مكان x

$= 16x^2 - 32x - 24$ بالتبسيط

c) $f(5c + 4)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$ بتعويض $(5c + 4)$ مكان x

$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$ بفك الأقواس $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$

$= 25c^2 + 80c + 24$ بالتبسيط

✓ تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A) $f(12)$ **4B)** $f(6x)$ **4C)** $f(-3a + 8)$

الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1707 م - 1783 م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وهو أول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًا.

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$

تكون العبارة $\dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$ ، أو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$.

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 ، أو $[5, \infty)$.

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال
يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x - 5}$ و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يعبران عن الدالة نفسها.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \quad \text{(c}$$

هذه الدالة معرّفة عندما يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن مجال $h(x)$ هو $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

تحقق من فهمك

(5A $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ **(5B** $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ **(5C** $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ متعددة التعريف**.

مثال 6 من واقع الحياة — إيجاد قيم الدالة متعددة التعريف

طول: **إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:**

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

(a $h(67)$

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$	تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$
$h(67) = 3(67) - 132$	بتعويض 67 مكان x
$= 201 - 132 = 69$	بالتبسيط.

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

(b $h(72)$

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$	تعريف الدالة في الفترة $x > 68$
$h(72) = 2(72) - 66$	بتعويض 72 مكان x
$= 144 - 66 = 78$	بالتبسيط.

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

تحقق من فهمك

6) **سرعة :** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة متعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t \ , & 0 \le t \le 15 \\ 60 \ , & 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 \ , & 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

(6A $v(5)$ **(6B** $v(15)$ **(6C** $v(245)$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

1) $x > 50$ 2) $x < -13$

3) $x \le -4$ 4) $\{-3, -2, -1, \dots\}$

5) $-31 < x \le 64$ 6) $x < -19$ أو $x > 21$

7) $x \le 61$ أو $x \ge 67$ 8) $x \le -45$ أو $x > 86$

9) المضاعفات الموجبة للعدد 5   10) $x \ge 32$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا: (مثال 3)

11) المتغير المستقل x يمثّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب.

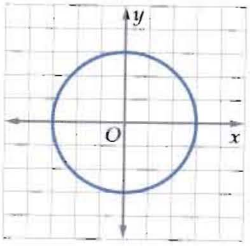
12)

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

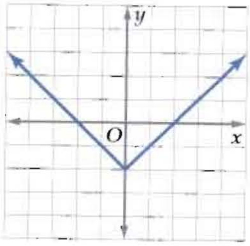
13) $\frac{1}{x} = y$ 14) $x^2 = y + 2$

15) $\sqrt{48y} = x$ 16) $\frac{x}{y} = y - 6$

17)



18)



أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

a) $g(9)$

b) $g(3x)$

c) $g(1 + 5m)$

20) $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$

a) $h(4)$

b) $h(-2y)$

c) $h(5b + 3)$

21) $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$

a) $f(-6)$

b) $f(4t)$

c) $f(3 - 2a)$

22) $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$

a) $g(-2)$

b) $g(5x)$

c) $g(8 - 4b)$

23) $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$

a) $g(-2)$

b) $g(3m)$

c) $g(4m - 2)$

24) $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$

a) $t(-4)$

b) $t(2x)$

c) $t(7 + n)$

25) **مبيعات:** إذا مُثِّلت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a) أوجد $f(1)$.

b) أوجد $f(5)$.

c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأولى، أم في السنوات الأخيرة؟ برِّر إجابتك.

حدّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5)

26) $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$ 27) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$

28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$ 29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

30) $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$ 31) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

32) **فيزياء:** يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدِّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيِّن السبب. (مثال 5)

أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$ لكل من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

33) $$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , \quad x<3\\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , \quad x>8\end{cases}$$

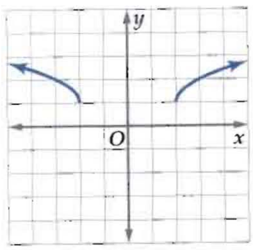
34) $$f(x)=\begin{cases}-15 & , \quad x<-5\\ \sqrt{x+6} & , \quad -5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & , \quad x>10\end{cases}$$

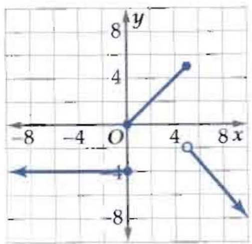
35) **عمل:** تمثل الدالة $T(x)$ أدناه الربح (بالريال) الذي تكسبه شركة توزيع لأجهزة هاتف:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , \quad 0<x\le 7000\\ 500+2.4x & , \quad 7000<x\le 20000\\ 800+3x & , \quad 20000<x\le 80000\end{cases}$$

حيث x تمثل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد: $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.

معتمدًا على اختبار الخط الرأسي ، حدد إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا، وبرِّر إجابتك.

36)


37)


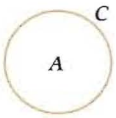
38) **رياضة:** تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة مسافة 0.4 mi، وقيادة دراجة هوائية مسافة 5 mi، وجري مسافة 2.6 mi . فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t. مقرِّبًا t إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

b) حدِّد مجال الدالة.

39) **هندسة:** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.



a) اكتب المساحة كدالة في المحيط.

b) أوجد $A(4)$, $A(0.5)$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟

40) **حسابات:** تتناقص قيمة أجهزة الحاسوب بعد شرائها مع مرور الزمن. وتُستعملُ الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t)=1800-30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شراءه. فحدِّد مجال هذه الدالة.

أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f(a)$, $f(a+h)$ ، حيث $h\neq 0$ لكل مما يأتي:

41) $f(x)=-5$

42) $f(x)=\sqrt{x}$

43) $f(x)=\frac{1}{x+4}$

44) $f(x)=x^2-6x+8$

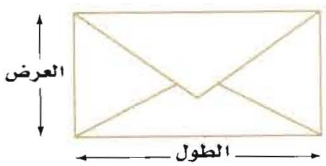
45) $f(x)=-14x+6$

46) $f(x)=x^3+9$

47) $f(x)=5x^2$

48) $f(x)=x^3$

49) **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5. فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$ in ، فأجب عما يأتي:



a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ ، إذا كانت نسبة طول الظرف إلى عرضه 1.8 ، ثم اكتب مجال الدالة.

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1 ، ثم اكتب مجال الدالة.

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له ، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه.

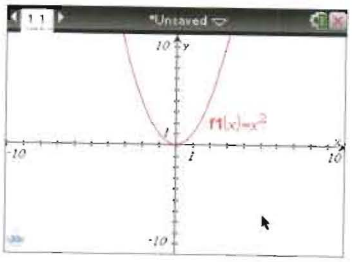
في كل من العلاقتين الآتيتين، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا. برر إجابتك.

50) $x=|y|$

51) $x=y^3$

52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى الدالة x^n، $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.



b) **جدوليًا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع **a**، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًا.

d) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله أن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. على حين قال سلمان أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

55) **تحدٍّ:** إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\,G(x-1) + 1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$.

تبرير: **أيُّ الجمل الآتية التي تصف الدالة المعرَّفة من المجموعة X إلى المجموعة Y بشكل صحيح، وأيها خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة فأعد كتابتها لتصبح صحيحة.**

56) يرتبط كل عنصر من Y بعنصر واحد من X.

57) لا يرتبط عنصران أو أكثر من X بالعنصر نفسه من Y.

58) لا يرتبط عنصران أو أكثر من Y بالعنصر نفسه من X.

اكتب: **وضّح كيف يمكنك تحديد الدالة من خلال:**

59) جملة لفظية تبيّن العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

60) مجموعة أزواج مرتبة.

61) جدول قيم.

62) تمثيل بياني.

63) معادلة.

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

64) $\frac{2r - 4}{r - 2}$

65) $\frac{r^2 - 7r - 30}{r^2 - 5r - 24}$

66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

67) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{16}}$

68) $\frac{6x^2 - 11x + 4}{6x^2 + x - 2} \cdot \frac{12x^2 + 11x + 2}{8x^2 + 14x + 3}$

حل كل من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

69) $\frac{8}{x} = 1 + \frac{2}{x - 2}$

70) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

حل كل من المتباينتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

71) $\frac{x+1}{x-3} - 1 \leq 2$

72) $\frac{6}{x} + 2 \geq 0$

تدريب على اختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x - 5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها.

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار
zeros

الجذور
roots

التماثل حول مستقيم
line symmetry

التماثل حول نقطة
point symmetry

الدالة الزوجية
even function

الدالة الفردية
odd function

www.obeikaneducation.com

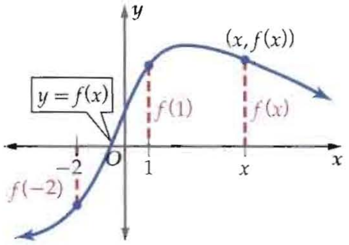
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1430 – 1423) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07\ ,\ 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1422هـ . و يساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

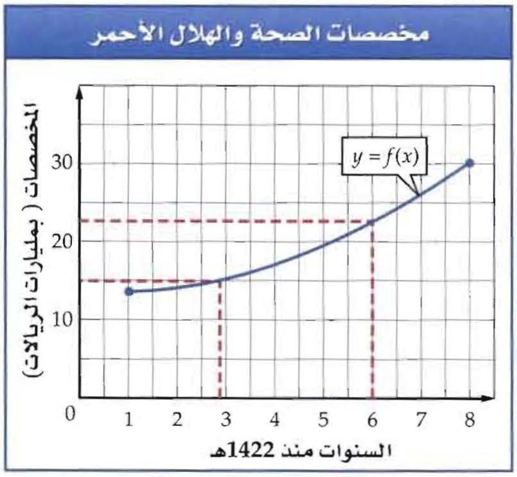
تحليل التمثيل البياني للدالة التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$، حيث x أحد عناصر مجال f. وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. وعليه تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساوية قياس العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة — تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:



a) **قدّر قيمة المخصصات سنة 1428 هـ ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.**

السنة 1428 هـ هي السنة السادسة بعد 1422 هـ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1428هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقُّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا، يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

b) **قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.**

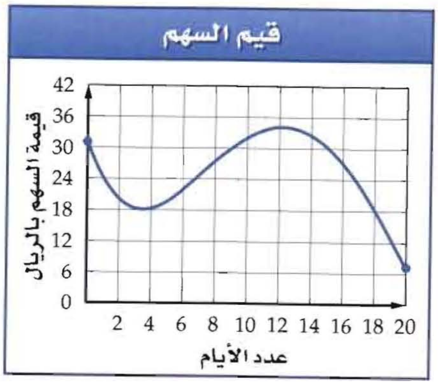
يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1425 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1425هـ معقولة.

تحقق من فهمك

1) **أسهم:** تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ ، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d.



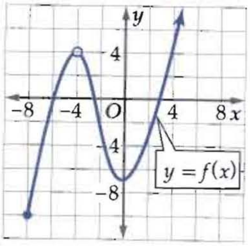
1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور.



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid -8 \le x, x \ne -4, x \in R\}$.

المدى:

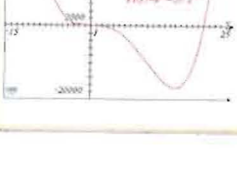
إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

إرشادات للدراسة

اختيار التدريج المناسب

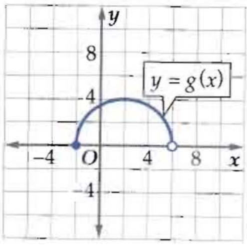
اختر تدريجًا مناسبًا للمحور x للتمكن من رؤية منحنى الدالة بوضوح.

لاحظ اختلاف تمثيل الدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$ أدناه.

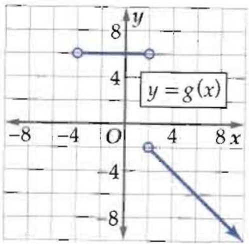


تحقق من فهمك

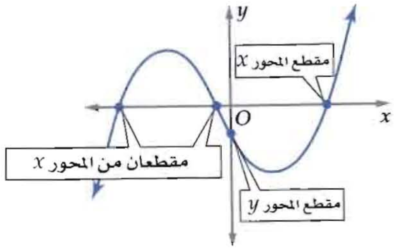
2A)



2B)



النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.



ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًا، فإننا نجد $f(0)$.

إرشادات للدراسة

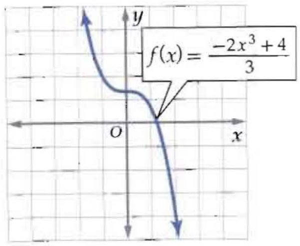
كتابة المقاطع

يمكن كتابة المقطع y على صورة زوج مرتب بالشكل $(0, y)$، والمقطع x بالشكل $(x, 0)$.

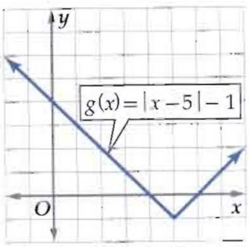
مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًا:

a)



b)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

الحل جبريًا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًا:

أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 = 4$$

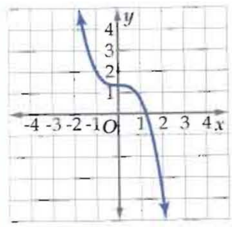
أي أن المقطع y هو 4.

إرشادات للدراسة

تدريج المحورين x , y

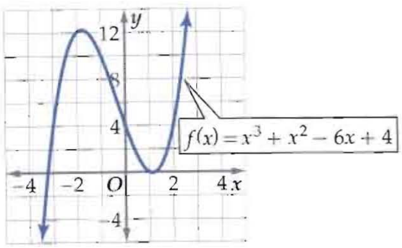
إذا لم يظهر التدريج على المحورين x , y في التمثيل البياني فذلك يعني أن التدريج بالوحدات.

انظر المثال 3a:

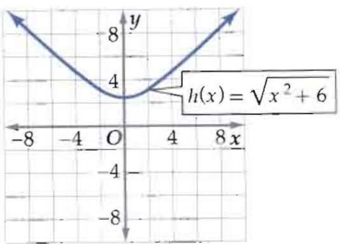


تحقق من فهمك

3A)



3B)



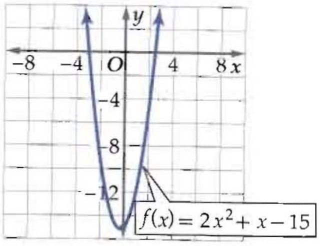
إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني

عندما تُسمي المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y. ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للسهولة نسمي عادةً المحور الأفقي x والرأسي y.

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار الدالة**، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور المعادلة**. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

مثال 4 إيجاد الأصفار



استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.
لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

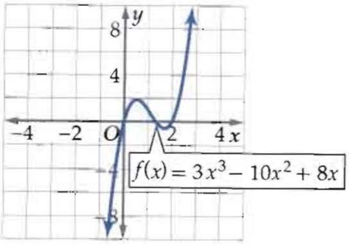
الحل جبريًّا:

$2x^2 + x - 15 = 0$			بوضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$			بالتحليل
$2x - 5 = 0$	أو	$x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$	أو	$x = -3$	بحل كل معادلة

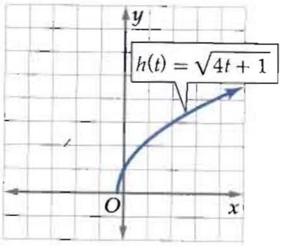
أي أن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5 .

تحقق من فهمك

(4A

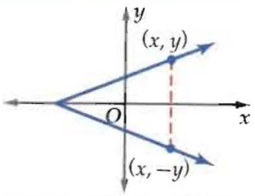
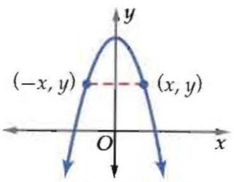
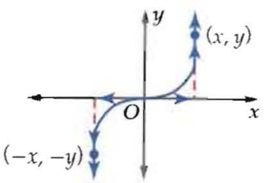


(4B



التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

مفهوم أساسي اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال
يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

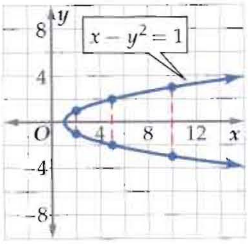
إرشادات للدراسة

التماثل من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًّا:

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

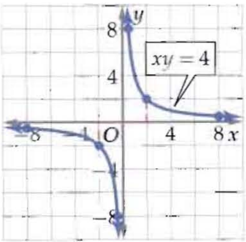
يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x:

x	2	2	5	5	10	10
y	1	−1	2	−2	3	−3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التحقق جبريًا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

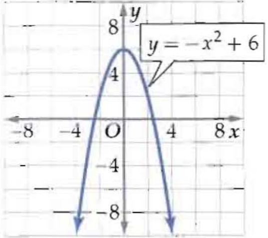
x	−8	−2	−0.5	0.5	2	8
y	−0.5	−2	−8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

التحقق جبريًا:

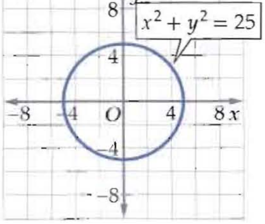
بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

✓ تحقق من فهمك

5A)



5B)



يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

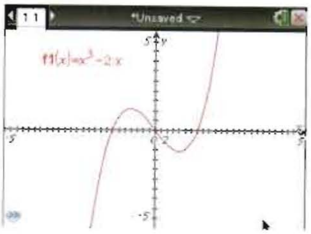
مفهوم أساسي الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ بتعويض $-x$ مكان x

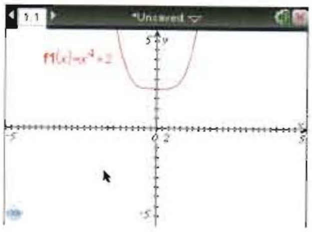
$= -x^3 + 2x$ بالتبسيط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x) = x^4 + 2$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، وللتحقق من ذلك جبريًا نجد:

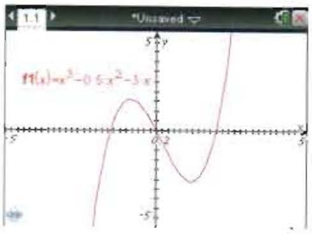
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ بتعويض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بالتبسيط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



يُظهر التمثيل البياني أن الدالة قد تكون متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ بتعويض $-x$ مكان x

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بالتبسيط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$، فإن $f(-x) \neq f(x)$،
وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛ لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال الفردية قد تُظهر لك بعض التمثيلات البيانية تماثلًا والحقيقة غير ذلك؛ لذا عليك التأكد من التماثل جبريًا في كل مرة.

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

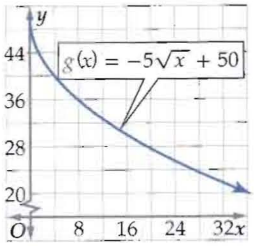
6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$

6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

تدرب وحل المسائل

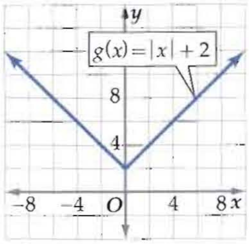
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: (مثال 1)

(1



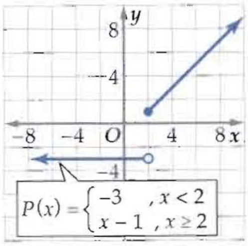
$g(6)$ (**a**　$g(12)$ (**b**　$g(19)$ (**c**

(2



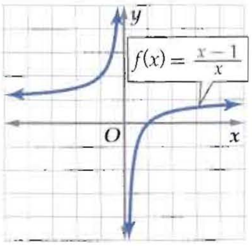
$g(-8)$ (**a**　$g(-3)$ (**b**　$g(0)$ (**c**

(3



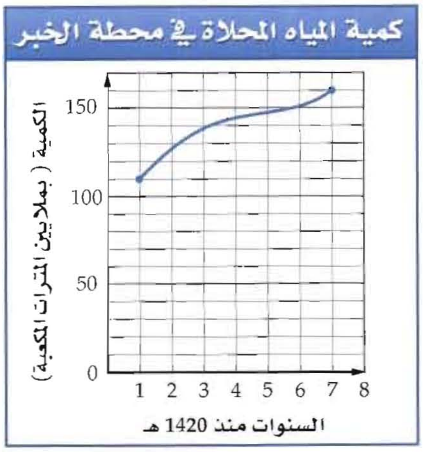
$P(-6)$ (**a**　$P(2)$ (**b**　$P(9)$ (**c**

(4



$f(-3)$ (**a**　$f(0.5)$ (**b**　$f(1)$ (**c**

5) **مياه:** إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1427هـ) معطاة بالدالة
$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$
حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1420 هـ. (مثال 1)



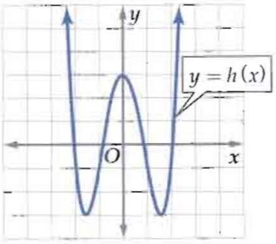
a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني.

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًّا مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

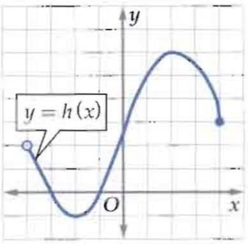
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا.

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2)

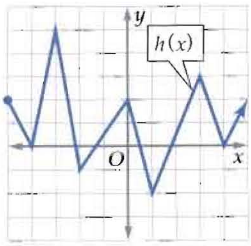
(6



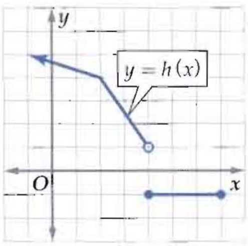
(7



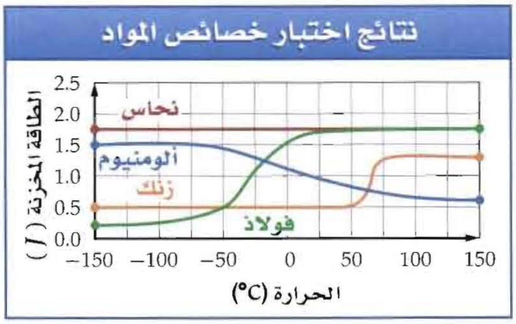
(8



(9



10) **هندسة:** أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزَّنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضَّح في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي: (مثال 2)

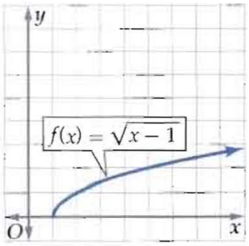


a) أوجد المجال والمدى لكل دالة.

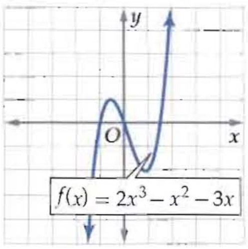
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا: (المثالان 3, 4)

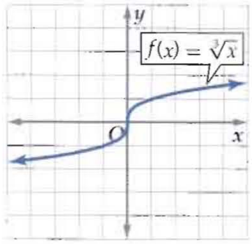
(11



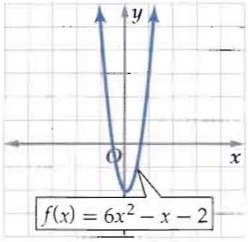
(12



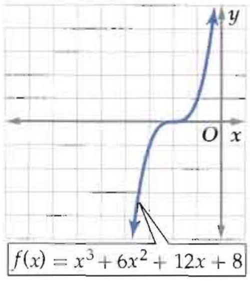
13)



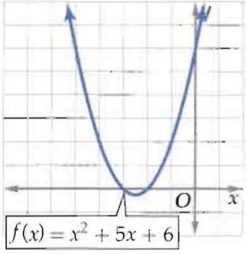
14)



15)

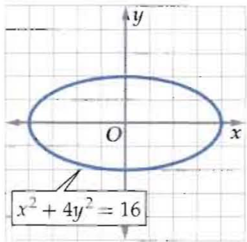


16)

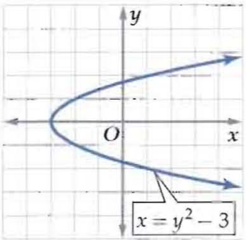


استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًّا: (مثال 5)

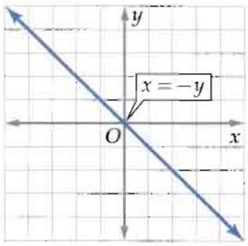
17)



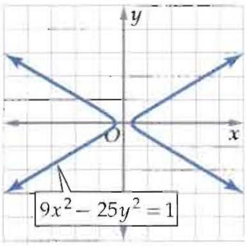
18)



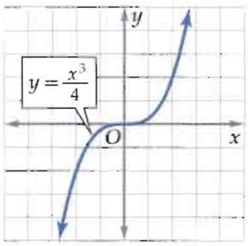
19)



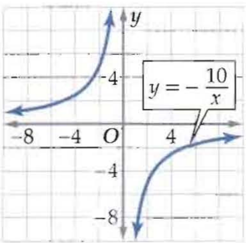
20)



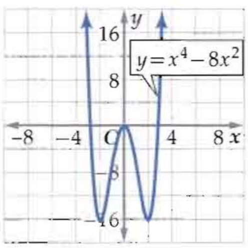
21)



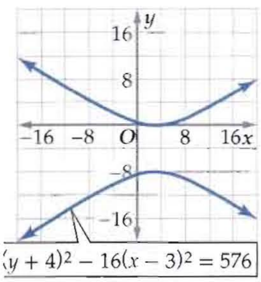
22)



23)



24)



الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حلّل منحناها لتحدِّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. و إذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: (مثال 6)

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

26) $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

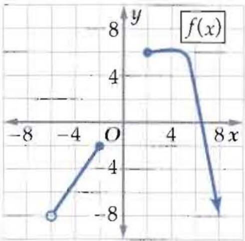
27) $g(x) = \sqrt{x + 6}$

28) $h(x) = |8 - 2x|$

29) $f(x) = |x^3|$

30) $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

31) استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



a) $f(-2)$ **b)** $f(-4)$ **c)** $f(2)$

32) مبيعات: إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة من 1422هـ إلى 1426هـ يُعطى بالدالة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$ ، حيث x رقم السنة منذ 1422 هـ.

a) اكتب مجال الدالة، ثم قرّب مداها .

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1424هـ . ثم أوجد ذلك جبريًّا.

c) استعملِ المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًّا. ماذا يمثّل المقطع y؟

d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

33) **دوال:** إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث $n \in \mathrm{N}$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \le n \le 6$.

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

c) صف التماثل لكل دالة.

d) تنبّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$، ومداها، وتماثلها، ثم برّر إجابتك.

34) **صيدلة:** إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة:

$$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا.

b) اكتب المجال المناسب للدالة، وبرّر إجابتك.

c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟

الحاسبة البيانيّة: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا:

35) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x}$

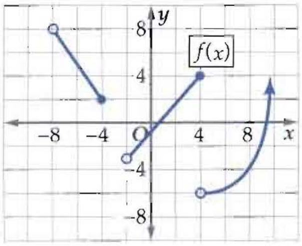
36) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x + 3}$

37) $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$

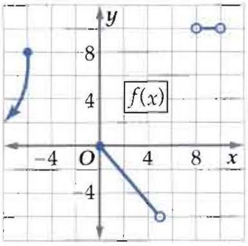
38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

39)



40)



41) **فيزياء:** إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$

a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.

c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

42) **أسهم:** افرض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة:

$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد مجال الدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

43) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

a) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$					

b) **تحليليًّا:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟

c) **بيانيًّا:** مثّل الدالة بيانيًّا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b**؟ وضح إجابتك.

d) **لفظيًّا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح إجابتك.

الحاسبة البيانيّة: مثّل كلاً من الدوال الآتية بيانيًّا. و حدّد إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

44) $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$

45) $f(x) = x^2 - x - 6$

46) $h(x) = x^6 + 4$

47) $f(g) = g^9$

48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$

49) $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مَثّل بيانيًّا منحنى يحقق الشروط في كل حالة مما يأتي:

50) منحنى يمر بالنقاط $(-8, 1), (-5, 2), (-4, 4), (-3, 8)$، ومتماثل حول المحور y.

51) منحنى يمر بالنقاط $(0, 0), (2, 6), (3, 12), (4, 24)$، ومتماثل حول المحور x.

52) منحنى يمر بالنقاط $(-1, -3), (-2, -9), (-3, -18)$، ومتماثل حول نقطة الأصل.

53) منحنى يمر بالنقاط $(8, -8), (6, -12), (4, -16)$ ويمثل دالة زوجية.

54) **اكتب:** وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من مقاطع x، على حين يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر.

55) **تحدٍّ:** أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^3-4x^2-12x}$، ومداها. برّر إجابتك، ثم تحقّق منها بيانيًّا.

تبرير: **أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة. برِّر إجابتك.**

56) مدى الدالة $f(x) = nx^2$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathrm{R}\}$

57) مدى الدالة $f(x) = \sqrt{nx}$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathrm{R}\}$

58) جميع الدوال الفردية متماثلة حول المستقيم $y = -x$.

59) إذا دارت دالة زوجية $n180°$ حول نقطة الأصل، حيث n عدد صحيح، فإنها تبقى زوجية.

تبرير: **إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدِّد إذا كانت الدالة $b(x)$ فردية، أم زوجية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، وبرِّر إجابتك:**

60) $b(x) = a(-x)$

61) $b(x) = -a(x)$

62) $b(x) = [a(x)]^2$

63) $b(x) = a(|x|)$

64) $b(x) = [a(x)]^3$

تبرير: **هل يمثّل المنحنى المعطى تماثله في كل مما يأتي دالة دائمًا أم أحيانًا أم لا يمثّل دالة؟ وبرر إجابتك.**

65) متماثل حول المستقيم $x = 4$.

66) متماثل حول المستقيم $y = 2$.

67) متماثل حول كل من المحورين x, y .

68) **اكتب:** وضّح لماذا لا تكون العلاقة المتماثلة حول المحور x دالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

a) $g(2)$

b) $g(-4x)$

c) $g(1+3n)$

70) $p(x) = \frac{2x^3+2}{x^2-2}$

a) $p(3)$

b) $p(x^2)$

c) $p(x+1)$

71) $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a) $h(-9)$

b) $h(3x)$

c) $h(2+m)$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية (الدرس 1-1)

72) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$

73) $f(x) = \frac{1}{x^2-16}$

74) $f(x) = \sqrt{3x+18}$

بسط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

75) $27^{\frac{1}{3}}$

76) $64^{\frac{5}{6}}$

77) $49^{-\frac{1}{2}}$

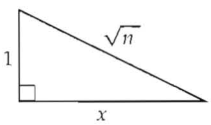
78) $16^{-\frac{3}{4}}$

79) $25^{\frac{3}{2}}$

80) $36^{-\frac{3}{2}}$

تدريب على اختبار

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه.



A $\sqrt{n^2-1}$

B $\sqrt{n-1}$

C $\sqrt{n+1}$

D $n-1$

82) ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟

A $5 < f(x) < 9$

B $2 < f(x) < 10$

C $1 < f(x) < 9$

D $1 \leq f(x) < 10$

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

Continuity, End Behavior, and Limits

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني.

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال النُقطي
point discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

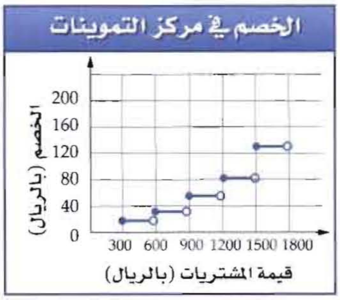
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

www.obeikaneducation.com

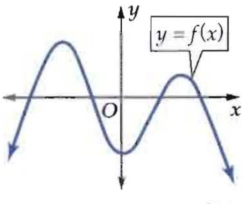
لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

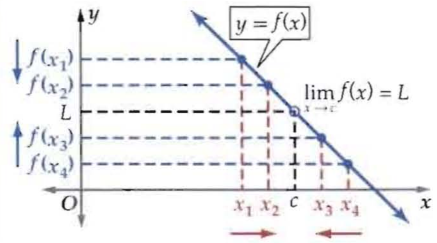


$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز: نقول إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

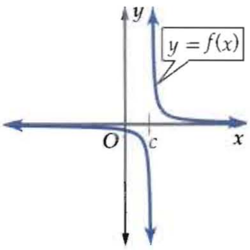


إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. و فيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

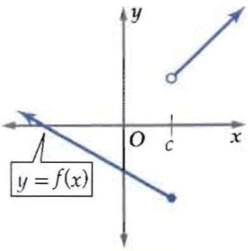
للدالة عدم اتصال **لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



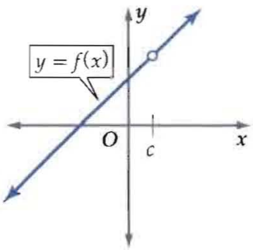
للدالة عدم اتصال **قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.

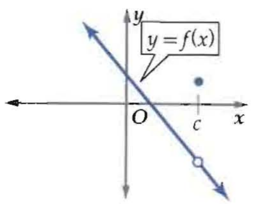
مثال:



للدالة عدم اتصال **نُقطي** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (o).

مثال:





يسمى عدم الاتصال النُقطي **عدم اتصال قابل للإزالة**؛ لأنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كلًّا من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد الدالة أو تتناقص بلا حدود.

تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

إرشادات للدراسة

النهايات

إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- **$f(x)$ معرّفة عند c، أي إن $f(c)$ موجودة.**
- **$f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.**
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

مثال 1 — التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

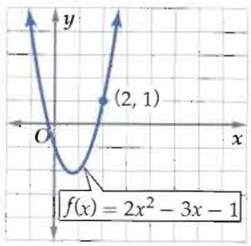
كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

3) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$؟

بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$، $f(2) = 1$، نستنتج أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.



الشكل 1.3.1

✓ تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

(1A $f(x) = x^3$

(1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$

إذا لم يتحقّق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة. إن اختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع عدم الاتصال عند تلك نقطة.

مثال 2 تعيين نقاط عدم الاتصال

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، و إذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

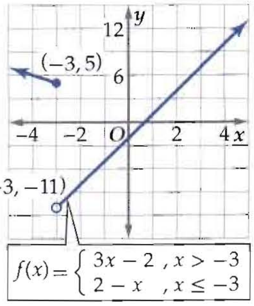
a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \ x>-3\\ 2-x & , \ x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3)=5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، على حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ **عدم اتصال قفزي** عند $x=-3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x=-3$.



الشكل 1.3.2

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3,\ x=3$.

1) $f(-3)=\frac{0}{0},\ f(3)=\frac{6}{0}$ القيمتان غير معرّفتين، أي أن $f(3), f(-3)$ غير موجودتين. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند كل من $x=-3,\ x=3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

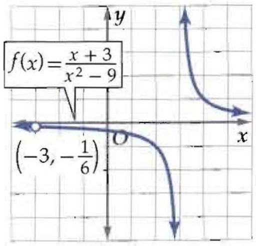
x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)\approx -0.167\approx -\frac{1}{6}$.

ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **غير موجودة**.



الشكل 1.3.3

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=-3$. وللدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

تحقق من فهمك

2A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

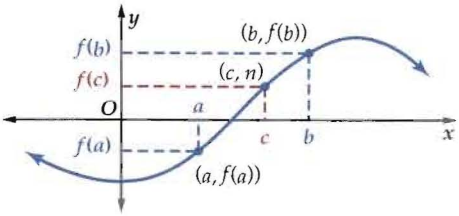
2B) $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \ x>2\\ 2-x & , \ x\le 2\end{cases}$ ، عند $x=2$.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة.

نظرية: نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.

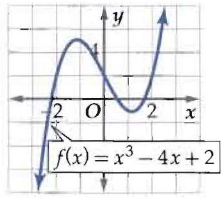


مثال 3 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها أصفار الدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−46	−13	2	5	2	−1	2	17	50

بما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -3, -2، أي يوجد صفر للدالة في الفترة $-3 < x < -2$. لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على وجود أصفار للدالة في هاتين الفترتين. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.



الشكل 1.3.4

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$، $[-6, 4]$

3B) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$، $[-3, 4]$

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًا لصفر الدالة الحقيقي. أمّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

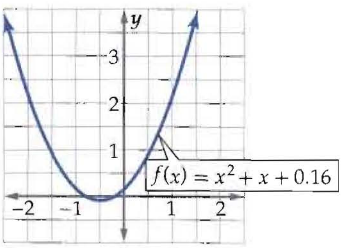
مثال 4 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

لاحظ أن قيم الدالة لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًا للتحقق من ذلك.

يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.



إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$، $[-5, 5]$

4B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$، $[0, 4]$

قراءة الرياضيات

النهايات

تقرأ العبارة $\lim_{x\to\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

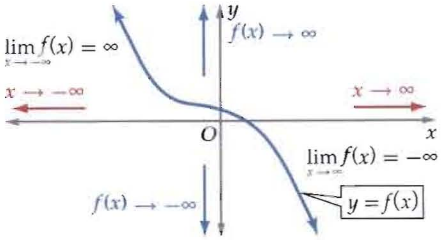
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

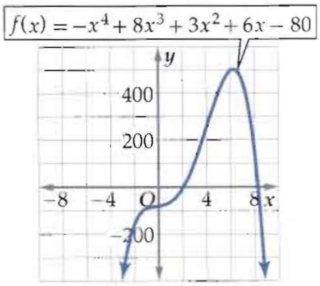


إرشادات للدراسة

في المثال 5، أوجدت قيم تقريبية لـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لـ $f(x)$. وكذلك في المثال 6 في الصفحة اللاحقة.

مثال 5 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، وأن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

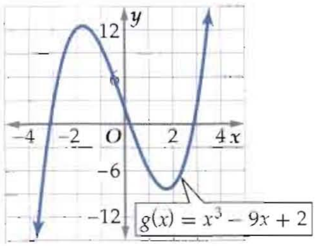
كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

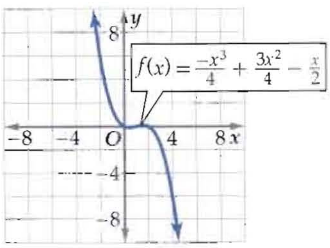
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

5A)

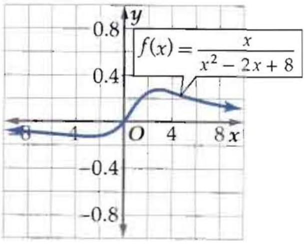


5B)



لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، على حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 6 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة



استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

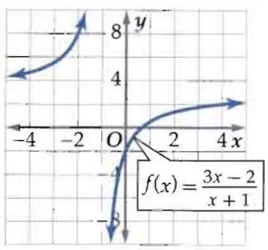
التعزيز عدديًّا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01		0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

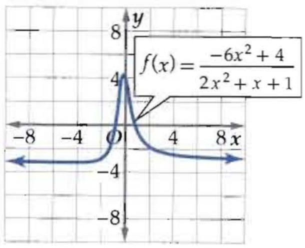
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

(6A



(6B



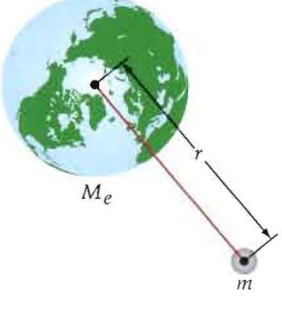
إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

المصدر: The Mechanical Universe

مثال 7 من واقع الحياة تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني



فيزياء: **تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًّا؟**

المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لِـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim_{r \to \infty} U(r)$.

وبما أن كلًّا من G , m , M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا

وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim_{r \to \infty} U(r) = 0$ ، وعليه إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

تحقق من فهمك

7) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$، عند $x = 8$.

3) $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$، عند $x = 6 , x = -6$.

4) $g(x) = \frac{x}{x - 1}$، عند $x = 1$.

5) $h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$، عند $x = 4 , x = 1$.

6) $h(x) = \frac{x(x - 6)}{x^3}$، عند $x = 6 , x = 0$.

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 , & x \le -6 \\ -x + 2 , & x > -6 \end{cases}$، عند $x = -6$.

8) **فيزياء:** غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط حسب العلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث $f(w)$ كمية الحرارة بالواط و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1,2)

a) حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

b) حدّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعها؟

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b .

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الأمثلة 3, 4)

9) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

10) $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

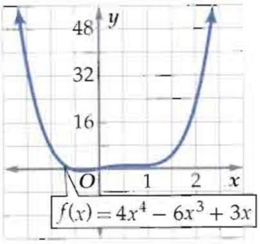
11) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$

12) $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

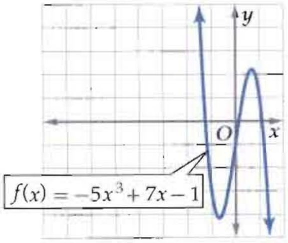
13) $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا. (المثالان 5, 6)

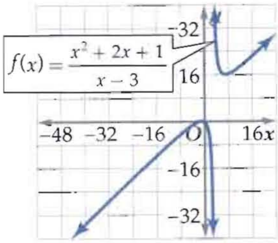
14)



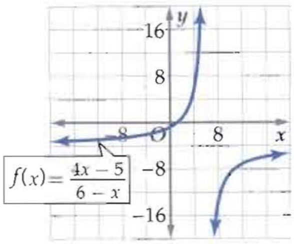
15)



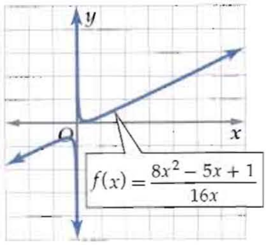
16)



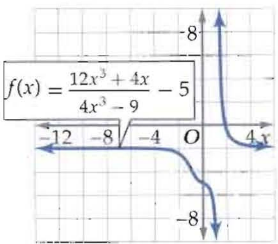
17)



18)



19)



20) **كيمياء:** يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 6)

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة.

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزز إجابتك عدديًّا.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞ . برر إجابتك. (مثال 7)

21) $q(x) = -\frac{24}{x}$

22) $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

23) $m(x) = \frac{4 + x}{2x + 6}$

24) $c(x) = \frac{5x^2}{x^3 + 2x + 1}$

25) $k(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{11x}$

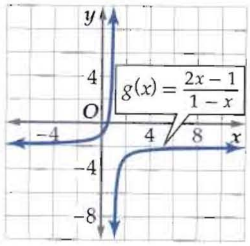
26) $g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$

27) $p(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$

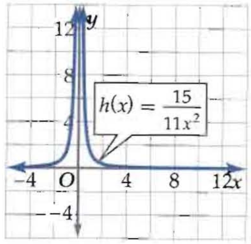
28) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم ، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ **(مثال 7)**

استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برر إجابتك.

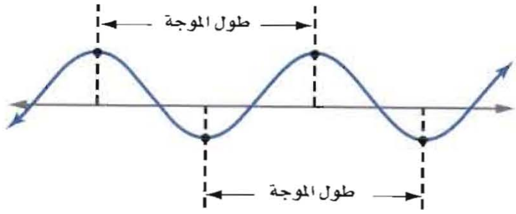
29)



30)



31) **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (ويقرأ لامدا)، ويُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

a) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز إجابتك عدديًا.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.

الحاسبة البيانية: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال وحدد نقاطه. ثمّ صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت.

32) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

33) $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

34) $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية وَ صِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًا.

35) $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

36) $f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x}$

37) **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.

c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

38) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات.

افرض أن $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدوليًا:** افرض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d . ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول أدناه:

$c = 1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) **جدوليًا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$ ، ومجموعة فيها $a < c$ ، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوِّن جدولًا كما في الفرع **a**.

c) **تحليليًا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ **عندما** تقترب x من $-\infty$ ومن $+\infty$.

39) **الحاسبة البيانية:** مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًا، حيث n, a, b أعداد صحيحية غير سالبة.

a) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني **عندما** تكون n عددًا زوجيًا موجبًا، ثم عزز إجابتك بيانيًا.

b) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني **عندما** تكون n **عددًا** فرديًا موجبًا ، ثم عزز إجابتك بالتمثيل البياني.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

40) $f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$

41) $f(x) = \frac{x^4}{x^5}$

42) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \quad x \geq 3 \\ bx + a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$

تبرير: أوجد $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرر إجابتك.

43) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

44) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

45) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

46) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y.

47) **اكتب:** أعط مثالًا على دالة لها عدم اتصال قابل للإزالة، ثم بيّن كيف يمكن إزالته. وكيف تؤثر إزالة عدم الاتصال في الدالة؟

مراجعة تراكمية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًا، وتحديد أصفارها. ثم تحقق من إجابتك جبريًا: (الدرس 1-2)

48) $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$

49) $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

50) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

حدد مجال كل من الدوال الآتية: (الدرس 1-1)

51) $f(x) = \frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

52) $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 10}$

53) $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$

إذا كانت $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي (الدرس 1-1)

54) $f(9)$

55) $f(3b)$

56) $f(2a - 3)$

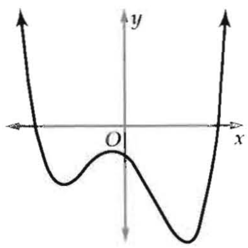
مثل بيانيًا كل من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها. (الدرس 1-2)

57) $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

58) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$

تدريب على اختبار

59) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



A 1

B 2

C 3

D 4

60) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

1-4

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

Extrema and Average Rates of Change

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال.

والآن:

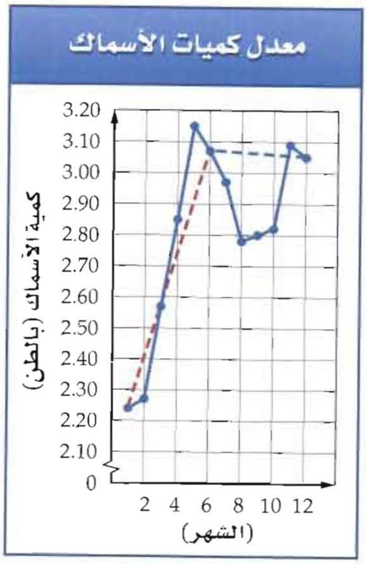
- أحددُ الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات:

المتزايدة
increasing
المتناقصة
decreasing
الثابتة
constant
النقطة الحرجة
critical point
العظمى
maximum
الصغرى
minimum
القصوى
extrema
متوسط معدل التغير
average rate of change
القاطع
secant line

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

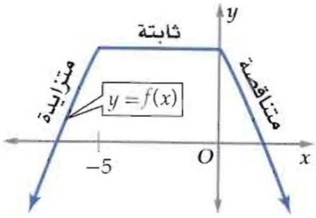


يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 طن وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.



ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

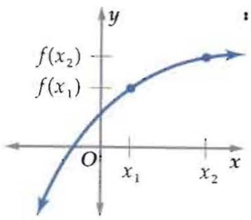
يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — **الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة**

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

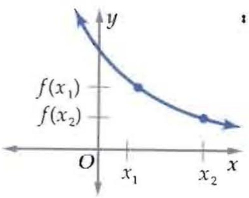
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

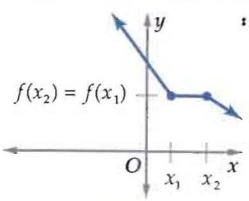
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

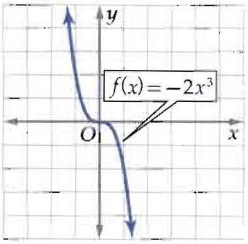
النموذج:



مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا.

(a $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

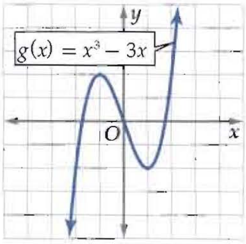
التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x، تتناقص قيم $f(x)$؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل **البياني**.

(b $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ و متزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من **الفترات** الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$g(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$(-1, 1)$:

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

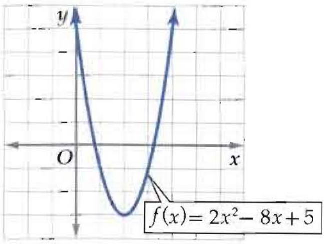
$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	-2	18	110	322	702	1298

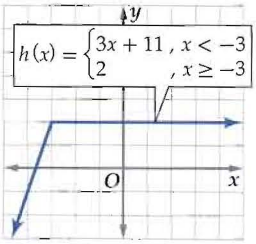
توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

(1A



(1B



بينما يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة ويمكن تعزيز ذلك عدديًا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لإثبات صحة هذه الخصائص.

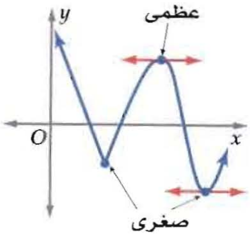
تنبيه!

فترات: لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

إرشادات للدراسة

الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة

إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمّى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. فالدالة في المثال 1a متناقصة، بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على أخرى.



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، ويدل على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

مفهوم أساسي القيم القصوى المحلية والمطلقة

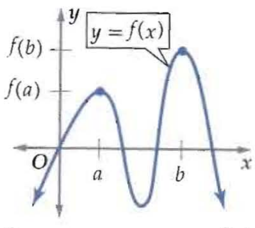
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها سُمّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

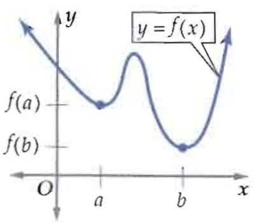
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

بالرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج:

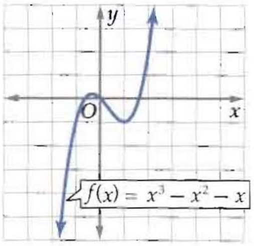


$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية
يُستعمل مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$ ومقدارها صفر تقريبًّا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا:

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

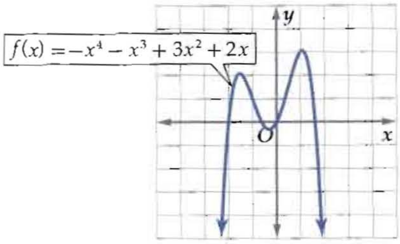
بما أن $f(-0.5) > f(-1)$ و $f(-0.5) > f(0)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5)$، $f(1) < f(0.5)$، فيوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

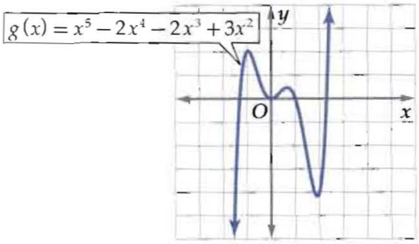
وبما أن $f(1) < f(-100)$، $f(-0.5) < f(100)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا يوجد قيم قصوى مطلقة.

تحقق من فهمك

2A)



2B)

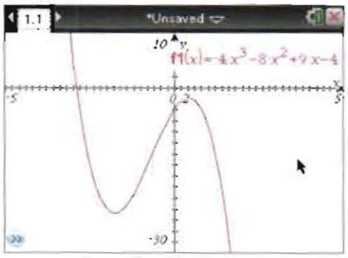


نحتاج إلى حساب التفاضل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، و نحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة. كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

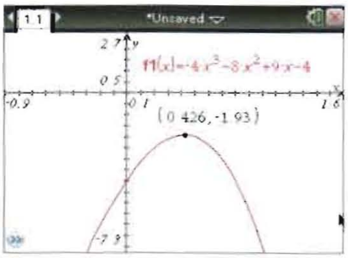
الحاسبة البيانية : **استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.**

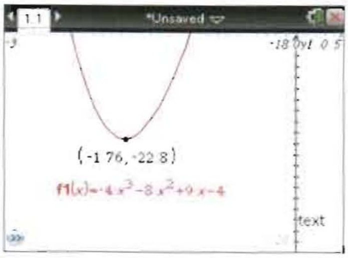
مثّل الدالة بيانيًا، واختر التدريج المناسب حسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.



يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط المفاتيح menu ثم 6:Analyze Graph واختر منها 3:Maximum أو 2:Minimum ، تجد أن القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$ ، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$.





إرشاد تقني

ضبط
عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب، لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملًا.

تحقق من فهمك

3A) $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

الربط مع الحياة

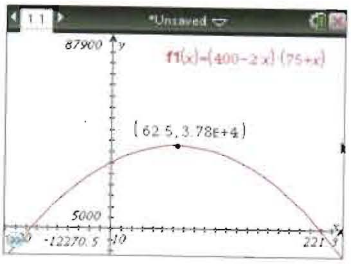
تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيقات القيم القصوى

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الانتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$



المطلوب إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$. لذا مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط المفاتيح menu 6:Analyze Graph 3:Maximum لإيجاد قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة عظمى.

يبين التمثيل وجود قيمة عظمى للدالة هي 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$؛ لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

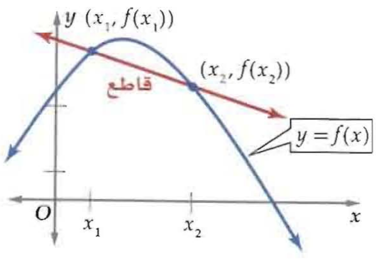
مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بَين هاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

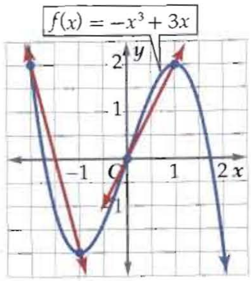
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



إذا كان متوسط معدل التغير على فترة موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة على الفترة. وأما إذا كان سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة على الفترة.

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:



الشكل 1.4.1

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ بتعويض -1 مكان x_2 ، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ بتعويض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بالتبسيط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ بتعويض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ بتعويض $f(1)$ ، $f(0)$ وبالتبسيط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

يُستعملُ متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَى السرعة الحديَة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديَة (120-150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

المصدر: الموسوعة العالمية MSN

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ بتعويض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ بتعويض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبالتبسيط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثواني

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ بتعويض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ بتعويض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبالتبسيط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

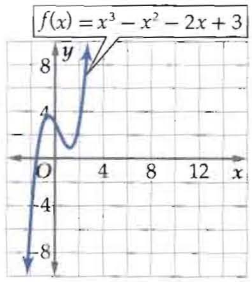
تحقق من فهمك

6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

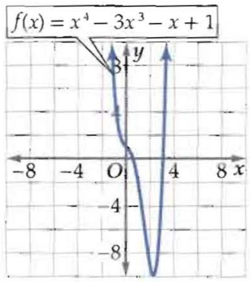
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزز إجابتك عدديًا: (مثال 1)

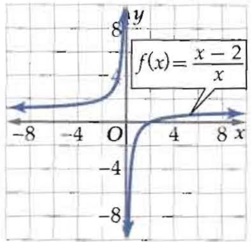
1)



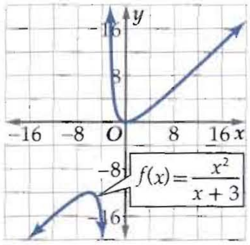
2)



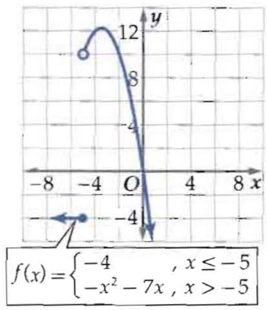
3)



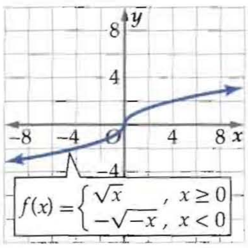
4)



5)



6)



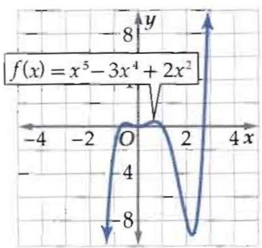
7) **كرة سلة:** يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t)=-64.4t^2+48.3t+5$، حيث t الزمن بالثواني و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

a) مثّل الدالة بيانيًا.

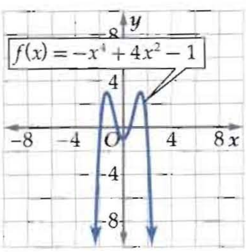
b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًا.

قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقرب إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا. (مثال 2)

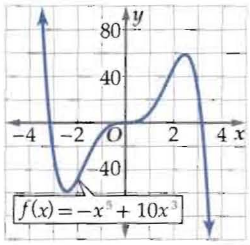
8)



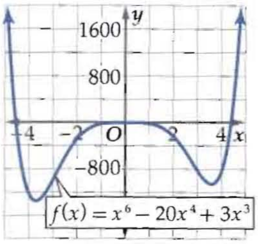
9)



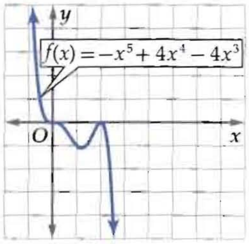
10)



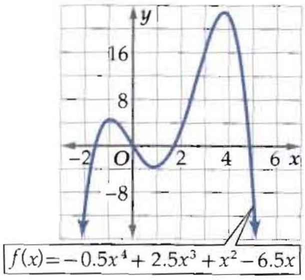
11)



12)



13)



الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

14) $g(x)=-2x^3+7x-5$

15) $f(x)=x^4-2x^2+5x$

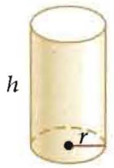
16) $f(x)=-x^5+3x^2+x-1$

17) $g(x)=x^6-4x^4+x$

18) $f(x)=0.008x^5-0.05x^4-0.2x^3+1.2x^2-0.7x$

19) $f(x)=0.025x^5-0.1x^4+0.57x^3+1.2x^2-3.5x-2$

20) **هندسة:** أوجد كلًا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (مثال 4)



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة تساوي 20.5π بوصة مربعة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

21) $g(x)=3x^2-8x+2,\ [4,8]$

22) $f(x)=3x^4-2x^2+6x-1,\ [5,9]$

23) $f(x)=-2x^4-5x^3+4x-6,\ [-1,5]$

24) $h(x)=-x^5-5x^2+6x-9,\ [3,6]$

25) $f(x)=\dfrac{x-3}{x},\ [5,12]$

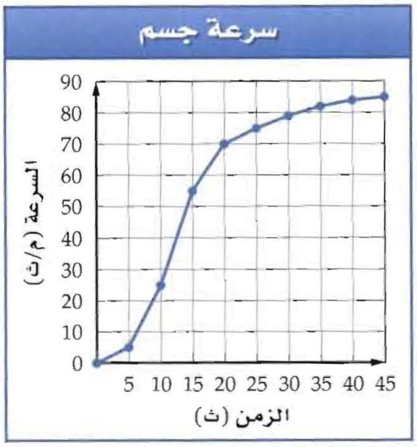
26) $f(x)=\sqrt{x+8},\ [-4,4]$

27) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$ ، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر يناير. فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. **(مثال 6)**

a) من أبريل إلى مايو

b) من يوليو إلى أكتوبر

28) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$.

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية.

29) **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$ ، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \le x \le 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

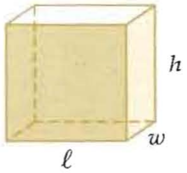
30) **دخل:** افرض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1420هـ وحتى عام 1430 هـ يعطى بالدالة:
$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \le x \le 10$.
حيث x رقم السنة.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1423 إلى عام 1430 هـ. وماذا تعني قيمة متوسط معدل التغير في هذه الفترة؟

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

31) **صندوق:** يرغب سالم بعمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضّح إجابتك.



مثل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

32) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

33) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

34) $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

35) $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

36) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$ ، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.

37) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.

حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبين نوعها:

38) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

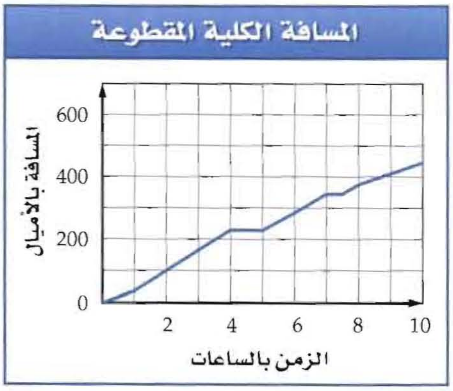
39) $f(x) = -0.5(x + 5)^2 - 1$

40) $f(x) = -4|x - 22| + 65$

41) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$

42) $f(x) = x^3 + x$

43) **سفر:** قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعها في إحدى الرحلات ومثلها بيانيًّا. أعط أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟



مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

44) متصلة
متزايدة على $(-\infty, 4)$
ثابتة على $[4, 8]$
متناقصة على $(8, \infty)$
$f(5) = 3$

45) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x = -2$
متزايدة على $(-\infty, -2)$
متناقصة على $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

46) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$ ومتزايدة عندما $x > c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c. وضّح إجابتك.

47) **تحدٍّ:** إذا كانت g دالة متصلة، وكان $g(a) = 8$ و $g(b) = -4$، فأعط وصفًا لقيمة $g(c)$ حيث $a < c < b$. وبرر إجابتك.

48) **تحدٍّ:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = \sin x$ بيانيًّا، ثم صف القيم القصوى المحلية للدالة.

49) **تبرير:** أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). وضّح إجابتك.

50) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبين نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 1-3)

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ , x = -3$

52) $f(x) = \sqrt{x + 1}\ , x = 3$

53) $h(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}\ ; x = -5\ , x = 5$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. وتحقّق من إجابتك جبريًّا، و إذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 1-2)

54) $f(x) = |x^5|$

55) $f(x) = \dfrac{x + 8}{x - 4}$

56) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

أوجد مجال كل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

57) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 5}$

58) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

59) $h(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-3)

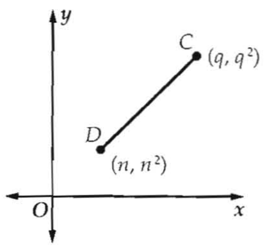
60) $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$

61) $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{7 - 2x^2}$

62) $h(x) = \left|(x - 3)^2 - 1\right|$

تدريب على اختبار

63) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$. فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD .



A $q + n$

B $q - n$

C $\dfrac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\dfrac{1}{q + n}$

64) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية ، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

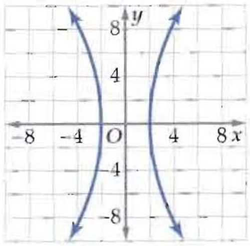
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x : (الدرس 1-1)

1) $3x + 7y = 21$

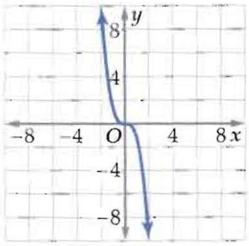
2)

x	y
−1	−1
1	3
3	7
5	11
7	15

3)



4)



5) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ x & , x \geq 2 \end{cases}$ ، فأوجد $f(2)$. (الدرس 1-1)

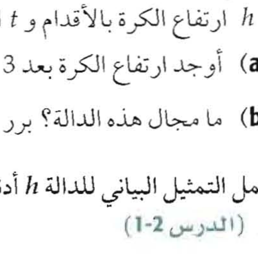
6) **كرة قدم:** يعطى ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض عند ضربها من قبل حارس مرمى بالدالة $h(t) = -8t^2 + 50t + 5$ ، حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام و t الزمن بالثواني. (الدرس 1-1)

a) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثواني.

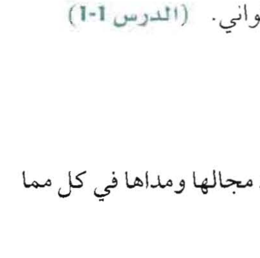
b) ما مجال هذه الدالة؟ برر إجابتك.

استعمل التمثيل البياني للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها في كل مما يأتي (الدرس 1-2)

7)



8)



أوجد المقطع y والأصفار لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 1-2)

9) $f(x) = x^3 - 16x$

10) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x ، والمحور y ، و نقطة الأصل. (الدرس 1-2)

11) $x^2 + y^2 = 9$

12) $xy = 4$

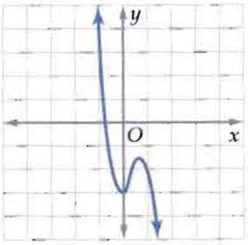
حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 5$. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. (الدرس 3–1)

13) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

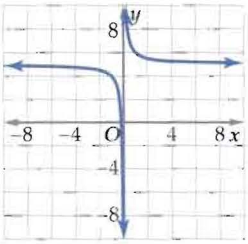
14) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 5}$

صف سلوك طرفي كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين. ثم عزز إجابتك عدديًا. (الدرس 3–1)

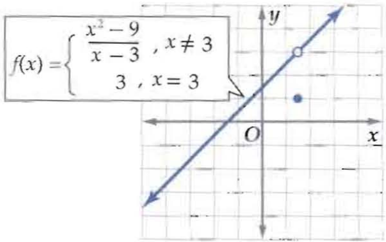
15)



16)



17) **اختيار من متعدد:** ما نوع نقطة عدم الاتصال للدالة الممثلة في الشكل أدناه عند $x = 3$ ؟ (الدرس 1-3)



A غير معرف

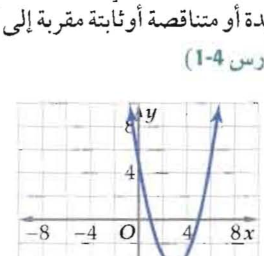
B لانهائي

C قفزي

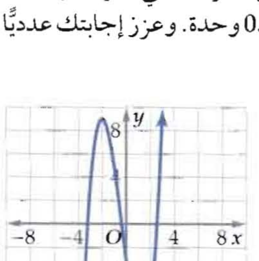
D قابل للإزالة

استعمل التمثيل البياني لكل دالة أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أوثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. وعزز إجابتك عدديًا. (الدرس 1-4)

18)



19)



20) **فيزياء:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء فأوجد متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$. (الدرس 1-4)

1-5

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

Parent Functions and Transformations

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها.

والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًا.

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم)
parent function

الدالة الثابتة
constant function

الدالة المحايدة
identity function

الدالة التربيعية
quadratic function

الدالة التكعيبية
cubic function

دالة الجذر التربيعي
square root function

دالة المقلوب
reciprocal function

دالة القيمة المطلقة
absolute value function

الدالة الدرجية
step function

دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

التحويل الهندسي
transformation

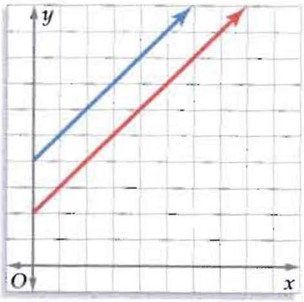
الإزاحة (الانسحاب)
translation

الانعكاس
reflection

التمدد
dilation

لماذا؟

استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

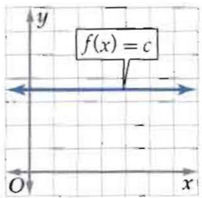


الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها بصفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

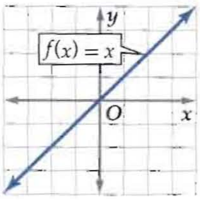
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي — الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية و دوال كثيرات الحدود

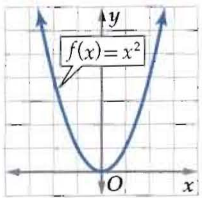
تكتب الدالة الثابتة على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



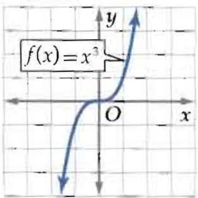
تمر الدالة المحايدة $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



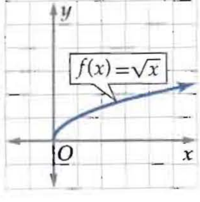
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



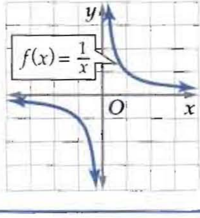
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب دالة الجذر التربيعي على الصورة $f(x) = \sqrt{x}$.



تكتب دالة المقلوب على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

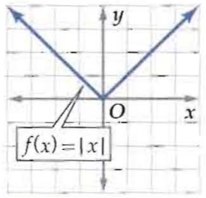
مفهوم أساسي — دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

النموذج



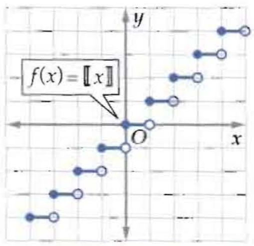
أما **الدالة الدرجية** فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي — دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [\![x]\!]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[\![-4]\!] = -4, [\![-1.5]\!] = -2, \left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$

النموذج



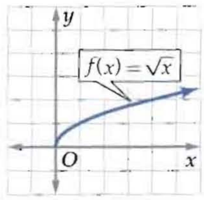
باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1 — وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني و فترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست **زوجية** ولا **فردية**.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

تحقق من فهمك

1A) $f(x) = |x|$

1B) $f(x) = x^3$

التحويلات الهندسية: تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط ولا تغير أبعاده أو شكله وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

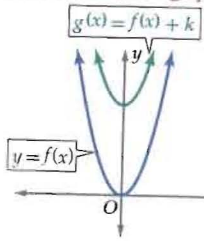
الإزاحة (الانسحاب) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

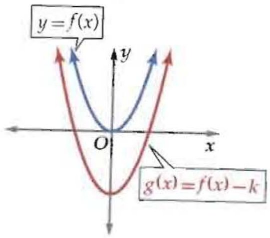
مفهوم أساسي الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

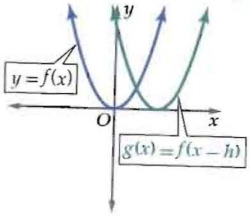


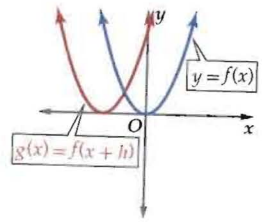


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

a) $g(x) = |x| + 4$

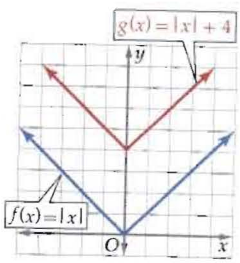
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

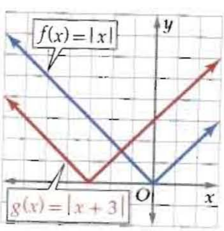
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

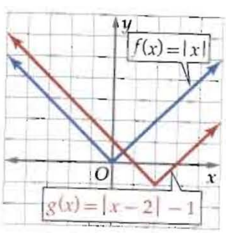
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

✓ تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$ **2B)** $h(x) = 8 + x^3$ **2C)** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

إرشاد تقني

الانسحاب: يمكنك إجراء انسحاب لمنحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire، بعد تمثيل الدالة الرئيسة (الأم) $f_1(x)$:

- لاجراء انسحاب مقداره k وحدة لأعلى أو لأسفل اضغط على المفاتيح: tab var $f1(x) \pm k$ enter
- لاجراء انسحاب مقداره h وحدة لليمين أو اليسار اضغط على المفاتيح: tab var $f1(x) \pm h$ enter

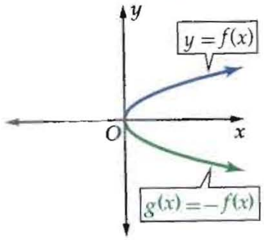
ستقوم الحاسبة برسم كلا الدالتين الرئيسة (الأم) والدالة المزاحة على الشاشة نفسها.

من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس** والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

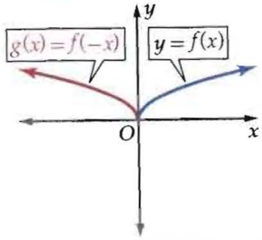
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .

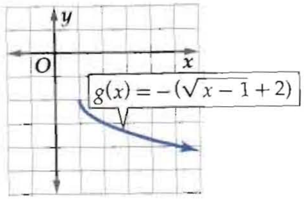


الانعكاس حول المحور y

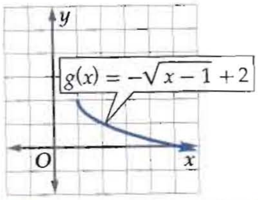
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



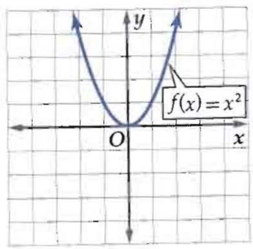
انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى الأعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى الأعلى.

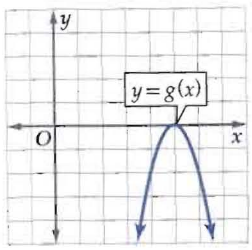
مثال 3 كتابة معادلات التحويل

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



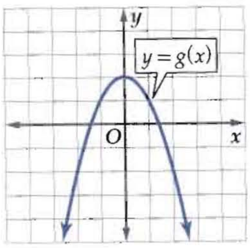
الشكل 1.5.5

a)



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x ، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

b)

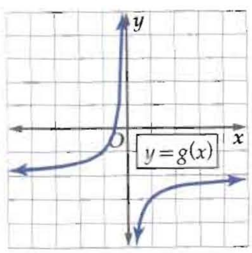


منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

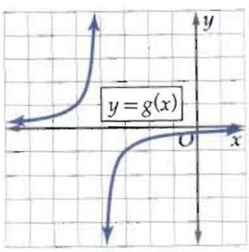
✓ تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

3A)



3B)



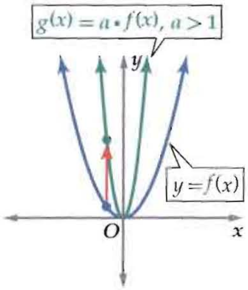
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

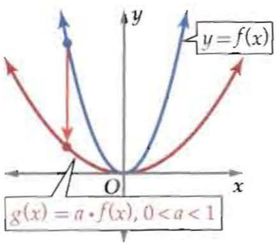
مفهوم أساسي — التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

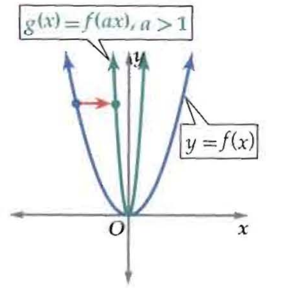


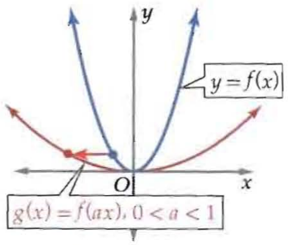


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0<a<1$



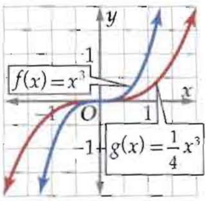


مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

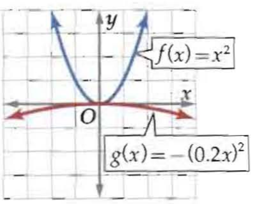
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(0.2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو توسع أفقي، ثم انعكاس حول المحور x لمنحنى $f(x) = x^2$؛ لأن $g(x) = -(0.2x)^2 = -f(0.2x)$ وَ $0 < 0.2 < 1$.



✓ تحقق من فهمك

4A) $g(x) = [\![x]\!] - 4$

4B) $g(x) = \frac{15}{x} + 3$

إرشادات للدراسة

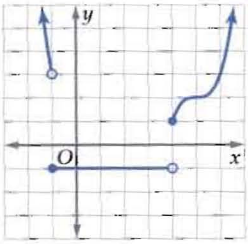
التمدد

يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبِّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها .

مثال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًا

مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ x < -1 \\ -1 & , \ -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \ x \ge 4 \end{cases}$.



في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل **الدالة** الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

تحقق من فهمك

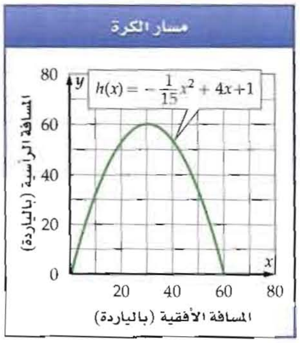
5A) $g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \ x \le 0 \\ x^3 & , \ 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \ x > 2 \end{cases}$

5B) $h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \ x < -5 \\ 7 & , \ -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & , \ x > 2 \end{cases}$

يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثّل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة التحويلات الهندسية على الدوال

كرة قدم: ضرب لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

$$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1 \quad \text{الدالة الأصلية}$$

$$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1 \quad \text{بتحليل } -\frac{1}{15}x^2 + 4x$$

$$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900) \quad \text{بإكمال المربع}$$

$$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61 \quad \text{بكتابة } x^2 - 60x + 900 \text{ على صورة مربع كامل ثم التبسيط}$$

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

الربط مع الحياة

تأسس الاتحاد السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

تحقق من فهمك

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

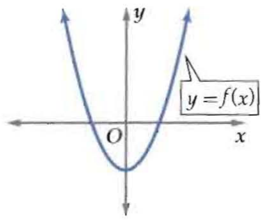
إرشاد تقني

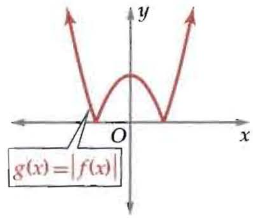
تحويلات القيمة المطلقة
يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .

مفهوم أساسي التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

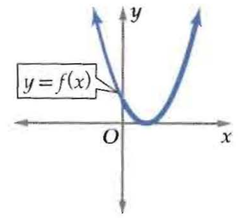
يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه.

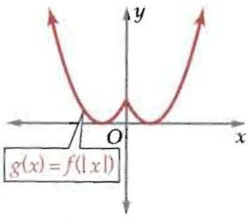


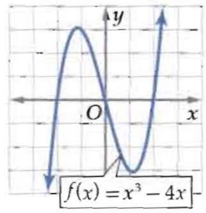


$g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .







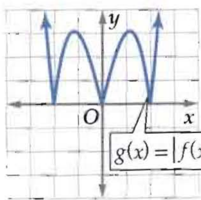
الشكل 1.5.6

مثال 7 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

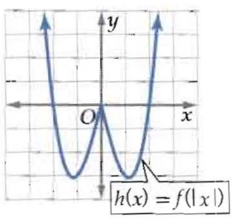
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

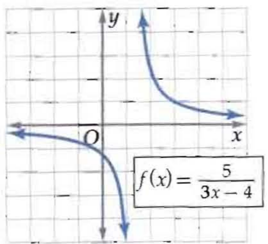
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



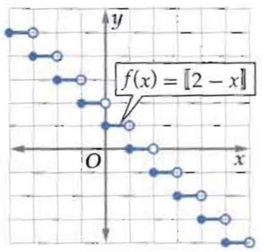
✓ تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًا:

7A)



7B)



تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1)

1) $f(x) = [\![x]\!]$ **2)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **3)** $f(x) = x^3$

4) $f(x) = x^2$ **5)** $f(x) = c$ **6)** $f(x) = x$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

8) $g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$

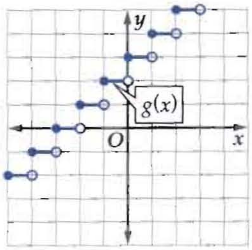
استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$

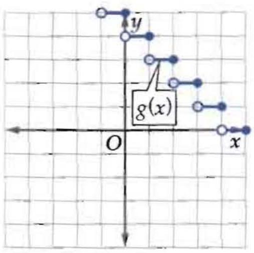
10) $g(x) = \frac{1}{x + 7} - 4$

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

11)

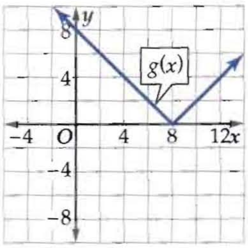


12)

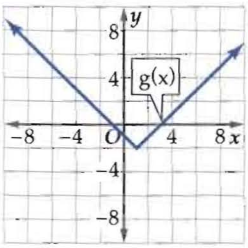


صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3)

13)



14)



اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15) $g(x) = 3|x| - 4$ **16)** $g(x) = 3\sqrt{x + 8}$

17) $g(x) = \frac{4}{x + 1}$ **18)** $g(x) = 2[\![x - 6]\!]$

19) $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$ **20)** $g(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{4}$

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًا: (مثال 5)

21) $f(x) = \begin{cases} -x^2 &, \quad x < -2 \\ 3 &, \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 &, \quad x \ge 7 \end{cases}$

22) $g(x) = \begin{cases} x + 4 &, \quad x < -6 \\ \frac{1}{x} &, \quad -6 \le x < 4 \\ 6 &, \quad x \ge 4 \end{cases}$

23) $h(x) = \begin{cases} |x - 5| &, \quad x < -3 \\ 4x - 3 &, \quad -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x} &, \quad x \ge 4 \end{cases}$

24) $g(x) = \begin{cases} 2 &, \quad x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 &, \quad -1 \le x < 1 \\ [\![x]\!] + 1 &, \quad x \ge 3 \end{cases}$

25) **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ عام 1411هـ حتى 1431هـ . استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55

26) **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2\,[\![x]\!]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [\![x]\!]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًّا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

27) **فيزياء:** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر . (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$.

b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$، فمثّل بيانيًا كلًّا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية.

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|, h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (مثال 7)

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

29) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

30) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$

31) $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32) $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى الأعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2.

33) $f(x) = [\![x]\!]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى الأسفل، وتوسع رأسي معامله 3.

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:

34) $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$

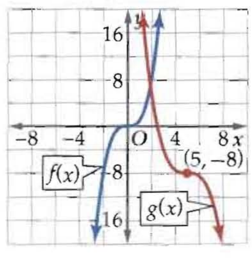
35) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

36) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

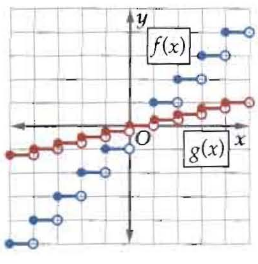
37) $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

اكتب معادلة $g(x)$ في كل مما يأتي:

38)



39)



40) **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

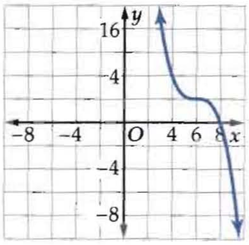
a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع.

b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء.

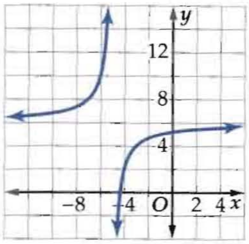
c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع.

اكتب دالة تمثّل المنحنى في كل مما يأتي:

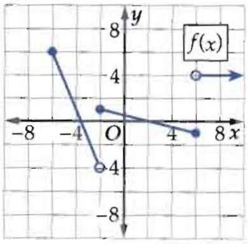
41)



42)



استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



43) $g(x) = 0.25f(x) + 4$

44) $g(x) = 3f(x) - 6$

45) $g(x) = f(x-5) + 3$

46) $g(x) = -2f(x) + 1$

استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

47) $g(x) = 2f(x) + 5$

48) $g(x) = -3f(x) + 6$

49) $g(x) = f(4x) - 5$

50) $g(x) = f(2x+1) + 8$

51) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًّا:** اختر ثلاث قيم لـ a وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$

b) **لفظيًّا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

c) **جبريًّا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

52) اكتشف الخطأ: وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [\![x + 4]\!]$. فقال محمد أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار وقال عبد الله إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى الأعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

53) تبرير: إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $f(x), h(x)$؟ برر إجابتك.

54) اكتب: وضح أهمية الترتيب في تحويلات الانعكاس والانسحاب.

تبرير: تحقق ما إذا كانت كل من الجملتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة. وبرر إجابتك.

55) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = |f(x)|$

56) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(-x) = -|f(x)|$

57) تحدٍّ: صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

58) تبرير: وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

59) اكتب: استعمل التعبير اللفظي والتمثيل البياني والجداول و المعادلات لوصف العلاقة بين الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية عليها. دعِّم إجابتك بأمثلة.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

60) $g(x) = -2x^2 + x - 3, [-1, 3]$

61) $g(x) = x^2 - 6x + 1, [4, 8]$

62) $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4, [-2, 3]$

حدِّد سلوك طرف التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية عندما تقترب x من ما لانهاية، مستعملًا التبرير المنطقي، وبرر إجابتك. (الدرس 3-1)

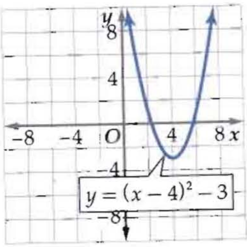
63) $q(x) = -\frac{12}{x}$

64) $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

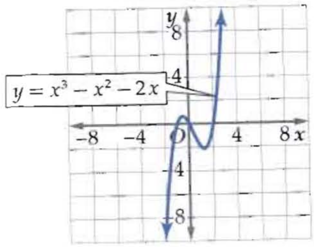
65) $p(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير قيمة كلٍّ من: المقطع y، والأصفار إلى أقرب جزء من مئة (كلما لزم ذلك) لكل دالة من الدوال الآتية، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا: (الدرس 2-1)

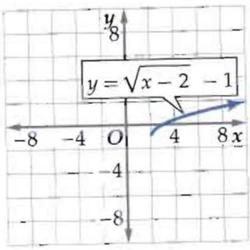
66)



67)

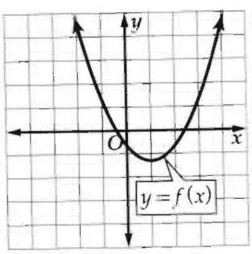


68)



تدريب على اختبار

69) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

70) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2 + 8}{2}$ ؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

1-6

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

Function Operations and Composition of Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال.

والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجِدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين

composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال: يمكنك إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الأعداد الحقيقية، وفي هذا الدرس ستتعلمُ إجراءَ العمليات نفسها على الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 العمليات على الدوال

إذا كانت $h(x) = 3x - 5$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $f(x) = x^2 + 4x$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2+4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)\\ &= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}\end{aligned}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$\begin{aligned}(f-h)(x) &= f(x) - h(x)\\ &= (x^2+4x) - (3x-5)\\ &= x^2 + 4x - 3x + 5\\ &= x^2 + x + 5\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(x) &= f(x) \cdot h(x)\\ &= (x^2+4x)(3x-5)\\ &= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x\\ &= 3x^3 + 7x^2 - 20x\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$ ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in R\}$.

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B) $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين
يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

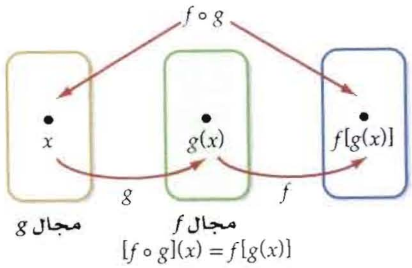
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$ ، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

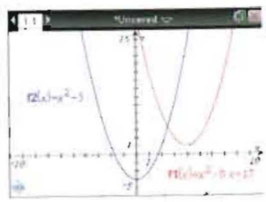
ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g ، حيثُ تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

تنبيه!

ترتيب الدوال عند التركيب
في معظم الأحيان $g \circ f, f \circ g$ دالتان مختلفتان. بمعنى آخر إن تركيب الدوال ليس إبداليًا. ففي المثال 2
$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$
لكن $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ وهما دالتان مختلفتان. والتمثيل البياني أدناه يبيّن ذلك.



مثال 2 — تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x - 4$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x - 4)$	$g(x) = x - 4$
$= (x - 4)^2 + 1$	بتعويض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$
$= x^2 - 8x + 16 + 1$	بالتبسيط
$= x^2 - 8x + 17$	

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 + 1$
$= (x^2 + 1) - 4$	بتعويض (x^2+1) بدلًا من x في $g(x)$
$= x^2 - 3$	بالتبسيط

c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ بتعويض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](x)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](3)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4,\ g(x) = x + 2$

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x^2 - 9)$	$g(x) = x^2 - 9$
$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$	بتعويض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. وعليه يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

b) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$ ونطرح منها 2. لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

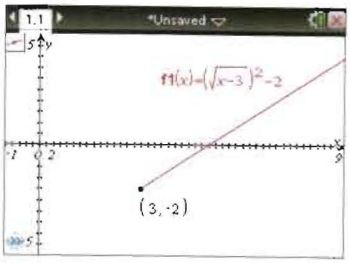
$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(\sqrt{x-3})$	$g(x) = \sqrt{x-3}$
$= (\sqrt{x-3})^2 - 2$	بتعويض $\sqrt{x-3}$ بدلًا من x في $f(x)$
$= x - 3 - 2 = x - 5$	بالتبسيط

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

التحقق: استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. أدخل الدالة $y = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. فيظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانيّة بالضغط على المفاتيح:

menu 5:Trace 1:Graph Trace لمساعدتك

على تحديد مجال $f \circ g$ والذي يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞.



تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = x^2 + x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك تجد دالتين (f, g مثلًا) بحيث يكون تركيبهما هو h.

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

لاحظ أن h هو الجذر التربيعي للدالة $x^3 - 4$؛ لذا فإننا نختار $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3 - 4$. أي أنه يمكننا كتابة h كتركيب للدالتين $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3 - 4$، وعندئذ:

$$h(x) = \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x + 5$، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

تحقق من فهمك

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$ **4B)** $h(x) = \frac{1}{x + 7}$

يمكنك استعمال تركيب دالتين لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$. أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L(L + 40) = L^2 + 40L$، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	بتعويض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بالتبسيط.

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 **أضعاف** مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d.

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

الربط مع الحياة

مؤثرات حركية

يعمل المصممون في العديد من الأعمال لتصميم مؤثرات حركية تستعمل في التلفاز وألعاب الفيديو؛ لذا يجب أن يكون مصممو الألعاب فنانين، ويتلقى أغلبهم تدريبًا في كليات متخصصة.

تدرب وحل المسائل

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\bullet g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $g(x)$, $f(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1)

1) $f(x) = x^2 + 4$
$g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$
$g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
$g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$
$g(x) = 9x$

5) $f(x) = x - 7$
$g(x) = x + 7$

6) $f(x) = \frac{6}{x}$
$g(x) = x^3 + x$

7) $f(x) = \frac{x}{4}$
$g(x) = \frac{3}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = 4\sqrt{x}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$
$g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

10) $f(x) = \sqrt{x+6}$
$g(x) = \sqrt{x-4}$

أوجد $[f\circ g](x)$, $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية. (مثال 2)

11) $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x - 8$

12) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
$g(x) = -5x + 6$

13) $f(x) = x^2 - 16$
$g(x) = x^2 + 7x + 11$

14) $f(x) = 2 + x^4$
$g(x) = -x^2$

حدِّد مجال $f\circ g$ ، ثم أوجد $f\circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 4$

16) $f(x) = \frac{2}{x-3}$
$g(x) = x^2 + 6$

17) $f(x) = \sqrt{x+4}$
$g(x) = x^2 - 4$

18) $f(x) = \frac{5}{x}$
$g(x) = \sqrt{6-x}$

19) $f(x) = -\frac{4}{x}$
$g(x) = \sqrt{x+8}$

20) $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 + 4x - 1$

21) **النظرية النسبية:** في النظرية النسبية $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ، حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية وكتلته الأصلية 100 kg. (مثال 4)

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برر إجابتك.

b) أوجد $m(10)$, $m(10000)$, $m(1000000)$.

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تصبح v كبيرة جدًا.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد دالتين f , g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f\circ g](x)$ ، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4)

22) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

23) $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

24) $h(x) = |4x + 8| - 9$

25) $h(x) = [\![-3(x-9)]\!]$

26) $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

27) $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

28) $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

29) $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

30) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg ، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$ ، حيث h ثابت يساوي $6.626 \bullet 10^{-34}$.

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته.

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h.

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

31) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افرض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5)

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برر إجابتك.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة.

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32) $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

33) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

34) $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

35) $h(x) = \frac{x^2-4}{x} + \frac{3x-5}{5x}$

أوجد $f(0.5), f(-6), f(x+1)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

36) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

37) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

38) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ في كل مما يأتي:

39) $f(x) = x + 8$, $g(x) = x^2 - 6$, $h(x) = \sqrt{x} + 3$

40) $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = x^2 - 3$, $h(x) = \frac{1}{x}$

41) إذا كانت $f(x) = x + 2$، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

42) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$

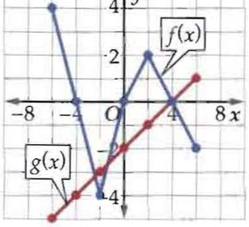
b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$

43) إذا كان $f(x) = 4x^2$، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$

b) $[f \cdot g](x) = 4x$

باستعمال منحنيي الدالتين $f(x), g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



44) $(f+g)(2)$

45) $(f-g)(-6)$

46) $(f \cdot g)(4)$

47) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

48) $(f \circ g)(-4)$

49) $(g \circ f)(6)$

50) **كيمياء:** إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة $30°C$ بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ فسر معناها.

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة $30°C$.

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد ثلاث دوال f, g, h، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

51) $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

52) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

53) $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2 + 4}$

54) $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x} + 3)^2 + 1}$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

55) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

56) $f(x) = \sqrt{x+6}$, $g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

57) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

58) $f(x) = \frac{6}{2x+1}$, $g(x) = \frac{4}{4-x}$

59) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

a) **جبريًا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c) **بيانيًا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d) **لفظيًا:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

e) **تحليليًا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟

f) **تحليليًا:** أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

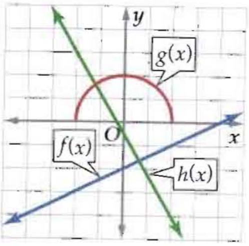
a) $f(x) = x - 6$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = 2x - 3$

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 60 مثّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 63-61:



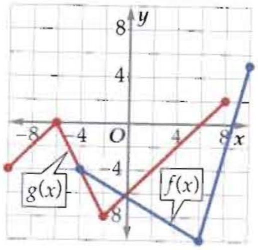
60) $(f+h)(x)$

61) $(h-f)(x)$

62) $(f+g)(x)$

63) $(h+g)(x)$

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



64) $(f\circ g)(x)$ **65)** $(g\circ f)(x)$

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f\circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

66) f, g دالتان فرديتان.

67) f, g دالتان زوجيتان.

68) f زوجية، g فردية.

69) f فردية، g زوجية.

تحدٍّ: في كل مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x)=x$ بحيث تحقق الشرط المعطى.

70) $(f\cdot f)(x)=x$

71) $(f+f)(x)=x$

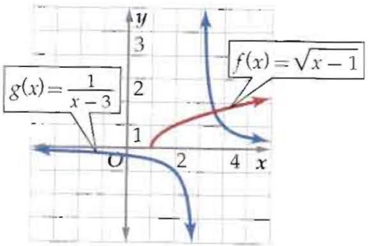
72) $[f\circ f](x)=x$

73) $[f\circ f\circ f](x)=x$

74) تبرير: حدّد فيما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا، أم ليست صحيحة أبدًا. وبرر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية، فإن $f\circ g$ دالة خطية".

75) اكتب: كيف تحدد مجال الدالة $[f\circ g](x)$ باستعمال الشكل الآتي:



مراجعة تراكمية

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة، ثم حدّد قيم x التي تقع عندها هذه القيم: (الدرس 4-1)

76) $f(x)=2x^3-3x^2+4$

77) $g(x)=-x^3+5x-3$

78) $f(x)=x^4+x^3-2$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية مقربة لأقرب جزء من مئة لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 3-1)

79) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-4},\ [-3, 3]$

80) $g(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+3x},\ [1, 5]$

81) علاقة: في إحصائية أجريت لعدد الموظفين من الجنسين في أحد المستشفيات لعدة سنوات متتالية، كانت نتائجها كما في الجدول الآتي: (الدرس 1-1)

السنة	1427	1428	1429	1430	1431
عدد الإناث (x)	43	48	54	54	48
عدد الذكور (y)	150	148	137	156	146

a) مثّل البيانات التي تربط عدد الإناث بعدد الذكور والموجودة في الجدول بيانيًّا.

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟ برر إجابتك.

تدريب على اختبار

82) إذا كانت $h(x)=2(x-5)^2$ ، $g(x)=x^2+9x+21$، فإن $h[g(x)]$ تساوي:

A $x^4+18x^3+113x^2+288x+256$

B $2x^4+36x^3+226x^2+576x+512$

C $3x^4+54x^3+339x^2+864x+768$

D $4x^4+72x^3+452x^2+1152x+1024$

83) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$، فما قيمة $[f\circ g](3)$؟

A 2 **C** 4

B 3 **D** 5

1-7

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين.

والآن:

- أستعملُ منحنيات الدوال لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثّل دالة أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

المفردات:

العلاقة العكسية inverse relation

الدالة العكسية inverse function

الدالة المتباينة one-to-one function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، على حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

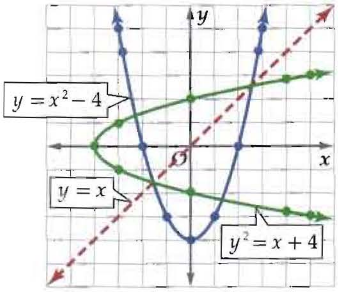
السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال إن العلاقة A **علاقة عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجود في إحدى العلاقتين فإن (a, b) يكون موجودًا في الأخرى. وإذا مُثلت العلاقة بمعادلة فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالًا. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لِـ f ويرمز لها بالرمز f^{-1}. لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية

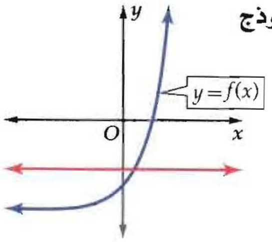
يجب ألّا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

مفهوم أساسي **اختبار الخط الأفقي**

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

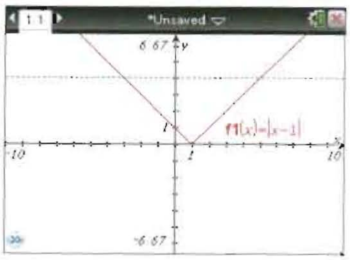
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$

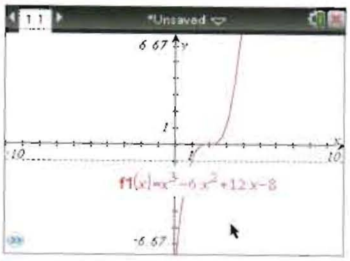
يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل 1.7.1 أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل 1.7.2 أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.



الشكل 1.7.1



الشكل 1.7.2

✅ تحقق من فهمك

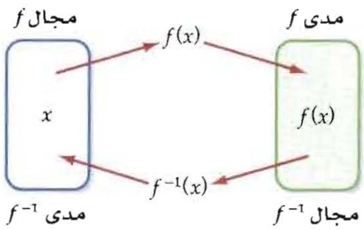
1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$

> **تنبيه!**
>
> **اختبار الخط الأفقي** عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال 4:Window/Zoom أو 3:zoom in أو 4:Zoom - Out أو اضبط الشاشة للتأكد.

إيجاد الدالة العكسية: إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًّا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًّا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقَق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

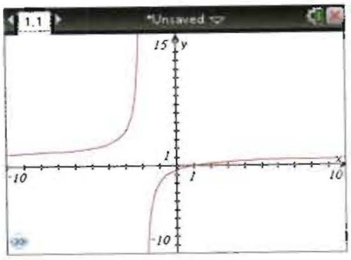
قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس
يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة دالة قابلة للعكس.

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$



يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
والآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ الدالة الأصلية

$y = \dfrac{x-1}{x+2}$ بتعويض y بدلًا من $f(x)$

$x = \dfrac{y-1}{y+2}$ بالتبديل بين x, y

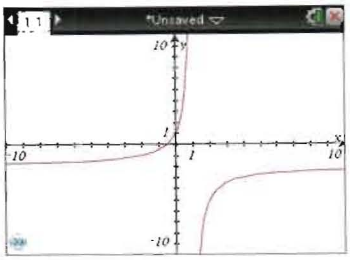
$xy + 2x = y - 1$ بضرب الطرفين في $(y+2)$، ثم تطبيق خاصية التوزيع

$xy - y = -2x - 1$ بوضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد

$y(x-1) = -2x - 1$ خاصية التوزيع

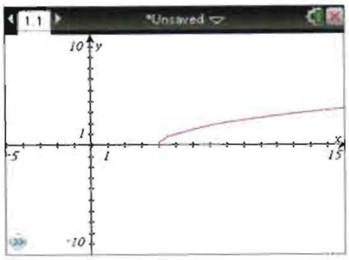
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$ بالحل بالنسبة لـ y

$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$ بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$



يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}.

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$



يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$ الدالة الأصلية

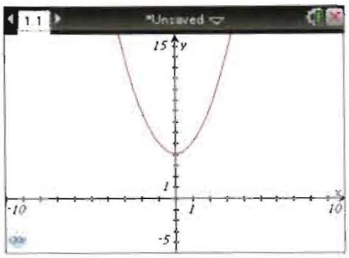
$y = \sqrt{x-4}$ بتعويض y بدلًا من $f(x)$

$x = \sqrt{y-4}$ بالتبديل بين x و y

$x^2 = y - 4$ بتربيع الطرفين

$y = x^2 + 4$ بالحل بالنسبة إلى y

$f^{-1}(x) = x^2 + 4$ بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$، ومداها $[4, \infty)$. وعليه فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$

2B) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي — تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- **$f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.**
- **$f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.**

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

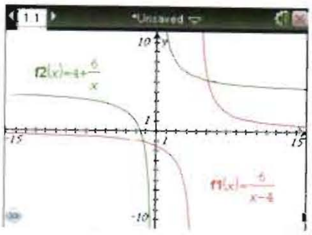
مثال 3 — إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$



بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ ، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3A $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

(3B $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0,\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

إرشادات للدراسة

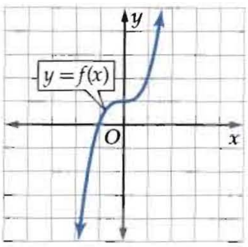
الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي وعليه لا تكون دالة متباينة.

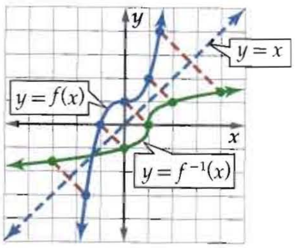
مثال 4 — إيجاد الدالة العكسية بيانيًا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ **في الشكل 1.7.3** لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3

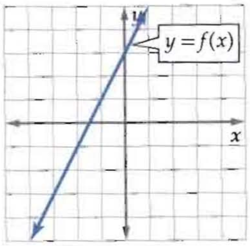


الشكل 1.7.4

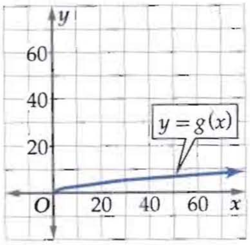
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:

4A)



4B)



الربط مع الحياة

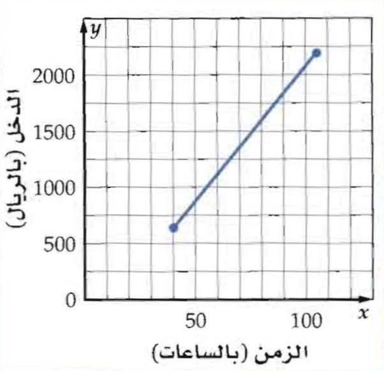
ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلًا فعليًا أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".

مثال 5 من واقع الحياة — استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

الدخل الأسبوعي لعامل



يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$ أو $f(x) = 24x - 320$. يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	بتعويض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بالتبديل بين x و y
$x + 320 = 24y$	بإضافة 320 إلى الطرفين
$y = \dfrac{x + 320}{24}$	بالحل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \dfrac{x + 320}{24}$	بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى هو 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. و بما أن $f(40) = 640$, $f(105) = 2200$، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

$f^{-1}(760) = \dfrac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

تحقق من فهمك

5) توفير: يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$ 2) $y = x^2 - 16x + 64$

3) $y = 3x - 8$ 4) $y = 4$

5) $y = \sqrt{x+4}$ 6) $y = -4x^2 + 8$

7) $y = \frac{8}{x+2}$ 8) $y = \frac{1}{4}x^3$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$ 10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

11) $f(x) = \sqrt{x+8}$ 12) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$

13) $f(x) = |x - 6|$ 14) $g(x) = \frac{x-6}{x}$

15) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$ 16) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$

17) $h(x) = \frac{x+4}{3x-5}$ 18) $g(x) = |x+1| + |x-4|$

19) **سرعة:** تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3)

20) $f(x) = 4x + 9$, $g(x) = \frac{x-9}{4}$

21) $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{\frac{5-x}{3}}$

22) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{4x - 32}$

23) $f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$

24) $f(x) = 2x^3 - 6$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$

25) $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$, $g(x) = \frac{2x+6}{1-x}$

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3)

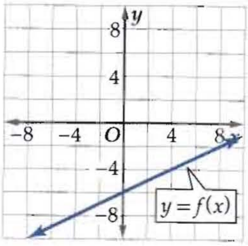
a) أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

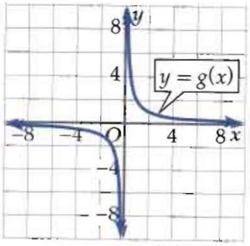
c) مَثّل كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4)

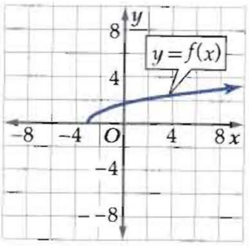
27)



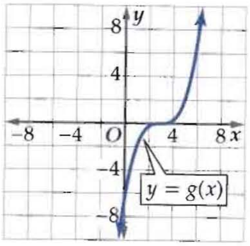
28)



29)



30)



31) **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالًا في الأسبوع ويتقاضى أيضًا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات. أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًّا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$. (مثال 5)

a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

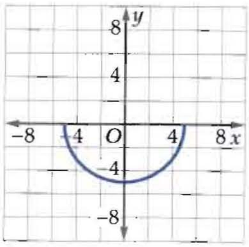
b) ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

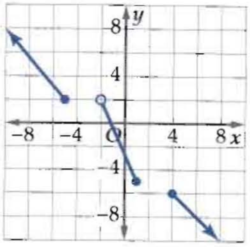
d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

حدد إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

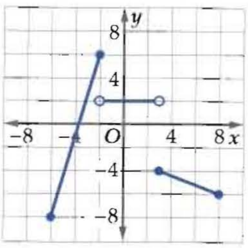
32)



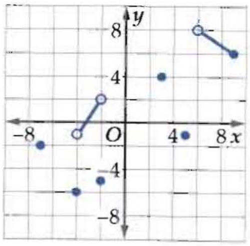
33)



34)



35)



كون جدولًا للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب.

36)

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

37)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

38) درجات حرارة: تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

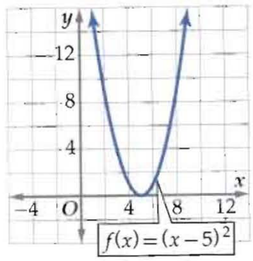
b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

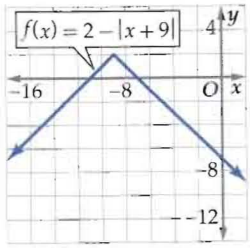
d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$ فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها.

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها:

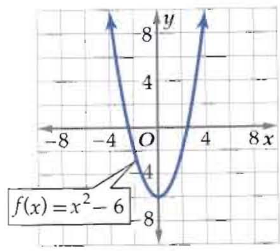
39)



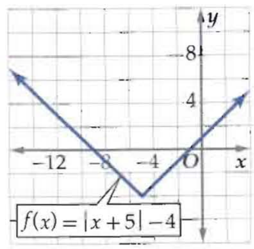
40)



41)



42)



43) أزهار: تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريال للزهرة الواحدة. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها ؟

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}:

44) $f(x) = \sqrt{x-6}$

45) $f(x) = x^2 + 9$

46) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$

47) $f(x) = \dfrac{8x+3}{2x-6}$

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. و اذكر أية قيود على المجال:

48) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ -4 \geq x \\ -2x+5 & , \ -4 < x \end{cases}$

49) $f(x) = \begin{cases} -4x+6 & , \ -5 \geq x \\ 2x-8 & , \ -5 < x \end{cases}$

50) اتصالات: أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. إذا كانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم 50 ريالًا فقط.

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط.

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل؟

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟

إذا كانت $f(x) = 8x - 4, g(x) = 2x + 6$ فأوجد:

51) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

52) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

53) $(f \circ g)^{-1}(x)$

54) $(g \circ f)^{-1}(x)$

55) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة معكوس كل من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود معكوس للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

c) **بيانيًا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود معكوس للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرًا عند 6 ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برر إجابتك.

"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

59) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - ax + 8$, $f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a.

60) **تبرير:** هل توجد دالة $f(x)$ تحقق اختبار الخط الأفقي، وتحقق المعادلتين $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ في الوقت نفسه؟

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$, $g \circ f$، ثم أوجد مجال دالة التركيب: (الدرس 1-6)

61) $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي: (الدرس 1-5)

63) $f(x) = x^2$

a) $y = (0.2x)^2$

b) $y = (x - 5)^2 - 2$

c) $y = 3x^2 + 6$

64) $f(x) = x^3$

a) $y = |x^3 + 3|$

b) $y = -(2x)^3$

c) $y = 0.75(x + 1)^3$

65) $f(x) = |x|$

a) $y = |2x|$

b) $y = |x - 5|$

c) $y = |3x + 1| - 4$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

66) $f(x) = x^3 - x, [0, 3]$

67) $f(x) = x^4 - 2x + 1, [-5, 1]$

تدريب على اختبار

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًّا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال (الدرس 1-1)

- المجموعات الجزئية الشائعة من مجموعة الأعداد الحقيقية هي: الأعداد النسبية، الأعداد غير النسبية، الأعداد الصحيحة، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية.
- الدالة هي علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.
- يحقق منحنى أي دالة اختبار الخط الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 1-2)

- قد تكون المنحنيات متماثلةً حول المحور y، أو المحور x، أو نقطة الأصل.
- الدالة الزوجية متماثلة حول المحور y، والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الدرس 1-3)

- إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فنقول إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L. وتكتب $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
- قد تكون الدالة غير متصلة، ونوع عدم الاتصال هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الدرس 1-4)

- تكون الدالة إما متزايدةً أو متناقصةً أو ثابتةً على فترات معينة.
- تتضمن القيم القصوى القيمة العظمى المحلية، والصغرى المحلية، والعظمى المطلقة، والصغرى المطلقة.
- يعطى متوسط معدل التغير بين نقطتين بالقاعدة

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الدرس 1-5)

تتضمن التحويلات الهندسية على الدالة الرئيسة (الأم): الانسحاب، الانعكاس، التمدد.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الدرس 1-6)

إن حاصل جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتركيب أي دالتين ينتج دوال جديدةً.

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 1-7)

- تكون كلٌّ من العلاقتين A, B عكسية للأخرى إذا وفقط إذا وجد (b, a) في إحداهما فإنه يوجد (a, b) في الأخرى.
- تكون كلٌّ من الدالتين f, f^{-1} عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x, f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات

الصفة المميزة للمجموعة (ص 10)
رمز الفترة (ص 11)
الدالة (ص 11)
رمز الدالة (ص 13)
المتغير المستقل (ص 13)
المتغير التابع (ص 13)
الدالة متعددة التعريف (ص 14)
الأصفار (ص 20)
الجذور (ص 20)
التماثل حول مستقيم (ص 21)
التماثل حول نقطة (ص 21)
الدالة الزوجية (ص 23)
الدالة الفردية (ص 23)
الدالة المتصلة (ص 28)
النهاية (ص 28)
الدالة غير المتصلة (ص 28)
عدم الاتصال اللانهائي (ص 28)
عدم الاتصال القفزي (ص 28)
عدم الاتصال النقطي (ص 28)
عدم الاتصال القابل للإزالة (ص 29)
عدم الاتصال غير قابل للإزالة (ص 29)
سلوك طرفي التمثيل البياني (ص 32)
المتزايدة (ص 37)
المتناقصة (ص 37)
الثابتة (ص 37)
النقطة الحرجة (ص 39)
العظمى (ص 39)
الصغرى (ص 39)
القصوى (ص 39)
متوسط معدل التغير (ص 41)
القاطع (ص 41)
الدالة الرئيسة (الأم) (ص 47)
الانسحاب (ص 49)
الانعكاس (ص 50)
التمدد (ص 51)
تركيب دالتين (ص 58)
العلاقة العكسية (ص 64)
الدالة العكسية (ص 64)
الدالة المتباينة (ص 65)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المفردة التي تحتها خط حتى تصبح صحيحة.

1) تعين الدالة لكل عنصر في مجالها عنصرًا واحدًا فقط في مداها.
2) المنحنيات المتماثلة حول نقطة يمكن تدويرها °180 حول النقطة، فتبدو كأنها لم تتغير.
3) للدالة الفردية نقطة تماثل.
4) لا يتضمن منحنى الدالة المتصلة فجوةً أو انقطاعًا.
5) الدالة الفردية متماثلة حول المحور y.
6) الدالة $f(x)$ التي تتناقص قيمها مع تزايد قيم x تسمى دالةً متناقصةً.
7) تتضمن القيم القصوى لدالة قيمًا عظمى محليةً أو صغرى محليةً.
8) انسحاب المنحنى عبارة عن صورة مرآة للمنحنى الأصلي حول مستقيم.
9) تحقق الدالة المتباينة اختبار الخط الأفقي.
10) الدالة المتباينة لها محور تماثل.

ملخص الدروس

1-1 الدوال (الصفحات 17 - 10)

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا:

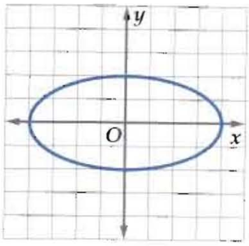
11) $3x - 2y = 18$

12) $y^3 - x = 4$

13)

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

14)



إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$، فأوجد كلًّا من القيمتين الآتيتين:

15) $f(5)$

16) $f(-3x)$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

17) $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$

18) $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19) $h(a) = \dfrac{5}{a + 5}$

20) $v(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

في العلاقة $x = y^2 - 8$ حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

حل بالنسبة إلى y.

$y^2 - 8 = x$ الدالة الأصلية

$y^2 = x + 8$ بإضافة 8 للطرفين

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

في هذه العلاقة، y لا تمثّل دالة في المتغير x؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -8 ترتبط بقيمتين من قيم y.

مثال 2

إذا كانت $g(x) = -3x^2 + x - 6$، فأوجد $g(2)$.

عوض 2 مكان x في العبارة: $-3x^2 + x - 6$.

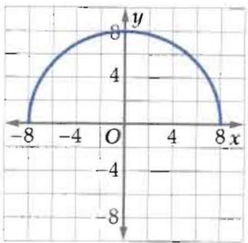
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $x = 2$

$= -12 + 2 - 6 = -16$ بالتبسيط

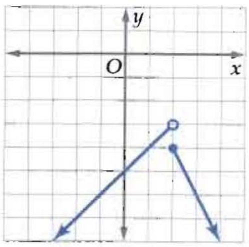
1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الصفحات 27 - 18)

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي:

21)



22)



أوجد المقطع y، والأصفار لكل دالة مما يأتي:

23) $f(x) = 4x - 9$

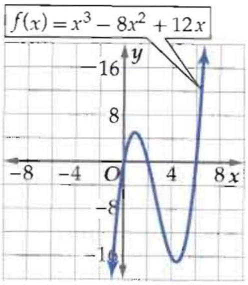
24) $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25) $f(x) = x^3 - 16x$

26) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$

مثال 3

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد مقطعها y وأصفارها. ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.



التقدير بيانيًّا:

يتضح من الشكل أن منحنى $f(x)$ يقطع المحور y عند $(0, 0)$؛ لذا فإن المقطع y هو 0 .

المقاطع x (أصفار الدالة) تبدو قريبةً من $0, 2, 6$.

الحل جبريًّا:

لإيجاد المقطع y، أوجد $f(0)$.

$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$

حلل المعادلة المرتبطة بالدالة إلى العوامل x لإيجاد أصفار الدالة.

$0 = x(x^2 - 8x + 12)$

$= x(x - 2)(x - 6)$

أصفار الدالة f هي $0, 2, 6$.

دليل الدراسة و المراجعة

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الصفحات 36 - 28)

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع عدم الاتصال لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

27) $f(x) = x^2 - 3x\ , x = 4$

28) $f(x) = \sqrt{2x - 4}\ , x = 1$

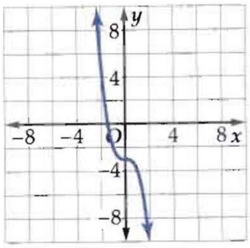
29) $f(x) = \dfrac{x}{x + 7}\ , x = 0\ , x = 7$

30) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}\ , x = 2\ , x = 4$

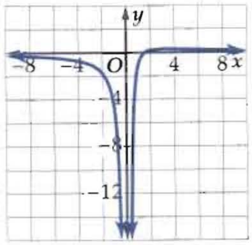
31) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \quad x < 1 \\ 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases}\ , x = 1$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل منهما:

32)



33)



مثال 4

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$ متصلة عند $x = 0\ , x = 4$. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$f(0) = -0.25$ ، لذلك f معرفة عند 0 . وتقترب قيم الدالة من -0.25 عندما تقترب x من 0 .

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	-0.244	-0.249	-0.25	-0.251	-0.256

بما أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -0.25, f(0) = -0.25$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x = 0$.

بما أن f غير معرفة عند $x = 4$ فإن f غير متصلة عند 4 وهو عدم اتصال لا نهائي.

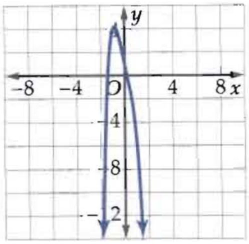
مثال 5

استعمل التمثيل البياني للدالة:
$f(x) = -2x^4 - 5x + 1$
لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.

اختبر منحنى $f(x)$.

عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

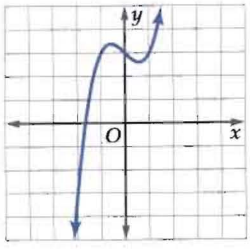
عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$



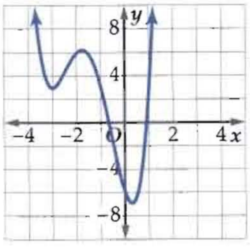
1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الصفحات 45 - 37)

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.

34)



35)



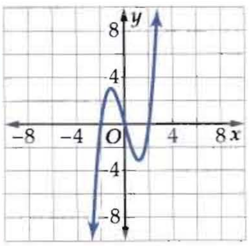
أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

36) $f(x) = -x^3 + 3\,x + 1,\ [0, 2]$

37) $f(x) = x^2 + 2x + 5,\ [-5, 3]$

مثال 6

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.



الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1, 3)$ ، وقيمة صغرى محلية عند $(1, -3)$.

1-5 الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الصفحات 56 - 47)

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وَصِف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

38) $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$

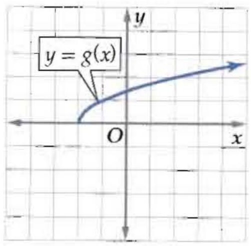
39) $g(x) = -(x-6)^2 - 5$

40) $g(x) = \dfrac{1}{2(x+7)}$

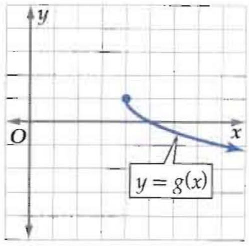
41) $g(x) = \frac{1}{4}[\![x]\!] + 3$

صف العلاقة بين الدالتين $g(x)$, $f(x) = \sqrt{x}$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.

42)



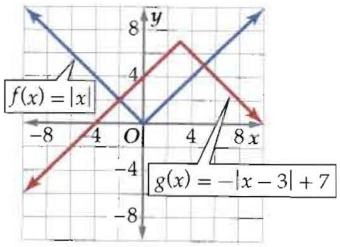
43)



مثال 7

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -|x-3| + 7$، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثلهما في مستوى إحداثي واحد.

الدالة الرئيسة (الأم) لِـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. ينتج منحنى الدالة g من منحنى الدالة f بانعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى.



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الصفحات 63 - 57)

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

44) $f(x) = x + 3$
$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

45) $f(x) = 4x^2 - 1$
$g(x) = 5x - 1$

46) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
$g(x) = 4x^2 - 3$

47) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](2)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

48) $f(x) = 4x - 11, g(x) = 2x^2 - 8$

49) $f(x) = x^2 + 2x + 8, g(x) = x - 5$

50) $f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = x^2$

اكتب مجال $f \circ g$ متضمنًا أية قيود إذا لزم، ثم أوجد $f \circ g$.

51) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
$g(x) = 2x - 6$

52) $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = 6x - 7$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x + 7$، فأوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^3 - 1) + (x + 7)\\ &= x^3 + x + 6\end{aligned}$$

مجال $(f+g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^3 - 1) - (x + 7)\\ &= x^3 - x - 8\end{aligned}$$

مجال $(f-g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x^3 - 1)(x + 7)\\ &= x^4 + 7x^3 - x - 7\end{aligned}$$

مجال $(f \cdot g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$.

دليل الدراسة و المراجعة

1-7 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 71 - 64)

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثل بيانيًّا الدالة ومعكوسها في المستوى الإحداثي نفسه.

53) $y = (x-4)^2$

54) $y = -4x + 8$

55) $y = 2\sqrt{x+3}$

56) $y = \frac{1}{x} - 3$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثّل دالةً أم لا.

57) $f(x) = |x| + 6$

58) $f(x) = x^3$

59) $f(x) = -\frac{3}{x+6}$

60) $f(x) = x^3 - 4x^2$

مثال 9

أوجد معادلة معكوس الدالة $y = x^3 - 9$.

بدّل مكاني x, y لتحصل على المعادلة $x = y^3 - 9$ ، ثم حل بالنسبة إلى y .

$$x = y^3 - 9$$

$$x + 9 = y^3$$

$$\sqrt[3]{x+9} = y$$

أي أن معكوس الدالة هو $y = \sqrt[3]{x+9}$.

تطبيقات ومسائل

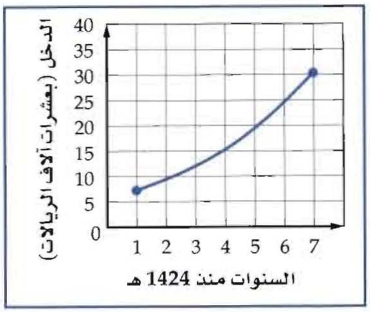
61) **الهواتف المحمولة:** قدمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا على الهواتف المحمولة بحيث يدفع المشترك 40 ريالًا في الشهر. ويتضمن ذلك 500 دقيقة مكالمات نهارية مجانية كحد أقصى خلال الشهر، ويدفع 0.2 ريال عن كل دقيقة نهارية تزيد على 500 دقيقة. (الدرس 1-1)

a) اكتب الدالة $p(x)$ للتكلفة الشهرية لإجراء مكالمات نهارية مدتها x دقيقة.

b) كم سيدفع مشترك إذا أجرى مكالمات نهارية مدتها 450 دقيقةً، 550 دقيقةً؟

c) مثّل الدالة $p(x)$ بيانيًّا.

62) **أعمال:** يبين التمثيل البياني أدناه الدخل الذي حققه متجر صغير في الفترة من عام 1425 هـ إلى 1431 هـ (الدرس 1-2)



a) قدر دخل المتجر سنة 1428 هـ

b) قدر السنة التي حقق فيها المتجر دخلًا مقداره 100000 ريال.

63) **رواتب:** بعد 5 سنوات من عمل وليد في إحدى الشركات تقاضى زيادةً على راتبه مقدارها 1500 ريال شهريًّا. هل الدالة التي تمثّل راتب وليد متصلة أم غير متصلة؟ برر إجابتك. (الدرس 1-3)

64) **كرة قدم:** يبين الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجلها لاعب في خمسة مواسم كروية. (الدرس 1-4)

السنة	1424	1425	1426	1427	1428
عدد الأهداف	5	36	23	42	42

a) وضح لماذا يمثّل عدد الأهداف عام 1426 هـ قيمةً صغرى محليةً.

b) إذا كان متوسط معدل التغير لعدد الأهداف بين عامي 1428 و 1431هـ يساوي 5 أهداف لكل عام. فكم هدفًا سجل اللاعب عام 1431هـ ؟

65) **فيزياء:** رُمي حجر أفقيًّا من على حافة جرف ، وكان مقدار سرعته معطى بالدالة: $v(t) = \sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ السرعة بالمتر لكل ثانية. مثل بيانيًّا دالة السرعة خلال أول 6 ثوان من رمي الحجر. (الدرس 1-5)

66) **ثقافة مالية:** إذا كان ثمن شريحة الإنترنت 500 ريال. وقدمت إحدى الشركات العرض التالي: خصم 10% من ثمن الشريحة و20 ريالًا عند تفعيلها. كم سيكون ثمن الشريحة بعد تفعيلها. (الدرس 1-6)

67) **قياس:** تذكر أن 1 بوصةً تساوي 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1-7)

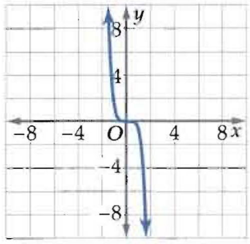
a) اكتب دالة $A(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من البوصات المربعة إلى السنتمترات المربعة.

b) أوجد $A^{-1}(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من السنتمترات المربعة إلى البوصات المربعة.

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

1) $x = y^2 - 5$

2)



3) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

4) **موقف سيارات:** يتقاضى موقف للسيارات مبلغ 3 ريالات مقابل كل ساعة أو جزءٍ من الساعة لأول ثلاث ساعات، فإذا زادت المدة عن الثلاث ساعات، فإنه يتقاضى 15 ريالًا عن المدة كلها.

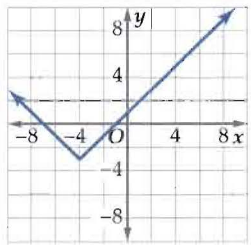
a) اكتب دالة $c(x)$ تمثّل تكلفة وقوف سيارة مدة x من الساعات.

b) أوجد $c(2.5)$.

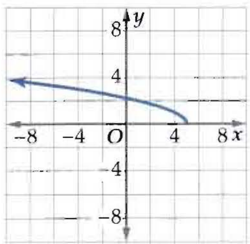
c) عيّن مجال الدالة $c(x)$، وبرر إجابتك.

حدد مجال كل دالة من الدالتين الممثلتين أدناه ومداها:

5)



6)



أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين :

7) $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$

8) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

9) **اختيار من متعدد:** أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x ؟

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلةً عند $x = 3$ ، وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة.

10) $f(x) = \begin{cases} 2x &, \ x < 3 \\ 9 - x &, \ x \geq 3 \end{cases}$

11) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

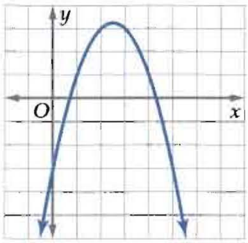
أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدالتين الآتيتين في الفترة $[-2, 6]$:

12) $f(x) = -x^4 + 3x$

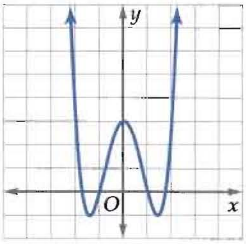
13) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة.

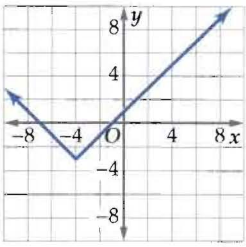
14)



15)



16) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية يمثّلها التمثيل البياني المجاور؟



A $f(x) = |x - 4| - 3$

B $f(x) = |x - 4| + 3$

C $f(x) = |x + 4| - 3$

D $f(x) = |x + 4| + 3$

17) عين الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -(x + 3)^3$، ثم مثل الدالة $g(x)$ بيانيًا.

إذا كانت $f(x) = x - 6$, $g(x) = x^2 - 36$ ، فأوجد كل دالة من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجالها.

18) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

19) $[g \circ f](x)$

20) **درجة الحرارة:** تستعمل معظم دول العالم الدرجات السيليزية C لقياس درجة الحرارة. والمعادلة التي تربط بين درجات الحرارة السيليزية C والفهرنهايتية F هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) اكتب C كدالة بالنسبةلِ F .

b) أوجد دالتين f و g بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$.

بيِّن إذا كان للدالة f معكوس أم لا في كل مما يأتي، وفي حالة وجوده أوجده، وحدّد أية قيود على مجاله .

21) $f(x) = (x - 2)^3$

22) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 8}$

23) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

24) $f(x) = x^2 - 16$

الفصل 2

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانيًا.

والآن:

- أتعرّف الدوال الأسية واللوغاريتمية
- أمثّل الدوال الأسّية واللوغاريتمية بيانيًا.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا؟

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا. ويظهر ذلك جليًا في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

(1 $a^4a^3a^5$

(2 $(2xy^3z^2)^3$

(3 $\dfrac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

(4 $\left(\dfrac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

(5 **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3 g$، وحجمه $1.5 \times 10^3 cm^3$، فما كثافته؟

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي:

(6 $f(x) = 2x + 5$ **(7** $f(x) = x - 3$

(8 $f(x) = -4x$ **(9** $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

(10 $f(x) = \frac{x-1}{2}$ **(11** $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

(12 $f(x) = x - 6$، $g(x) = x + 6$

(13 $f(x) = 2x + 5$، $g(x) = 2x - 5$

(14 **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

المجال (domain):
مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range):
مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

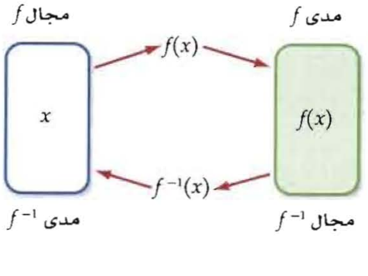
الدالة (function):
علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour):
سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \to -\infty)$.

خط التقارب (asymptote):
مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

الدالة المتباينة (one-to-one function):
هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function):
تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:
$f(f^{-1}(x)) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$.



الدالة المتصلة (continuous function):
هي الدالة التي يخلو منحناها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحناها دون أن نضطر لرفعه.

2-1

تمثيل الدوال الأسّية بيانيًا
Graphing Exponential Functions

فيما سبق:

درستُ تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا.

والآن:

- أمثّل دوال النمو الأسّي بيانيًا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًا.

المفردات:

الدالة الأسية
exponential function
النمو الأسّي
exponential growth
عامل النمو
growth factor
الاضمحلال الأسّي
exponential decay
عامل الاضمحلال
decay factor

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل استلمت يومًا بريدًا إلكترونيًا يطلب إليك إعادة إرساله إلى 5 أشخاص؟ فإذا أرسله كل شخص من هؤلاء إلى 5 أشخاص آخرين واستمر الإرسال هكذا، سيزداد عدد الذين سيتسلمون هذا البريد ازديادًا أسيًّا.

يمكن استعمال المعادلة $y = 5^x$ لتمثيل هذا الموقف، حيث x تمثل عدد مرات إعادة الإرسال.

النمو الأسّي: تُسمى الدالة التي على الصورة $y = 5^x$، حيث الأساس عدد ثابت، والأس هو المتغير المستقل **بالدالة الأسّية**، وأحد أنواع الدوال الأسية هو دالة **النمو الأسّي** التي تكتب على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$. وفي التمثيل البياني للدالة الأسية يوجد خط تقارب أفقي.

كذلك نلاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x، ولذلك تكون $f(x)$ دالة متزايدة.

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي**

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

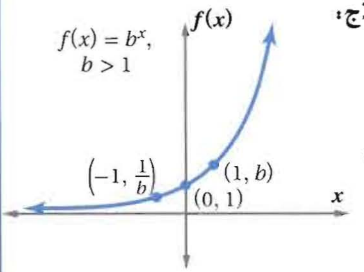
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: $(0, 1)$

النموذج:

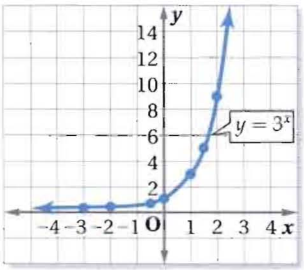


مثال 1 تمثيل دوال النمو الأسّي بيانيًا

مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.

أنشئ جدول قيم، وعيّن النقاط ثم مثّل الدالة بيانيًا.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$3^0 = 1$
x	1	$\frac{3}{2}$	2	
$y = 3^x$	$3^1 = 3$	$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$	$3^2 = 9$	



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+).

✓ تحقق من فهمك

1) مثّل الدالة $y = 4^x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.

التمثيل البياني للدالة $f(x) = b^x$ هو التمثيل البياني للدالة الأسية الرئيسة (الأم). ويمكنك تطبيق التحويلات التي درستها سابقًا على التمثيل البياني للدوال الأسية.

مفهوم أساسي تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

h: إزاحة أفقية	k: إزاحة رأسية
إذا كانت h موجبة، إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليمين	إذا كانت k موجبة ، إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأعلى
إذا كانت h سالبة، إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة إلى اليسار	إذا كانت k سالبة ، إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة إلى الأسفل

a : الشكل والاتجاه

إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور $y = k$

إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا.

إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

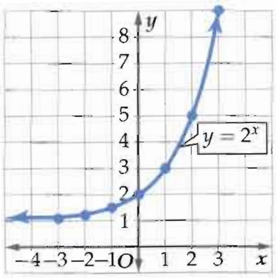
مثال 2 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداها:

a) $y = 2^x + 1$

تمثل المعادلة إزاحة لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى الأعلى.

x	$y = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$



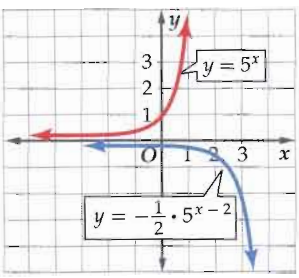
المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

b) $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$

حدد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5 > 1$ فاستعمل النقاط $(1,b)$ ، $(0,1)$ ، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$ ، $(0,1)$ ، $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$

والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًا.
- $h = 2$: يزاح التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية للتمثيل البياني.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال(2a) أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا. وفي المثال(2b) عندما تقترب x من مالانهاية، تقترب y من سالب مالانهاية.

تحقق من فهمك

2A) $y = 2^{x+3} - 5$

2B) $y = 0.1(6)^x - 3$

يمكنك تمثيل النمو الأسّي بنسبة مئوية ثابتة للتزايد في دورات زمنية متساوية باستعمال الدالة :

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

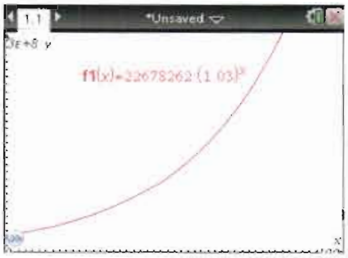
ويمكنك استعمال الدالة لإيجاد القيمة $A(t)$ بعد t فترة زمنية ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 + r)$ ويُسمى **عامل النمو**.
وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريبًا.

مثال 3 من واقع الحياة تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1425 - 1431 ، 3.2% سنويًّا تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



أولًا: أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262\ (1.032)^t$$

ثانيًا: مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

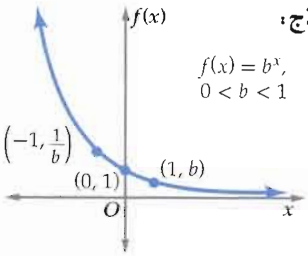
3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 3.5% سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1425 هـ هو 80000 ريال. فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1425 هـ، ثم مثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

الاضمحلال الأسّي: النوع الثاني من الدوال الأسية هو **الاضمحلال الأسّي**.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

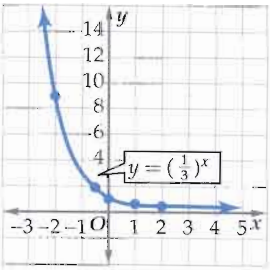
مقطع المحور y: $(0, 1)$

ويمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ولذلك نقول إن $f(x)$ دالة متناقصة.

مثال 4 تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال كل منهما ومداه:

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



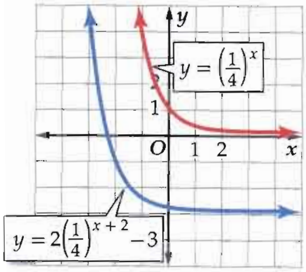
حدد نقاط التمثيل البياني للدالة. وبما أن $1 > \frac{1}{3} > 0$ فاستعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$ ، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ ، أي النقاط $\left(1,\frac{1}{3}\right)$، $(0,1)$، $(-1,3)$
المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+).

إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسي
تأكد من عدم الخلط بين تضيق التمثيلات البيانية، حيث $|a| < 1$ والاضمحلال الأسي، حيث $0 < b < 1$.

$y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ (b

حدد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$ فاستعمل النقاط $\left(1, \frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$، $(-1,4)$



والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = -2$: يزاح التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يزاح التمثيل البياني 3 وحدات إلى الأسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

تحقق من فهمك

$y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$ (4A

$y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$ (4B

الربط مع الحياة

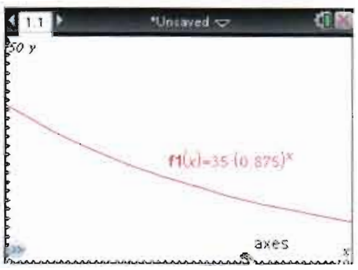
الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضةً للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل الاضمحلال الأسي بنسبة مئوية ثابتة للتناقص في دورات زمنية متساوية باستعمال الدالة $A(t) = a(1 - r)^t$ ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للإضمحلال في الدورة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$ ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

مثال 5 من واقع الحياة — تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافيين من أجسامهم في الساعة.

a) أوجد معادلة أسّية تمثل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



$$y = a(1 - r)^t$$
$$= 35(1 - 0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$	المعادلة من الفرع a
$= 35(0.875)^3$	بتعويض 3 بدلًا من الزمن t
≈ 23.45	باستعمال الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص 23.45mg من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

تنبيه!

النسبة المئوية تذكّر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية، فمثلًا، $12.5\% = 0.125$

تحقق من فهمك

5) يحتوي كوب من الشاي الأسود على 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثلها بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدّد مجالها، ومداها: (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = 2^x$

2) $f(x) = 5^x$

3) $f(x) = 2(3)^x$

4) $f(x) = -2(4)^x$

5) $f(x) = 4^{x+1} - 5$

6) $f(x) = 3^{2x} + 1$

7) $f(x) = 3^{x-2} + 4$

8) $f(x) = 2^{x+1} + 3$

9) $f(x) = 0.25(4)^x - 6$

10) $f(x) = 3(2)^x + 8$

11) **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل انتشار الفيروس منذ البداية، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم قدر انتشاره بعد الساعة الأولى. (مثال 3)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها، ومداها: (مثال 4)

12) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$

13) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

14) $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$

15) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

16) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$

17) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

18) **سيارات:** يتناقص سعر سيارة جديدة بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. (مثال 5)

19) **علوم:** يتكاثر نحل في خلية فيزداد العدد بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد النحل بعد 10 أسابيع.

20) **كرة قدم:** تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة قدم بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t)، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد الحضور في المباراة 15 .

21) **هواتف:** تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = 2.28(0.9)^x$ في السنة x منذ عام 1420 هـ.

a) مثل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) وضّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

22) **صحة :** أخذ مريض حقنة، وفي كل يوم تلى ذلك، استهلك جسمه 10% مما تبقى من المادة المحقونة.

a) مثّل الدالة التي تعبّر عن هذا الموقف بيانيًّا.

b) متى يكون في جسم المريض أقل من 50% من المادة المحقونة؟

c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟

23) **نظرية الأعداد:** تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18 فأجب عما يأتي:

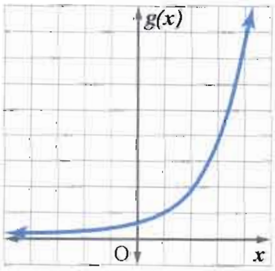
a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف.

b) مثّل الدالة لأول 10 حدود بيانيًّا.

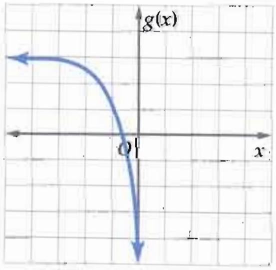
c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًّا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$، فأوجد الدالة $g(x)$:

24) $f(x) = 2^x$



25) $f(x) = 4^x$



26) **تمثيلات متعددة:** ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	-1	-5	-13	-29

x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) **بيانيًا:** مثّل كل دالة بيانيًا في الفترة $-1 \le x \le 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.

b) **لفظيًا:** أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضِّح إجابتك.

c) **تحليليًا:** أي الدوال تمثل إزاحة للدالة الرئيسة (الأم) إلى اليسار؟

d) **تحليليًا:** أي الدوال تمثل نموًا أسيًّا؟ وأيها تمثل اضمحلالًا أسيًّا؟

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **تبرير:** حدد إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

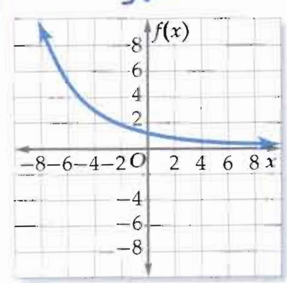
a) الدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ لها مقطع المحور y.

b) الدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ لها مقطع المحور x.

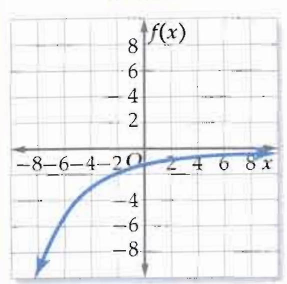
c) إذا كان b عددًا صحيحًا، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

28) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

عمر



ماجد



29) **تحدٍّ:** تتناقص مادة بنسبة 35% مما تبقى كل يوم، إذا بقي منها 8 mg بعد 8 أيام. فكم مليجرامًا من المادة كان موجودًا في البداية؟

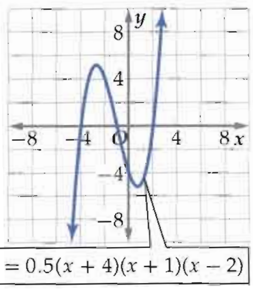
30) **مسألة مفتوحة:** أعط قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي.

31) **اكتب:** صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$.

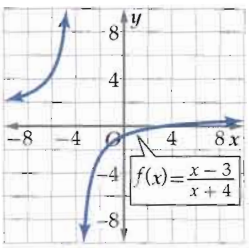
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًّا: (الدرس 1-4)

32)



33)



استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|, h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (الدرس 1-5)

34) $f(x) = -4x + 2$

35) $f(x) = \sqrt{x+3} - 6$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (الدرس 1-6)

36) $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

37) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

38) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟

A 3
B 2
C 1
D 0

39) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = 4x$ فما قيمة $(f \circ g)(2)$؟

A $\sqrt{3}$
B $4\sqrt{3}$
C 3
D 8

استكشاف

2-2

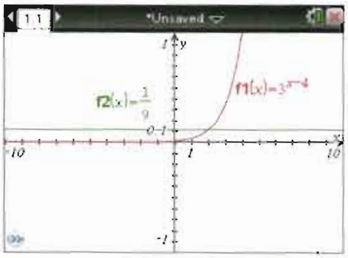
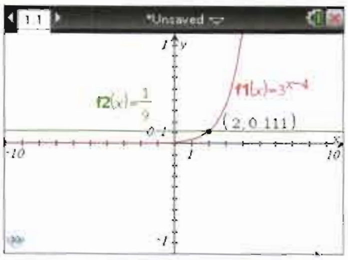
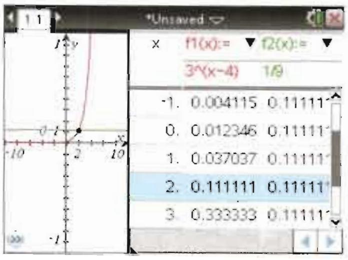
معمل الحاسبة البيانية:

حل المعادلات والمتباينات الأسية

Solving Exponential Equations and Inequalities

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات الأسية بيانيًا أو باستعمال خاصية الجدول.
ولعمل ذلك اكتب المعادلات الأسية على صورة نظام من المعادلات.

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلة $\frac{1}{9} = 3^{x-4}$.

الخطوة 1: تمثيل طرفي المعادلة بيانيًّا

مثّل طرفي المعادلة بيانيًّا كدالتين مستقلتين، وأدخل 3^{x-4} في f1، و $\frac{1}{9}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

on ‹2:Add Graphs› 3^{x-4} enter tab $\frac{1}{9}$ enter

الخطوة 2: استعمال ميزة Intersection Point(s).

تمكنك ميزة Intersection Point(s) في قائمة Points & Lines من تقدير الزوج المرتب الذي يمثّل نقطة التقاطع.

اضغط على المفاتيح: menu ‹7:Points & Lines› ‹3:Intersection Point(s)›

واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر فتظهر نقطة التقاطع $(2, 0.1111)$

أي أن الحل هو 2 .

الخطوة 3: استعمال ميزة TABLE

تحقق من صحة حلّك باستعمال ميزة TABLE. اعمل جدولًا يبيّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح:

on ‹4:Add Lists & Spreadsheet›، واكتب $Y_1 = 3^{x-4}$ في العمود الثاني، $Y_2 = \frac{1}{9}$ في العمود الثالث. يبيّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكل تمثيل بياني.

فعندما $x = 2$ ، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $0.1111 \approx \frac{1}{9}$ ، وهذا يعني أن حل المعادلة هو 2 .

التحقق عوّض عن x بـ 2 في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية	$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$
بتعويض 2 بدلًا من x	$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$
بالتبسيط	$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$
الحل صحيح	$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي :

1) $9^{x-1} = \frac{1}{81}$

2) $4^{x+3} = 2^{5x}$

3) $5^{x-1} = 2^{x}$

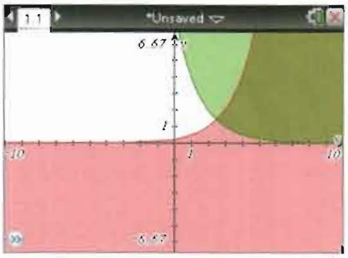
4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$

5) $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$

6) $6^{3x} = 8^{x-1}$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل متباينات أسية.

نشاط 2



استعمل الحاسبة البيانية لحل المتباينة $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.

الخطوة 1 : تمثيل المتباينات المناظرة.

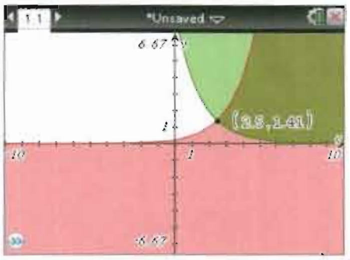
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي $2^{x-2} \geq y$ أو $y \leq 2^{x-2}$ ، والمتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$.

ثم مثلها بالضغط على المفاتيح:

on | 1 New Document | 2:Add Graphs | del | ≤ | 2^{x-3} | enter | tab | del | ≥ | 0.5^{x-3} | enter

فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

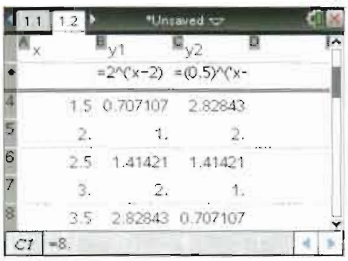


الخطوة 2 : تحديد مجموعة الحل

مجموعة إحداثيات x للنقاط التي تقع في منطقة تقاطع التظليلين تمثل مجموعة الحل للمتباينةالأصلية. ويمكنك باستعمال ميزة intersect لاستنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$ وذلك بالضغط على المفاتيح:

menu | 7:Points & Lines | 3:Intersection Point(s)

والضغط على أحد التمثيلين البيانيين ثم الضغط على الآخر.



الخطوة 3 : استعمال ميزة **TABLE** .

تحقق من الحل باستعمال ميزة **TABLE** . أنشئ جدولًا لقيم x بزيادة 0.5 في كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح :

on | 4:Add Lists & Spreadsheet ، واكتب $y_1 = 2^{x-2}$ في العمود الثاني، $y_2 = 0.5^{x-3}$ في العمود الثالث، لاحظ أنه لقيم x الأكبر من $x = 2.5$ تكون **y1 > y2** وهذا يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين :

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي :

(7 $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$

(8 $16^{x-1} > 2^{2x+2}$

(9 $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$

(10 $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$

(11 $12^{x-5} \geq 9.32$

(12 $12^{4x-7} < 4^{2x+3}$

(13 **اكتب :** وضح لماذا يكون تمثيل نظام من المعادلات بيانيًا صالحًا لحل معادلات أو متباينات أسية.

2-2

حل المعادلات والمتباينات الأسّية
Solving Exponential Equations and Inequalities

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

المتباينة الأسية
exponential inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1425 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي **خاصية المساواة للدوال الأسية**

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0 , b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية.

مثال 1 **حل المعادلات الأسية**

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة دالة أسية.

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة دالة أسّية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة ، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\, b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$\approx 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215665	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215665 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) **إعادة تصنيع:** أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426 هـ ، وفي عام 1430 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعادة تصنيعها y بعد x سنة.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات مُعادة التصنيع عام 1471 هـ؟

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة.

مفهوم أساسي — الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال 3 الربح المركب

استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.2% . بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

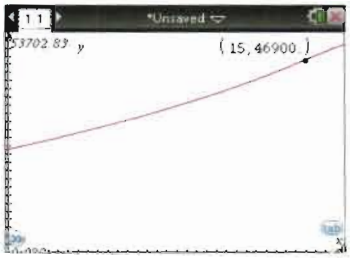
خطط: بما أنه يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، فاستعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	صيغة الربح المركب
$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$	$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$
≈ 46888.66	باستعمال الحاسبة

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًا $y = 25000(1.0035)^{12t}$، استعمل CALC: value لتجد y عندما $x = 15$.



قيمة y هي 46900 وهي قريبة جدًا من القيمة 46888.66 ،إذن، فالإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 12% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًا. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين.

تنبيه!

نسب مئوية : تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثلًا $4.2\% = 0.042$

حل المتباينات الأسية : **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، و إذا كان $x > 6$ ؛ فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4 , 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين للدوال الأسية
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$

2) $5^{x-6} = 125$

3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$

4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

5) $2^{6x} = 32^{x-2}$

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

7) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

8) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

9) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

10) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

11) **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق.

b) إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستتكون بعد ساعة؟

12) **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمر سيصبح 169588 ريال بحلول عام 1442 هـ. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ.

b) افرض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين. (مثال 3)

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًا. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15) $4^{2x+6} \le 64^{2x-4}$

16) $25^{y-3} \le \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$

17) $625 \ge 5^{a+8}$

18) $10^{5b+2} > 1000$

19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21) $(3, 100), (0, 6.4)$

22) $(4, 81), (0, 256)$

23) $(5, 371293), (0, 128)$

24) $(4, 21609), (0, 144)$

25) **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته $90°C$ في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي $20°C$ فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة.

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة.

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي $60°C$، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟

26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6 m، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm. اكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها h متر.

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

27) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

28) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

29) $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

30) $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

31) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

32) $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

33) **سكان:** بلغ عدد سكان العالم عام 1950م، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار. اكتب المعادلة بدلالة x، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف)

b) افرض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000.

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان.

d) استعمل المعادلة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضح إجابتك.

34) ثقافة مالية: يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار طويل الأمد، ويريد أن يختار أحدهما.

a) اكتب معادلة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

b) مثّل بيانيًّا منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

c) أي الخيارين أفضل في الاستثمار الخيار الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك؟

35) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قص ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًّا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع.

b) **جدوليًّا:** دوّن نتائجك في جدول.

c) **رمزيًّا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة.

d) **تحليليًّا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in ، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة.

e) **تحليليًّا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتب: صف ما يحدث في مسألة الربح المركب إذا زاد عدد مرات اضافة الأرباح إلى المبلغ المستثمر خلال العام ، ولم يتغير المبلغ الأصلي وكذلك الفترة الزمنية الكلية للاستثمار.

37) تحدٍّ: حُلّ المعادلة الأسية $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

38) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$.

39) برهان: أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

40) تبرير: حدد إذا كانت العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك

a) $2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x .

b) التمثيل البياني لمعادلة النمو الأسي متزايد.

c) التمثيل البياني لمعادلة الاضمحلال الأسي متزايد.

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1−2)

41) $y = 2(3)^x$

42) $y = 5(2)^x$

43) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

44) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$

45) $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$

46) $\sqrt[4]{2x-1} = 2$

47) $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

48) $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$

49) $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$

أوجد $[g \circ h](x)$, $[h \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية: (الدرس 1−6)

50) $h(x) = 2x - 1$ ، $g(x) = 3x + 4$

51) $h(x) = x + 4$ ، $g(x) = |x|$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: (الدرس 1−7)

52) $f(x) = 2x + 1$

53) $g(x) = -2x^2$

تدريب على اختبار

54) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$ ؟

F -1 H 1

G 0 J 2

55) إذا كانت $f(x) = 5x$ ، فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟

A -25 C 5

B -5 D 25

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد معكوس الدالة.

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:

اللوغاريتم
logarithm

الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

www.obeikaneducation.com

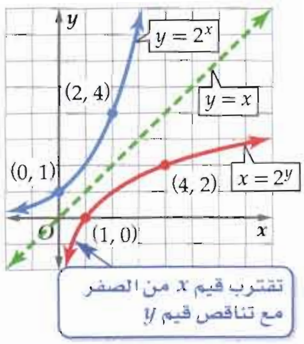
لماذا؟

يُرجّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال المعادلة $PS = \log_{10} R$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل معكوس الدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن معكوس $y = 2^x$ هو $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x ، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي $\log x$ للأساس b .

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

مفهوم أساسي **اللوغاريتم للأساس b**

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرَف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افرض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية .

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$4 = 16^y$ تعريف اللوغاريتم

$4^1 = 4^{2y}$ $16 = 4^2$

$1 = 2y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

$\frac{1}{2} = y$ بقسمة كلا الطرفين على 2

لذا، فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$\frac{1}{49} = 7^y$ تعريف اللوغاريتم

$7^{-2} = 7^y$ $\frac{1}{49} = 7^{-2}$

$-2 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا، فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

تنبيه!

أساس اللوغاريتم

قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما أثناء الحل لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي — الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري

تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$ ، وأن $\log_2 0$ غير معرّف لأن $2^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

مثال 4 استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $5^3 = 125$

$= 3$ $\log_b b^x = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\log_{10} 10^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $b^{\log_b x} = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$ ، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تحقق من فهمك

4A) $\log_9 81$ **4B)** $3^{\log_3 1}$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x$

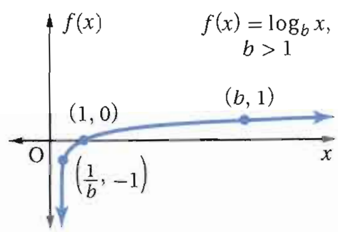
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

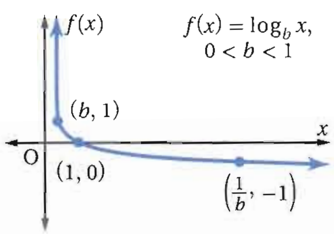
خط التقارب: المحور y

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مقطع المحور x: النقطة $(1, 0)$

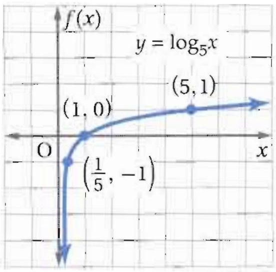




مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

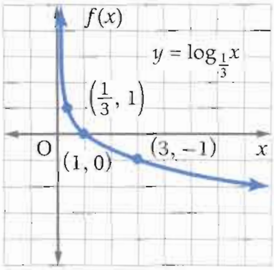
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $(5, 1)$، $(1, 0)$، $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$

5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

> **إرشادات للدراسة**
>
> **الأس الصفري** تذكر أنه لأي عدد $b \neq 0$ يكون $b^0 = 1$، لذا $\log_2 x$ غير معرّف لأن $2^x \neq 0$ لأي قيمة x.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **الاتصال** معظم الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية متصلة. في مثال (5a) تتزايد $f(x)$ من 0 إلى مالانهاية.

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

مفهوم أساسي تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

$$f(x) = a \log_b (x - h) + k$$

h: إزاحة أفقية	k: إزاحة رأسية
إذا كانت h موجبةً، إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليمين	إذا كانت k موجبةً، إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأعلى
إذا كانت h سالبةً، إزاحة بمقدار $\vert h \vert$ وحدة إلى اليسار	إذا كانت k سالبةً، إزاحة بمقدار $\vert k \vert$ وحدة إلى الأسفل

a: الشكل والاتجاه

إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور $y = k$.

إذا كان $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا.

إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

إرشادات للدراسة

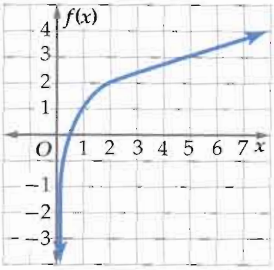
سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

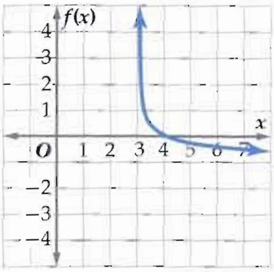
a) $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$



التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 0$: لا توجد إزاحة أفقية.
- $k = 1$: يزاح التمثيل البياني وحدة واحدة إلى الأعلى.

b) $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$



التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 3$: يزاح التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية.

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = 2 \log_3 (x - 2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960 م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة وقتلت آلاف السكان.

مثال 7 من واقع الحياة إيجاد معكوس الدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	بتعويض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بالتبسيط
$= 158489319.2$	باستعمال الحاسبة

b) أوجد معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ لمعكوس الدالة.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

7) أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$
2) $\log_5 625 = 4$
3) $\log_2 16 = 4$
4) $\log_7 343 = 3$
5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
6) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
7) $\log_{12} 144 = 2$
8) $\log_9 1 = 0$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية: (مثال 2)

9) $11^3 = 1331$
10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$
11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$
12) $6^{-3} = \frac{1}{216}$
13) $2^8 = 256$
14) $4^6 = 4096$
15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$
16) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3, 4)

17) $\log_{13} 169$
18) $\log_2 \frac{1}{128}$
19) $\log_6 1$
20) $\log_4 1$
21) $\log_{10} 10$
22) $\log_{10} 0.01$
23) $\log_3 \frac{1}{9}$
24) $\log_4 \frac{1}{64}$
25) $\log_6 216$
26) $\log_{27} 3$
27) $\log_{32} 2$
28) $\log_{121} 11$
29) $\log_{\frac{1}{5}} 3125$
30) $\log_{\frac{1}{8}} 512$
31) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (المثالان 5, 6)

32) $f(x) = \log_3 x$
33) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$
34) $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$
35) $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$
36) $f(x) = 4 \log_2 x + 6$
37) $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$
38) $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$
39) $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$
40) $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$
41) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

42) **علوم:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7)

43) **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

b) مثّل الدالة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** لتقدير نسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟

44) **تربية:** لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

45) $f(x) = 4 \log_2 (2x - 4) + 6$
46) $f(x) = -3 \log_{12} (4x + 3) + 2$
47) $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$

48) **إعلانات:** تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20 \log_4(a + 1)$، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$.

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال. أوجد كلًّا من: $S(3), S(15), S(63)$.

b) فسر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع **a**.

c) مثّل الدالة بيانيًّا.

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع **c**، وإجابتك في الفرع **a** لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

49) أحياء: زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث t الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16h ، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة، بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli .

مسائل مهارات التفكير العليا

50) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$ $\log_2 4$ $\log_2 16$ $\log_4 16$

51) تحدٍّ: إذا كان $y = \log_b x$ ، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك.

52) اكتشف الخطأ: يقول فهد إن التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$ ؛ لأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، ولكن سليمان لم يوافقه الرأي. أيهما على صواب؟ فسر إجابتك.

53) اكتشف الخطأ: أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$ ، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$(\frac{1}{7})^y = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

54) تبرير: قارن بين كلٍّ من: $\log_7 51, \log_8 61, \log_9 71$ دون استعمال الحاسبة، وبيّن أيها الأكبر قيمة. وضّح إجابتك.

55) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ لكل من الحالات الآتية:

a) y تساوي 25

b) y عدد سالب

c) y بين 0 و 1

d) x تساوي 1

56) اكتب: إذا كان $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$ تحويلًا للدالة اللوغاريتمية $\log_{10} x$ ، فاشرح كيفية تمثيل هذا التحويل بيانيًا.

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: (الدرس 2-1)

57) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **58)** $y = -2.5(5)^x$

59) $y = 30^{-x}$ **60)** $y = 0.2(5)^{-x}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (الدرس 2-2)

61) $3^{n-2} > 27$ **62)** $2^{2n} \le \frac{1}{16}$

63) $16^n < 8^{n+1}$ **64)** $32^{5p+2} \ge 16^{5p}$

65) إذا كان $4^{x+2} = 48$ ، فأوجد قيمة 4^x؟ (الدرس 2-2)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

66) $9^x = \frac{1}{81}$ **67)** $2^{6x} = 4^{5x+2}$

68) $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$ **69)** $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$

تدريب على اختبار

70) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

71) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟

A 5   **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

72) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟

A 0   **B** 1   **C** 2   **D** 3

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–2 إلى 3–2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 1-2)

1) $f(x) = 3(4)^x$

2) $f(x) = -(2)^x + 5$

3) $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4) $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5) **علوم:** بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية . (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر ازدياد عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه.

b) ما عدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات ؟

6) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, 125), (3, 1000)$ ؟ (الدرس 1-2)

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7) **سكان:** كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 1995 م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2007 م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة y بعد x سنة منذ عام 1995 م؟

b) استعمل الدالة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2015 م.

حُل كل من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

8) $11^{2x+1} = 121^{3x}$

9) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

10) $5^{2x+3} \le 125$

11) $16^{2x+3} < 64$

12) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \ge 16^{3x}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-2)

13) $f(x) = 3\log_2(x-1)$

14) $f(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

15) $f(x) = 2 + \log_4(1+x)$

16) **اختيار من متعدد:** ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ ؟ (الدرس 3-2)

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

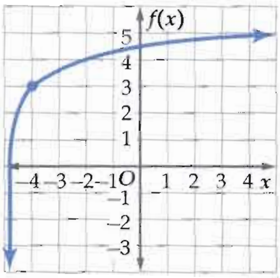
B $\log_5 625 = 4$

C $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

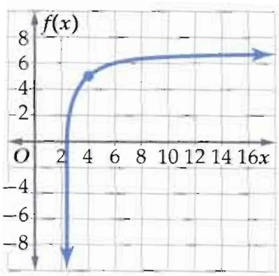
D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

17) **اختيار من متعدد:** أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ البياني؟ (الدرس 3-2)

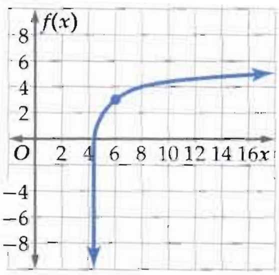
A



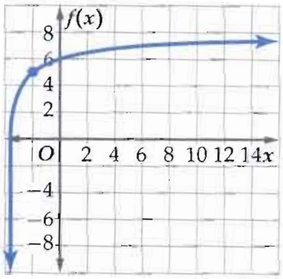
C



B



D



أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

18) $\log_4 32$

19) $\log_5 5^{12}$

20) $\log_{16} 4$

21) اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 3-2)

2-4

خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية .

والآن:

- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

www.obeikaneducation.com

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
الخل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

لماذا؟

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون من حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية. فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 على حين تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن pH للقهوة تعادل 100 مرة من pH للماء النقي؛ لأن $100 = 10^2 = 10^{7-5}$.

خصائص اللوغاريتمات: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
فمثلًا إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$ وتسمى هذه الخاصية **خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية**، وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من **خاصية الضرب في الأسس**.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افرض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x\ ,\ n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	بالتعويض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	بالتعويض عن m, n بالقيمتين $\log_b x\ ,\ \log_b y$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

مثال 1 — استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$	$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$
$= \log_4 4^3 + \log_4 3$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$= 3 + \log_4 3$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$	$\log_4 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افرض أن $b^m = x, b^n = y$، إذن $\log_b x = m, \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

$$b^{m-n} = \frac{x}{y}$$ خاصية قسمة القوى

$$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$m - n = \log_b \frac{x}{y}$$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$\log_b m - \log_b n = \log_b \frac{x}{y}$$ بالتعويض عن m, n بالقيمتين $\log_b x, \log_b y$ على الترتيب

مفهوم أساسي — خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو. والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

مثال 2 من واقع الحياة — خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة كمية الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$$\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$ المعادلة الأصلية

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$ $\text{pH} = 4.2$

$$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$$ $\log_{10} 1 = 0$

$$4.2 = -\log_{10} [H^+]$$ بالتبسيط

$$-4.2 = \log_{10} [H^+]$$ بضرب كلا الطرفين في -1

$$10^{-4.2} = [H^+]$$ تعريف اللوغاريتم

إذن، يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$ $\text{pH} = 4.2$

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$$ بتعويض $[H^+] = 10^{-4.2}$

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$$ بالتبسيط

$$4.2 = 4.2 \checkmark$$

تحقق من فهمك

2) **صوت:** يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل (dB)، ويعطى بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. أوجد الشدة النسبية لصوت ارتفاعه 120 dB.

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي **خاصية لوغاريتم القوة**

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن
$\log_b x^m = m \log_b x$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في التمرين (48)

مثال 3 **خاصية لوغاريتم القوة**

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$ $5^2 = 25$

$= 2 \log_2 5$ خاصية لوغاريتم القوة

$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$ $\log_2 5 = 2.3219$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة

يمكنك التحقق من إجابة مثال 3 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $2^{4.6438} \approx 25$.

تحقق من فهمك

3) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

مثال 4 **تبسيط العبارات اللوغاريتمية**

احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$ $4^3 = 64$

$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$ خاصية قوة القوة

$= \frac{3}{5} \log_4 4$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$ $\log_b b = 1$

تحقق من فهمك

4A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$ **4B)** $\log_7 \sqrt[6]{49}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

مثال 5 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$ خاصية لوغاريتم القوة

تحقق من فهمك

5A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

5B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

تنبيه!

لوغاريتم المجموع

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات ، $\log_a (x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$.

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتم

$$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$ بإنطاق المقام

b) $0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x$

$$0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2}, 2^6 = 64$

$$= \log_7 64x^6\sqrt{x+2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

6A) $-5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$

6B) $\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4}\log_3 (x+1)$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$،$\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\log_4 15$
2) $\log_4 \frac{5}{3}$
3) $\log_4 \frac{3}{4}$
4) $\log_4 18$

استعمل $\log_4 5 \approx 1.1610 , \log_4 3 \approx 0.7925 , \log_4 2 = 0.5$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (مثال 1)

5) $\log_4 30$
6) $\log_4 20$
7) $\log_4 \frac{2}{3}$
8) $\log_4 \frac{4}{3}$
9) $\log_4 9$
10) $\log_4 8$

11) **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. (مثال 2)

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

12) **هزات أرضية:** ضربت هزة أرضية قوتها 8.3 درجات على مقياس ريختر منطقة سان فرانسيسكو الأمريكية عام 1906م، وفي عام 1979 ضربتها هزة أرضية بقوة 5.9 درجات على مقياس ريختر. إذا علمت أن قوة الهزة M تعطى بالعلاقة $M= \log_{10}x$ ، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية. (مثال 2)

a) كم مرة تساوي شدةُ الهزة الأرضية عام 1906م شدةَ الهزة الأرضية عام 1979م؟

b) رصد ريختر نفسه الهزة الأرضية الأولى فقدر أن قوتها 8.3 درجات، وحديثًا دلت الأبحاث على أنها كانت 7.9 درجات على الأرجح، فكم مرة تساوي شدةُ الهزة الأرضية التي قدّرها ريختر الشدةَ في التقدير الذي دلت عليه الأبحاث؟

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465 , \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$ ، $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 3)

13) $\log_3 25$
14) $\log_5 49$
15) $\log_6 48$
16) $\log_7 81$
17) $\log_6 512$
18) $\log_7 729$

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي: (مثال 4)

19) $\log_5 \sqrt[4]{25}$
20) $\log_2 \sqrt[5]{32}$
21) $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$
22) $4 \log_2 \sqrt{8}$
23) $50 \log_5 \sqrt{125}$
24) $\log_3 \sqrt[6]{243}$

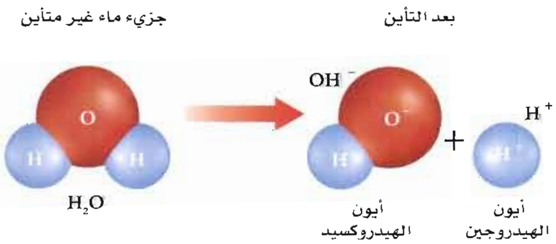
اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 5)

25) $\log_9 6x^3y^5z$
26) $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$
27) $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$
28) $\log_4 10t^2uv^{-3}$
29) $\log_5 a^6b^{-3}c^4$
30) $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: (مثال 6)

31) $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6-x)$
32) $5 \log_7 (2x) - \frac{1}{3} \log_7 (5x+1)$
33) $7 \log_3 a + \log_3 b - 2 \log_3 (8c)$
34) $2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$
35) $2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c$
36) $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$

37) **كيمياء:** ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين (H^+) في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبّر عن $\log K_w$ بدلالة $\log [H^+]$ و $\log [OH^-]$.

b) قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}. بسّط المعادلة في فرع a لتعكس القيمة العددية لـ K_w.

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

38) $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$

39) $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

40) $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

41) $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

42) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

43) $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$

44) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

45) $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$

46) **هزات أرضية:** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر .

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963 م؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

48) **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة.

49) **تحدٍّ:** بسّط العبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$ لتجد القيمة العددية الدقيقة.

50) **تبرير:** استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

51) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًّا في كل مما يأتي (الدرس 2-1)

52) $f(x) = 2^x$; $g(x) = -2^x$

53) $f(x) = 5^x$; $g(x) = 5^{x+3}$

54) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-3)

55) $\log_{10} 0.001$ 56) $\log_4 16^x$ 57) $\log_3 27^x$

58) **كهرباء:** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120\text{w}$، و $R = 3\Omega$.
قرب الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 1-7)

59) $f(x) = x + 73, g(x) = x - 73$

60) $g(x) = 7x - 11, h(x) = \frac{1}{7}x + 11$

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

61) $3^{4x} = 3^{3-x}$ 62) $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$

63) $49^x = 7^{x^2-15}$ 64) $\log_2 (x+6) = 5$

تدريب على اختبار

65) ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ ؟

A $\log_5 2$ C $\log_5 3$

B $\log_5 0.5$ D 1

66) ما هو المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$؟

A 3 C 1

B 2 D 0

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F ويصنف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات F0 – F6 حسب سرعة الرياح المصاحبة للإعصار، وطول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F–6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F-4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F-6	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقًا

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$.

$$\log_{36} x = \frac{3}{2}$$ المعادلة الأصلية

$$x = 36^{\frac{3}{2}}$$ تعريف اللوغاريتم

$$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$$ $36 = 6^2$

$$x = 6^3 = 216$$ خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$ المعادلة الأصلية

$$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$ بتعويض 216 بدلًا من x

$$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$ بالتحليل

$$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$ خاصيتي ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة

$$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$ بالتبسيط

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \checkmark$$ الحل صحيح

تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

إرشادات للدراسة

التعويض اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	بطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x-4)(x+1) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x - 4 = 0$ أو $x + 1 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 4$ أو $x = -1$	بحل كل معادلة

التحقق: عوض كل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$

$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$

$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗

$x = 4$

$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$

$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

(-3) لا تنتمي لمجال الدالة، لذا فإن $\log_2 (-3)$ غير معرف والإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D .

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

F -3 **G** -1 **H** 5 **J** 15

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، وتحقق من حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x-9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x-9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بالتبسيط ثم طرح 36 من كلا الطرفين
$(x-12)(x+3) = 0$	بالتحليل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ $\quad$ $x = 12$	بحل كل معادلة

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة

يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال 3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6(x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \not> 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًا للمعادلة.

حل المتباينات اللوغاريتمية : **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$ ، $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

إذا كان $b > 1$ ، $x > 0$ و $\log_b x < y$ ، فإن $0 < x < b^y$

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

مثال 4 — حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

حُلّ المتباينة $\log_3 x > 4$.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بالتبسيط

إرشادات للدراسة

عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرّفًا.

تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي:

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
وَ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

مثال 5 — حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$.

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$	المتباينة الأساسية
$x + 3 > 2x + 1$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$2 > x$	بطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ،

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$.

تحقق من فهمك

5) حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$.

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

5) $\log_8 \frac{1}{2} = x$

6) $\log_6 \frac{1}{36} = x$

7) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

8) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9) $5 \log_2 x = \log_2 32$

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$

11) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

12) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

13) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

14) $\log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24)$

15) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

16) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

17) $\log_5 x > 3$

18) $\log_8 x \leq -2$

19) $\log_6 x < -3$

20) $\log_4 x \geq 4$

21) $\log_3 x \geq -4$

22) $\log_2 x \leq -2$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

25) $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

26) $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

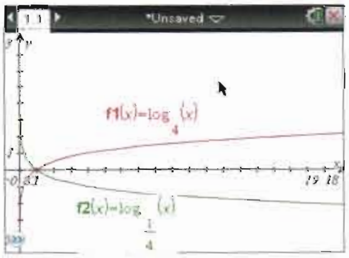
27) **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10\log_{10} R$، حيث R هي الشدة النسبية للصوت. احسب الشدة النسبية لصوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل.

28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = \log_{10} x$، حيث x سعة الموجة المسببة للحركة الأرضية.

a) كم تبلغ سعة موجة هزة أرضية سجلت 6 درجات على مقياس ريختر؟

b) كم مرة تبلغ سعة موجة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بسعة موجة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟

29) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة التمثيل البياني للدالتين $y = \log_4 x, y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



a) **تحليليًا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) **بيانيًا:** استعمل ما تعرفه عن تحويلات التمثيلات البيانية لمقارنة التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي بالتمثيل البياني للدالة $y = \log_4 x$ وذلك بعد تمثيل كل منها بيانيًا:

1) $y = \log_4 x + 2$

2) $y = \log_4 (x + 2)$

3) $y = 3 \log_4 x$

d) **تحليليًا:** صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ وما مجال ومدى كل منهما؟

e) **تحليليًا:** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى الأعلى.

30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية.

b) ماسرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلًا؟

31) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

الصوت	شدة الصوت	الديسبل
سقوط قطرة ماء	10^0	0
التنفس الطبيعي	10^1	1
مجففة الملابس	10^6	6
القطار	10^{10}	10
الإطفائية	10^{12}	12

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1واط لكل متر مربع وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع.

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة صوت تساوي 10^{-2} واط لكل متر مربع. فلماذا لا يساوي عدد وحدات الديسبل 100مرة من 10^{-2} واط لكل متر مربع؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

لينا	ريم
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \leq 2^{-2}$	$x \geq 2^{-2}$
$0 < x \leq \frac{1}{4}$	$x \geq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة
$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

34) **تبرير:** نص خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية هو: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. كيف يصبح نص الخاصية إذا كان $0 < b < 1$، وضّح إجابتك.

35) **اكتب:** وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها.

36) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل.

37) **تبرير:** ضع خطًا تحت التعبير الذي يجعل الجملة صحيحة، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 0, 1 فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين 0, 1 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

38) **اكتب:** فسر لماذا يقطع منحنى أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ المحور x عند النقطة (1 , 0) ولا يقطع المحور y.

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $\log_4 256$

43) $\log_2 \frac{1}{8}$

44) $\log_6 216$

45) $\log_7 2401$

بسّط كلًّا مما يأتي. مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر: (مهارة سابقة)

46) $x^5 \cdot x^3$

47) $(2p^2n)^3$

48) $\frac{x^4y^6}{xy^2}$

49) $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلاً للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C -2

D 2

2-6

اللوغاريتمات العشرية
Common Logarithms

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

المفردات:

اللوغاريتم العشري
common logarithm

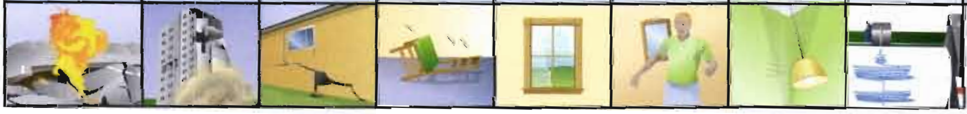
صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم سعة الموجات المسجلة بجهاز السيسموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثر في المناطق السكنية.	لا يشعر بها ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.



يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = \log_{10} x$ ، حيث x سعة الموجة المسببة لحركة الأرض.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية**، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح $\boxed{\text{LOG}}$ لإيجاد قيمته.

قراءة الرياضيات

عند كتابة اللوغاريتم دون أساس فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: $\boxed{\text{LOG}}\ 5\ \boxed{\text{ENTER}}\ \mathbf{0.6989700043}$

$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: $\boxed{\text{LOG}}\ 0.3\ \boxed{\text{ENTER}}\ \mathbf{-0.5228787453}$

$\log 0.3 \approx -0.5229$

✓ تحقق من فهمك

1A) $\log 7$ **1B)** $\log 0.5$

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هي القوة التي ترفع العدد 10 إليها للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90–100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

مثال 2 من واقع الحياة — حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. كم مرة تساوي شدة هذا الصوت من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6,\ m = 1$
$6.66 = \log I$	بقسمة كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	باستعمال الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

تحقق من فهمك

2) **هزات أرضية:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

تذكر أن الجول هي وحدة قياس طاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج = 10^{-7} جول

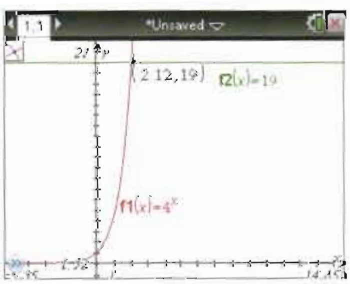
إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية للأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

مثال 3 — حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	بقسمة كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	باستعمال الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .



تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا، وذلك باستعمال الحاسبة البيانية. مثّل المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. واستعمل أمر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين . الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓

تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$

3B) $6^x = 42$

يمكنك استعمال إستراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	بطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	بقسمة كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7 > 0$
$\{y \mid y < -1.0972\}$	باستعمال الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بالتبسيط
$\dfrac{1}{59049} < \dfrac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

إرشادات للدراسة

حل المتباينات تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يجب عكس اتجاه رمز التباين.

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B) $4^y < 5^{2y+1}$

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم الأساس b للعدد الأصلي ← $\log_b n$

لوغاريتم الأساس b للأساس القديم ← $\log_b a$

مثال: $\log_3 11 = \dfrac{\log_5 11}{\log_5 3}$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$ تعريف اللوغاريتم

$\log_b a^x = \log_b n$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$x \log_b a = \log_b n$ خاصية لوغاريتم القوة

$x = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ بقسمة كلا الطرفين على $\log_b a$

$\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ $x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي
هو أبو عبدالله محمد ابن موسى الخوارزمي (1550م–780م) لُقب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، مبتدع علم الجبر وواضع أسسه ومبتكر حساب اللوغاريتمات.

مثال 5 استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_3 20 = \dfrac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 2.7268 باستعمال الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$ المعادلة الأصلية

$= \log_2 240$ $n = 240$

$= \dfrac{\log 240}{\log 2}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 7.9 بالتبسيط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ 2) $\log 21$ 3) $\log 0.4$

4) $\log 3$ 5) $\log 11$ 6) $\log 3.2$

7) $\log 8.2$ 8) $\log 0.9$ 9) $\log 0.04$

10) **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2)

11) **صوت:** أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB . (مثال 2)

a) كم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 3)

12) $6^x = 40$ 13) $2.1^{a+2} = 8.25$

14) $7^{x^2} = 20.42$ 15) $11^{b-3} = 5^b$

16) $8^x = 40$ 17) $5^x = 55$

18) $9^{b-1} = 7^b$ 19) $15^{x^2} = 110$

20) $9^{6y-2} = 3^{3y+1}$ 21) $8^{2x-4} = 4^{x+1}$

22) $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$ 23) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

حل كل مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 4)

24) $5^{4n} > 33$ 25) $6^{p-1} \le 4^p$

26) $3^{y-1} \le 4^y$ 27) $5^{p-2} \ge 2^p$

28) $2^{4x} \le 20$ 29) $6^{3n} > 36$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5)

30) $\log_3 7$ 31) $\log_2 16$

32) $\log_4 9$ 33) $\log_3 21$

34) $\log_5 (2.7)^2$ 35) $\log_7 \sqrt{5}$

36) **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افرض $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ حيث t الزمن بالسنوات الذي مر منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي ، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. (مثال 6)

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًا فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

37) **علوم البيئة:** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزء من المليون) ، كما أن مستوى pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5. فإذا كان قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $pH = -\log H$.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع مستوى الزرنيخ؟

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها $3l$ من الماء، فهل ماء البئر صالح للشرب؟
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. $1\ ppm = 1\ mg/kg$)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يكافئ مستوى pH المقلق (9.5)؟

38) **هزات أرضية:** يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة.

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم رول في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في الاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟

39) **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وابحث عن قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول.

b) **بيانيًا:** مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intresect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

c) **عدديًا:** حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتي الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **اكتشف الخطأ:** حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

بلال

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$3p \log 4 = \log 10$

$p = \dfrac{\log 10}{3 \log 4}$

خالد

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$p \log 4 = \log 10$

$p = \dfrac{\log 10}{\log 4}$

41) **تحدٍّ:** حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x. وفسّر كل خطوة.

42) **اكتب:** منحنى $g(x) = \log_b x$ هو في حقيقة الأمر تحويل هندسي لمنحنى $f(x) = \log x$. استعمل صيغة تغيير الأساس لتجد التحويل الهندسي الذي يربط بين هذين المنحنيين. ثم اشرح تأثير اختلاف قيم b على منحنى اللوغاريتم العشري.

43) **برهان:** أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا حول العلاقة بين $\log_a b, \log_b a$ وبرهن تخمينك.

44) **اكتب:** فسر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات.

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 5-2)

45) $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$

46) $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

47) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 5-2)

48) $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$

49) $\log_9 (9x + 4) \le \log_9 (11x - 12)$

50) افرض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة.
تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد هذا النوع من الطيور p طائرًا. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر؟ (الدرس 5-2)

A سنتان

B 5 سنوات

C 3 سنوات

D 8 سنوات

تدريب على اختبار

51) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3, g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

52) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟

F -4

G -2

H 2

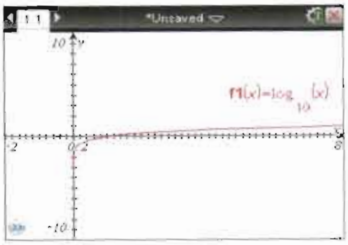
J 4

توسع **2-6**

معمل الحاسبة البيانية:

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

Solving Logarithmic Equations and Inqualites



لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًا أو باستعمال جدول.

فالحاسبة البيانية TI–nspire تحتوي $y = \log_{10} x$ كأمر أساسي.

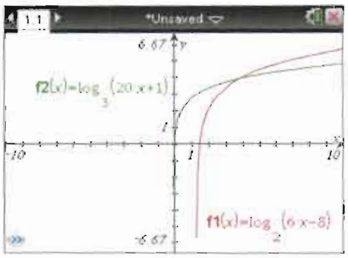
أدخل [مفتاح] 2:Add Graphs ↓ 1 New Document [on] لعرض التمثيل البياني

للدالة $y = \log_{10} x$. ولتمثل دوال لوغاريتمية بأساسات لا تساوي عشرة،

ينبغي عليك استعمال صيغة تغيير الأساس $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$.

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية **TI–nspire** لحل المعادلة **$\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$** .



الخطوة 1: مثّل كلا طرفي المعادلة بيانيًا.

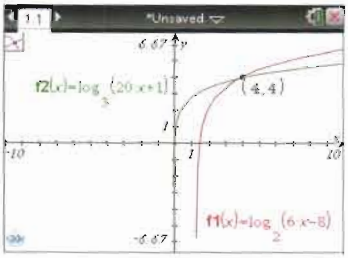
مثّل كل طرف بيانيًا على أنه دالة مستقلة.

أدخل $\log_2 (6x - 8)$ لتكون f1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون f2 .

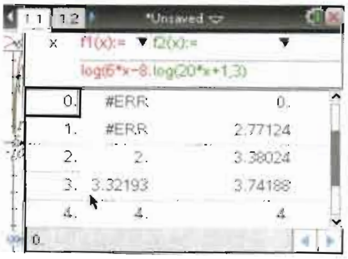
ثم مثّل المعادلتين بيانيًا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

[on] 1 New Document ↓ 2:Add Graphs [مفتاح]

$\log (6x - 8, 2)$ [enter] [tab] [مفتاح] $\log (20x + 1, 3)$ [enter]



الخطوة 2: استعمل ميزة intersection Point(s) في قائمة 7:Points & Lines [▪] لتقريب إحداثيي الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. تبين شاشة الحاسبة البيانية أن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.



الخطوة 3: استعمل خاصية TABLE لتتحقق من حلّك.

اختبر قيم الجدول لتجد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين وهي $x = 4$ ، عند القيمة $x = 4$ تكون قيمتا y للدالتين متساويتين؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لحل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

1) $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$

2) $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$

3) $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$

4) $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$

5) $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$

6) $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$

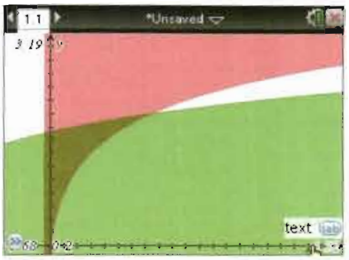
7) $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$

8) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة TI−nspire لحل متباينات لوغاريتمية

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية TI−nspire لحل المتباينة اللوغاريتمية $\log_4(10x + 1) < \log_5(16 + 6x)$.



الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة

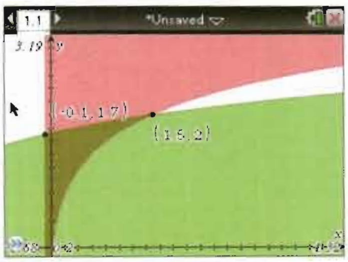
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي $\log_4(10x + 1) < y$، أو $y > \log_4(10x + 1)$،

والمتباينة الثانية هي $y < \log_5(16 + 6x)$، ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

on 1 New Document 2:Add Graphs del $>$ log (10x − 1 , 4)

enter tab del $<$ log (16 + 6x , 5) enter



الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل

الحد الأيسر لمجموعة الحل هو عندما تكون المتباينة الأولى غير معروفة، وهي كذلك عندما $10x + 1 \le 0$.

$$10x + 1 \le 0$$

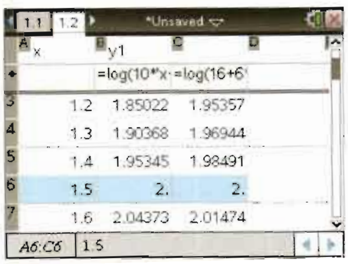
$$10x \le -1$$

$$x \le -\frac{1}{10}$$

استعمل ميزة intersect لإيجاد الحد الأيمن، وذلك بالضغط على المفاتيح:

menu 7:Points & Lines 3:Intersection Point(s) والضغط على أحد التمثيلين البيانيين ثم الضغط على الآخر.

ويمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.



الخطوة 3: استعمال ميزة TABLE للتحقق من حلك.

ابدأ الجدول عند −0.1، واستعرض قيم x بزيادة 0.1 كل مرة، وحرك المؤشر باحثاً في الجدول.

اضغط على المفاتيح: on 4:Add Lists & Spreadsheet ،

واكتب $Y_1 = \log(10x + 1 , 4)$ في العمود الثاني، $Y_2 = \log(16 + 6x , 5)$ في العمود الثالث، وتؤكد قيم الجدول أن مجموعة حل المتباينة هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانيّة TI-nspire لحل كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك:

9) $\log_7 x < -1$

10) $\log_5(12x + 5) \le \log_5(8x + 9)$

11) $\log_3(7x - 6) < \log_3(4x + 9)$

12) $\log_5(3 - 2x) \ge \log_5(4x + 1)$

13) $\log_4(9x + 1) > \log_3(18x - 1)$

14) $\log_3(3x - 5) \ge \log_3(x + 7)$

15) $\log_5(2x + 1) < \log_4(3x - 2)$

16) $\log_2 2x \le \log_4(x + 3)$

الفصل 2

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-1, 2-2)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذًا وفقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين للدوال الأسية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ وَ $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا $x < y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-3)

- إذا كان $b > 0, b \neq 1, x > 0$ فإن الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي $b^y = x$، والصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $x = b^y$ هي $\log_b x = y$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 2-4)

- خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الضرب والقسمة: إذا كانت x, y, b أعداد حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
  $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ وَ
  $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- لوغاريتم القوة: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b x^m = m \log_b x$.
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
- خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ وَ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

اللوغاريتم العشري (الدرس 2-6)

- اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم الذي أساسه 10 .

المفردات

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ تسمى دالة ________ .

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى ________ x للأساس b .

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 ________ .

4) ________ هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال ________ كتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) يُسمى الأساس $1 - r$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ ________ .

7) تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ ________

مراجعة الدروس

2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًا (الصفحات 85 - 80)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا وحدد مجالها ومداها:

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = -5(2)^x$

10) $f(x) = 3(4)^x - 6$

11) $f(x) = 3^{2x} + 5$

12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$

13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

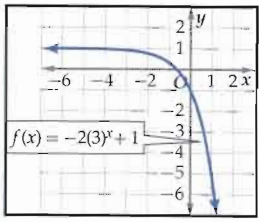
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًا.

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة.

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 1\}$

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية (الصفحات 92 - 88)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

15) $16^x = \frac{1}{64}$

16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$

17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$

18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$

19) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$

20) $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه.

b) ما عدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32 h؟

مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

$4^{3x} = 32^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$	بإعادة الكتابة لتوحيد الأساس
$2^{6x} = 2^{5x-5}$	بالتبسيط
$6x = 5x - 5$	خاصية المساواة للأسس
$x = -5$	بالتبسيط

الحل هو -5.

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الصفحات 99 - 93)

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية.

23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية.

أوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $\log_4 256$

25) $\log_2 \frac{1}{8}$

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًا:

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$

27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$	بفرض أن العبارة تساوي y
$64 = 2^y$	تعريف اللوغاريتم
$2^6 = 2^y$	$64 = 2^6$
$6 = y$	خاصية المساواة للدوال الأسية

إذن، $\log_2 64 = 6$.

دليل الدراسة و المراجعة

2-4 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 106 - 101)

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227, \log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

28) $\log_5 8$

29) $\log_5 64$

30) $\log_5 4$

31) $\log_5 \frac{1}{8}$

32) $\log_5 \frac{1}{2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة:

33) $\log_3 2x^5 y^2 z^3$

34) $\log_5 ab^{-3} c^4 d^{-2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة:

35) $3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2 (x-4)$

36) $2\log_2 (z-1) - \log_2(2z-1)$

37) **هزات أرضية:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = \log_{10} x$، حيث x شدة الهزة الأرضية. كم مرة تعادل شدةُ هزة أرضية سجّلت 10 درجات على مقياس ريختر شدة هزة أرضية أخرى سجّلت 7 درجات على المقياس نفسه؟

مثال 4

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227, \log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5 (16 \times 2)$	$32 = 16 \times 2$
$= \log_5 16 + \log_5 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$\approx 1.7227 + 0.4307$	باستعمال الحاسبة
≈ 2.1534	بالتبسيط

مثال 5

اكتب $\log_3 x^2 y^{-4} z$ بالصورة المطولة:

العبارة هي لوغاريتم حاصل ضرب x^2, y^{-4}, z

$\log_3 x^2 y^{-4} z$	
$= \log_3 x^2 + \log_3 y^{-4} + \log_3 z$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$= 2\log_3 x - 4\log_3 y + \log_3 z$	خاصية لوغاريتم القوة

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية (الصفحات 111 - 107)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

38) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

39) $\log_2 \frac{1}{64} = x$

40) $\log_4 x < 3$

41) $\log_5 x < -3$

42) $\log_9 (3x-1) = \log_9 (4x)$

43) $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$

44) $\log_3 (3x+4) \leq \log_3 (x-2)$

45) **صوت:** استعمل القانون $L = 10\log_{10} R$، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون في الوقت نفسه مقارنة بارتفاع صوت شخص واحد. على فرض أن ارتفاع صوت الشخص الواحد يساوي 80 dB.

مثال 6

حُلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$3x(4) = 36$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$12x = 36$	بالضرب
$x = 3$	بقسمة كلا الطرفين على 12

مثال 7

حُلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x < 9$	بالتبسيط

2-6 اللوغاريتمات العشرية (الصفحات 117 - 112)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

(46 $3^x = 15$

(47 $6^{x^2} = 28$

(48 $8^{m+1} = 30$

(49 $12^{r-1} = 7^r$

(50 $3^{5n} > 24$

(51 $5^{x+2} \leq 3^x$

(52 اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

(a $\log_4 11$

(b $\log_2 15$

(53 استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري، وتوقع ربحًا سنويًّا نسبته 5%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر.

استعمل القانون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$، حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، r معدّل الربح السنوي، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

(a كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي 15000 ريال؟

(b كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ الأصلي؟

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$5^{3x} = 7^{x+1}$	المعادلة الأصلية
$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$3x \log 5 = (x+1)\log 7$	خاصية القوة للوغاريتمات
$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$	بطرح $x \log 7$ من كلا الطرفين
$x(3 \log 5 - \log 7) = \log 7$	بإخراج x عامل مشترك
$x = \dfrac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$	بقسمة كلا الطرفين على $3 \log 5 - \log 7$
$x \approx 0.6751$	باستعمال الحاسبة

تطبيقات ومسائل

54) أسعار: تزداد اسعار السلع سنويًا بسبب ما يسمى التضخم. ونتيجة لذلك، يزداد سعر إحدى السلع بمعدل 4.5% سنويًا، ويعطى سعر هذه السلعة بالدالة $M(t)=275(1.045)^t$، حيث t عدد السنوات بعد عام 1422هـ (الدرس 2-1)

a) كم كان سعر السلعة عام 1422هـ؟

b) إذا استمر تضخم سعر السلعة بمعدل 4.5% سنويًّا، فكم سيكون سعرها عام 1437هـ تقريبًا؟

55) سيارات: ينخفض سعر سيارة جديدة سنويًا بدءًا من لحظة شرائها، ويُعطى سعر هذه السيارة بعد t سنة من شرائها بالمعادلة $f(t) = 80000(0.8)^t$. (الدرس 2-2)

a) ما معدّل انخفاض سعر السيارة سنويًا؟

b) متى يصبح سعر السيارة مساويًا لنصف سعرها الأصلي؟

56) استثمار: ورثت فاطمة عن والدها مبلغ 250000 ريال واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه: (الدرس 2-2)

السنة	المبلغ (ريال)
1412 هـ	250000
1420 هـ	329202
1425 هـ	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار.

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه. ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي 500000 ريال تقريبًا؟

57) كيمياء: يُعطى عدد السنوات t اللازمة لاضمحلال الكمية الأصلية N_0 جرام من مادة مشعة لتصبح N جرام بالمعادلة

$$t = \frac{16 \log_{10} \frac{N}{N_0}}{\log_{10} \frac{1}{2}}$$ (الدرس 2-3)

a) بشكل تقريبي، بعد كم سنة تقريبًا يضمحل 100g من المادة المشعة لتصبح 30g؟

b) ما النسبة التقريبية لما يتبقى من 100g بعد 40 سنة؟

58) زلازل: مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. وتعتمد درجة مقياس ريختر R على الطاقة الصادرة عن الزلزال E بوحدة الكيلوواط لكل ساعة. وتعطى R بالعلاقة

$R = 0.67 \cdot \log_{10} (0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-5)

a) أوجد قيمة R لزلزال أصدر 1000000 كيلو واط في الساعة.

b) قدّر كمية الطاقة الصادرة عن زلزال قوّته 7.5 على مقياس ريختر.

59) أحياء: يعرّف الزمن اللازم ليصبح عدد فصيل نادر من الحيوانات مثلي ما كان عليه زمن الجيل G، ويعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الفترة الزمنية. إذا كان زمن الجيل لهذا الفصيل 6 سنوات، ويوجد الآن من هذا الفصيل 5 حيوانات، فما الفترة الزمنية اللازمة ليصبح عدد حيوانات هذا الفصيل 3125 حيوانًا؟ (الدرس 2-5)

60) صوت: يُعطى مستوى شدّة صوت، مقاسًا بالديسبل، بالمعادلة $d(w) = 10 \log_{10} \frac{w}{w_0}$، حيث w شدّة الصوت بالواط لكل متر مربع، w_0 الثابت 1×10^{-12} واط لكل متر مربع. (الدرس 2-5)

a) حدّد شدّة الصوت إذا كان مستوى شدّته 100 ديسبيل.

b) قارنت سميرة هذا الصوت مع صوت آخر مستوى شدّته 50 ديسبل ، فاستنتجت أن شدّة الصوت الثاني تساوي نصف شدّة الصوت الأول. هل استنتاجها صحيح؟ برر إجابتك.

c) صوت شدّته 1×10^{-8} واط لكل متر مربع. كم يزيد مستوى شدته إذا ضوعفت شدته؟

61) مال: السعر الأصلي لسلعة 8000 ريالاً، وازداد سعرها باستمرار بسبب التضخم بطريقة الربح المركب حتى بلغ 12000 ريال بعد 5 سنوات. (الدرس 2-2)

a) إذا كان معدل التضخم 6% سنويًا، فبعدكم سنة يصبح سعر السلعة 12000 ريال ؟

b) ما معدل التضخم الذي يصبح عنده سعر السلعة 12000 ريال بعد 5 سنوات؟

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها:

1) $f(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$

4) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$

6) $\log_2 (x^2 - 7) = \log_2 6x$

7) $\log_5 x > 2$

8) $\log_3 x + \log_3 (x - 3) = \log_3 4$

9) $6^{n-1} \le 11^{n}$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 11 \approx 1.4899$، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$

11) $\log_5 \frac{11}{2}$

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة ما قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن أن تمثل عدد السكان بعد x سنة إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه.

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية.

14) **اختيار من متعدد:** ماقيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟

A -3 C $\frac{1}{3}$

B $-\frac{1}{3}$ D 3

15) **زراعة:** تمثل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ، y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص ؟

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة.

16) **توفير:** استثمر سلمان مبلغ 75000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 9%، بحيث يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال شهريًا .

a) ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات؟

b) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ المستثمر عند البداية؟

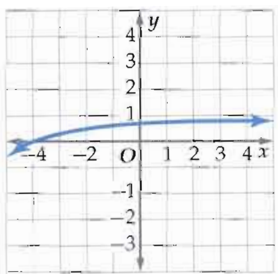
c) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي 100000 ريال؟

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟

F $\frac{1}{2}$ G 2

H 4 J 8

18) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية لها التمثيل البياني أدناه؟



A $y = \log_{10} (x - 5)$

B $y = 5 \log_{10} x$

C $y = \log_{10} (x + 5)$

D $y = -5 \log_{10} x$

19) اكتب العبارة اللوغاريتمية $-2 \log_3 x + 6 \log_3 (z - 2) + \log_3 t^2$ بالصورة المختصرة.

الفصل
3
المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$ **2)** $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$ **4)** $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\ \text{cm}$ فما عرضها؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

6) $x^2 + 6x = 0$ **7)** $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$ **9)** $x^2 - 7x + 12 = 0$

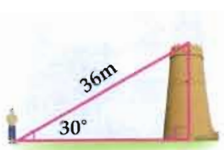
10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\ \text{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

11) $\sin 45°$ **12)** $\cos 225°$

13) $\tan 150°$ **14)** $\sin 120°$

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angel):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي ومركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

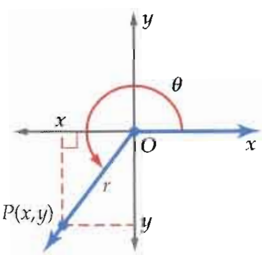
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angels):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$



3-1

المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية.

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد النسب المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة
identity
المتطابقة المثلثية
trigonometric identity
المتطابقات النسبية
quotient identities
متطابقات المقلوب
resiprocal identities
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities
متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقاسة بالشمعة و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والعمودي على السطح، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$، متطابقة لأن طرفاها متساويان لجميع قيم x و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

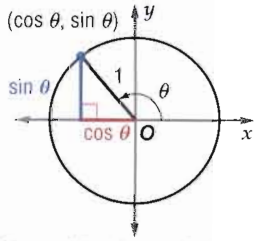
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



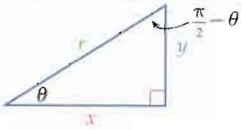
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ حسب نظرية فيثاغورس

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

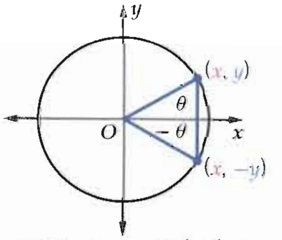
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



$\sin\theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين: يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين باستعمال قياس الدرجات وليس بالراديان للزوايا كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

إن المتطابقة $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ صحيحة فيما عدا عند الزوايا ذات القياسات: $90°, 270°, \ldots, 90° + k180°$ ، حيث k أي عدد صحيح ؛ وذلك لأن جيب تمام أي زاوية من هذه الزوايا يساوي 0 ، وبالتالي تكون $\tan\theta$ غير مُعرّفة .

وتُسمّى هذه المتطابقات في بعض الأحيان متطابقات نسبية. وتوجد متطابقة أخرى من هذا النوع هي: $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية ؛ لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية الراسمة.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	بطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	بتعويض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	بإيجاد مربع العدد $\frac{1}{4}$
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	بالطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\text{Arcsin}\,\frac{1}{4}$.

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ باستعمال الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$$

$$-0.968 \approx -0.97 \checkmark$$

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5};\ 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقات فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	بتعويض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	بإيجاد مربع العدد $-\frac{3}{5}$
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول أدناه على تذكّر أي النسب المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4.

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\cot\theta$	1, 3	2, 4

تبسيط العبارات: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$

2B) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

إرشادات للدراسة

تبسيط

عند تبسيط العبارات يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة الجيب $(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta=\frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta = \frac{I}{R^2} \qquad E \text{ بضرب كلا الطرفين في}$$

$$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \cos\theta \text{ بضرب كلا الطرفين في}$$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2=\frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسّر إجابتك.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad E \text{ بضرب كلا الطرفين في}$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad R^2 \text{ بقسمة كلا الطرفين على}$$

$$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بالتبسيط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2=\frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E=\frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع (a) هي: $E=\frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) أعد كتابة $\cot^2\theta-\tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$

2) $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$

3) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$، $270° < \theta < 360°$

4) $\sec\theta$، إذا كان $\tan\theta = -1$، $270° < \theta < 360°$

5) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = -3$، $180° < \theta < 270°$

6) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$، $180° < \theta < 270°$

7) $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$، $90° < \theta < 180°$

8) $\cot\theta$، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$، $\sin\theta < 0$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan\theta\cos^2\theta$

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

11) $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$

13) $\sin\theta(1+\cot^2\theta)$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$

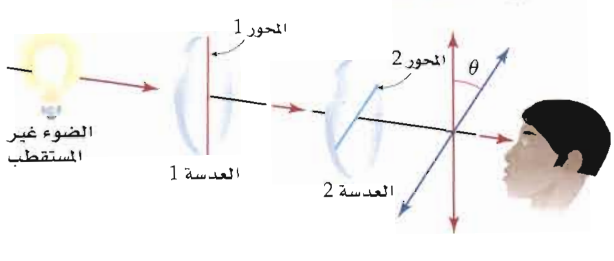
15) $\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

16) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

17) $2 - 2\sin^2\theta$

18) $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى.
يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \dfrac{I_0}{\csc^2\theta}$، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة ، لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم e . ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \dfrac{W\sec\theta}{AS}$، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لـِ W، واكتب إجابتك بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\sin\theta$ أو $\cos\theta$.

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80, \theta = 40°, A = 0.75$. $S = 1000\ W/m^2$ (قرّب إلى أقرب جزء من مئة).

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية ؛ لتحدد إذا كانت معادلة ما تمثل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$				
$\tan^2\theta\sin^2\theta$				

b) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة ، بيانيًا.

c) **تحليليًا:** إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين غير متطابقين ؛ فإن المعادلة **ليست** متطابقة. هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثل متطابقة أم لا . (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m باتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة يتم استعمال نظام المعادلات الآتي:

$F_n - mg\cos\theta = 0, mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

بسّط كل مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تجادل سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد إنها متطابقة حيث جرب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد إنها ليست متطابقة حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة.

27) **تبرير:** حدّد كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الإستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\dfrac{ER^2}{I}$.

28) **اكتب:** بيّن لماذا تعد المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ مثالًا على نظرية فيثاغورس.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثل متطابقة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة:
$\tan\theta\sin\theta$

31) **تبرير:** بيّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة:
$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

32) **اكتشف الخطأ:** بسط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

علاء

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\tan^2\theta+1$

$=\sec^2\theta$

سامي

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{1}$

$=\sin^2\theta$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلًّا ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

33) $\operatorname{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

34) $\tan\left(\operatorname{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$

35) $\sin\left(\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

36) $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$

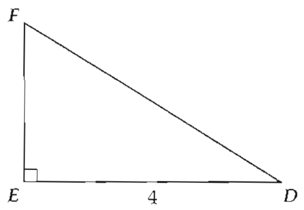
37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة:

$f(x)=\begin{cases} K+x^2\,,\ x<5 \\ 3x+2\,,\ x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. (الدرس 3-1)

38) حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. (الدرس 2-2)

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5

B 4

C 3.2

D 10

40) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0<x<90°$، فما قيمة $\tan x$؟

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

3-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية بتحويل أحد طرفي المعادلة إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية بتحويل كلا طرفي المعادلة إلى العبارة نفسها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء عبدالله.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin \theta = \cos \frac{v^2}{gR} \theta$، حيث $0 \leq \theta \leq 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًا عن بعضهما بعضا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المعادلة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالاضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحَة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي — إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

الخطوة 1: بسِّط أحد طرفي المعادلة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

الخطوة 2: حوِّل العبارة في هذا الطرف إلى صورة العبارة في الطرف الأسهل.

مثال 1 — تحويل أحد طرفي المعادلة

أثبت أن المعادلة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$ تمثل متطابقة.

$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$ الطرف الأيسر

$= \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta}$ بضرب كل من البسط والمقام في $1 + \cos \theta$

$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$ $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$

$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$ $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$= 1 + \cos \theta$ ✓ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sin^2 \theta$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

تحقق من فهمك

1) $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$.

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، يمكنك تعزيز إجابتك عدديًا وذلك باختيار قيمة لـ θ. وتعويضها في العبارة التي يمثلها البديل الذي اخترته، ثم مقارنتها بقيمة العبارة الواردة في نص السؤال، ولكن ذلك لايمكن أن يكون بديلًا عن تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على استبدال الدوال بدوال مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{بالضرب}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{بقلب المقام وضربه بالبسط}$$

$$=\cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\cot^2\theta \qquad \text{بالضرب}$$

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta-\cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **B** $\tan^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- قم بتعويض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط العبارة.
- حلّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لايتم تطبيق خصائص المساواة على المتطابقات بنفس طريقة تطبيقها على المعادلات، فلا تُنفّذ أي عملية على كلا طرفي المعادلة المعطاة قبل أن يتم إثبات أنها متطابقة.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عملية التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلك اختر قيمة لـ θ. وعوّضها في العبارة الجديدة، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت أن المعادلة $\cos\theta \cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$ تمثل متطابقة.

$$\cos\theta \cot\theta \stackrel{?}{=} \csc\theta - \sin\theta$$ الطرف الأيسر

$$\cos\theta \cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$ بالضرب

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$$ الطرف الأيمن

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta}$$ بالطرح

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta \tan\theta$.

تدرب وحل المسائل

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta \sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta \sec\theta \cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1 - 2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta \cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{2 + \sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

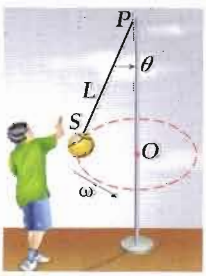
19) $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$



24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \frac{g\sec\theta}{\omega^2}$، فهل الصيغة $L = \frac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين θ, L؟ وضح إجابتك.

25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره 16.7 m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار. وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$. فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

بسّط كل من العبارات الآتية، وحدد الناتج 1 أم 1− :

(26 $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ (27 $\sin\theta\csc(-\theta)$

(28 $\sin^2(-\theta)+\cos^2(-\theta)$ (29 $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

(30 $\sec^2(-\theta)-\tan^2(-\theta)$ (31 $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

(32 $\cos(-\theta)\sec\theta$ (33 $\sin(-\theta)\csc\theta$

بسّط كل مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

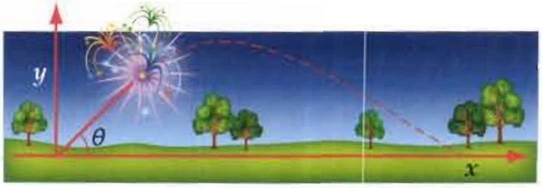
(34 $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ (35 $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

(36 $\frac{\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\cos^2x+\sin^2x}$ (37 $\tan\theta\cos\theta$

(38 $\cot\theta\tan\theta$ (39 $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

(40 $(\sec^2\theta+\csc^2\theta)-(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$

(41 **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y=\frac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta}+\frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



(42 **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P=I_0{}^2R\sin^2 2\pi ft$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

(43 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $2\sin x=1$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

b) **بيانيًا:** مثل كلًا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًا كدالة في المجال $0\le x<2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مثل كلًا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًا، كدالة في المجال $-2\pi<x<2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(44 **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$
$\sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

(45 **تبرير:** بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ متطابقة، ولكن $\sin\theta=\sqrt{1-\cos\theta}$ ليست متطابقة.

(46 **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

(47 **اكتب:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin\theta)$ وجيب التمام $(\cos\theta)$ في معظم الأحيان.

(48 **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.

(49 **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

(50 $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta=\frac{2}{3}$ ، $0°<\theta<90°$

(51 $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ ، $90°<\theta<180°$

(52 $\cos\theta$ ، إذا كان $\sec\theta=\frac{5}{3}$ ، $270°<\theta<360°$

(53 **هندسة معمارية:** يمثل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة)

بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 3-1)

(54 $\sin\theta\cos\theta(1+\cot^2\theta)$ (55 $\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

تدريب على اختبار

(56 **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$، حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$؟

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

B $\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta\sin\theta$

D $\tan\theta\csc\theta$

(57 **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثل متطابقة:
$\sin^3\theta\cos\theta+\cos^3\theta\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$

3-3

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
Sum and Difference of Angles Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

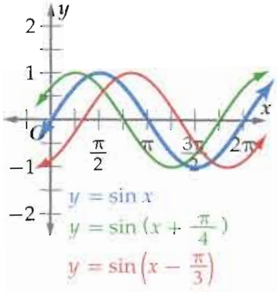
والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي، وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟ تُسبّب الأمواج التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا.
ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل المجاور، تتضمّن جمع الزاويتين x , $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال صيغ النسب المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد قيمة العبارات المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin(60° - 45°)$.

مفهوم أساسي: متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$	$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$	$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$	$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

مثال 1 إيجاد قيم العبارات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

استعمل المتطابقة: $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\sin 105° = \sin(60° + 45°)$ — $A = 60°, B = 45°$

$= \sin 60°\cos 45° + \cos 60°\sin 45°$ — متطابقة المجموع

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — بالتعويض

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ — بالتبسيط

b) $\cos(-120°)$

استعمل المتطابقة: $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$\cos(-120°) = \cos(60° - 180°)$ — $A = 60°, B = 180°$

$= \cos 60°\cos 180° + \sin 60°\sin 180°$ — متطابقة الفرق

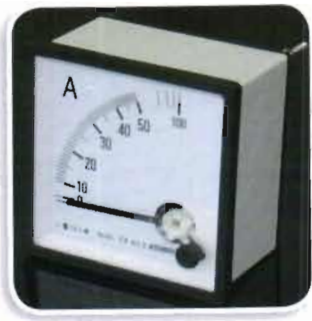
$= \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0$ — بالتعويض

$= -\frac{1}{2}$ — بالتبسيط

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ **1B)** $\cos(-15°)$

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما، لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.



الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

$$c = 3 \sin 165°t \quad \text{الصيغة الأصلية}$$

$$= 3 \sin (120°t + 45°t) \quad 120°t + 45°t = 165°t$$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$$c = 3 \sin (120°t + 45°t) \quad \text{المعادلة حسب الفرع a}$$

$$= 3 \sin (120° + 45°) \quad t = 1$$

$$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°] \quad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{بالضرب}$$

$$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4} \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن ، شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة كوّن قائمة بقياسات الزوايا بين $0°$, $360°$ ، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 — إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$$\cos (90° - \theta) \quad \text{الطرف الأيسر}$$

$$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta \quad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \sin \theta \checkmark \quad \text{بالتبسيط}$$

الناتج هو الطرف الأيمن من المتطابقة.

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ (b

الطرف الأيسر	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
متطابقة المجموع	$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$
بالتعويض	$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$
بالتبسيط	$= \cos\theta$ ✓

الناتج هو الطرف الأيمن من المتطابقة.

تحقق من فهمك

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ (3A

$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$ (3B

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

$\cos 165°$ (1

$\cos 105°$ (2

$\cos 75°$ (3

$\sin(-30°)$ (4

$\sin 135°$ (5

$\sin(-210°)$ (6

$\cos 135°$ (7

$\tan 195°$ (8

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120°\, t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 3)

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$ (10

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$ (11

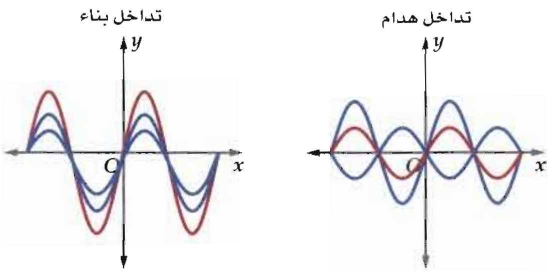
$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$ (12

$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$ (13

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$ (14

$\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ (15

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدامًا.



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:
$y_1 = 10\sin(2t + 210°), y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسر معناه بالنسبة للموجتين.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$\tan 165°$ (17

$\sec 1275°$ (18

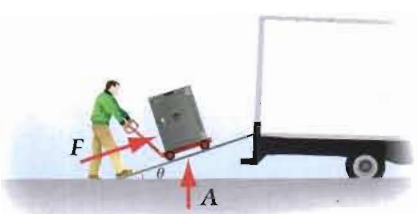
$\sin 735°$ (19

$\tan\frac{23\pi}{12}$ (20

$\csc\frac{5\pi}{12}$ (21

$\cot\frac{113\pi}{12}$ (22

23) **قوة:** في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة الكافية F لإبقاء الخزنة ثابتة على المنحدر تعطى بالعلاقة $F = \frac{W(\sin A + \mu\cos A)}{\cos A - \mu\sin A}$، حيث W هو وزن الخزنة، $\mu = \tan\theta$ ، فبيّن أن $F = W\tan(A + \theta)$.



24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

b) **بيانيًا:** افرض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًا من: $y = \sin(x + x - 15°)$ ، $y = \sin x + \sin(x - 15°)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليليًا:** حدّد إذا كانت $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسر إجابتك.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

25) $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26) $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27) $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

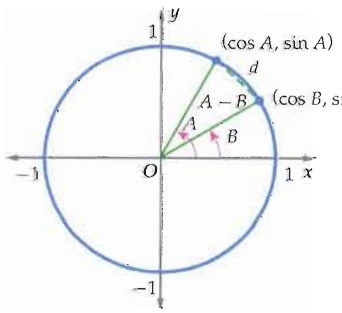
28) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A+B)$ بدلالة $\cot A, \cot B$.

31) **برهان:** الشكل أدناه، يُبيّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة ؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B), (x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$



32) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة «لماذا؟» في بداية الدرس وفي السؤال 16 لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام.

33) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 1−3)

34) $\sin\theta \csc\theta - \cos^2\theta$

35) $\cos^2\theta \sec\theta \csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 1−3)

36) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

37) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ ، $180° < \theta < 270°$

38) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = -\frac{7}{12}$ ، $90° < \theta < 180°$

39) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $270° < \theta < 360°$

40) $\tan\theta$ ، إذا كان $8\cos\theta - 5 = 0$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

أثبت أن كل من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة: (الدرس 2−3)

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

42) $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

تدريب على اختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة:
$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3}$

44) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$.

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-1)

1) $\cot\theta \sec\theta$

2) $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

3) $\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي (الدرس 3-1)

5) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$

6) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{1}{2}$، $270° < \theta < 360°$

7) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$ ؟ (الدرس 3-1)

A $\cos\theta$ **C** $\tan\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\sec\theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16 m، وظل زاوية ميل سلمان تعطى بالعلاقة $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 3-2)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله؟

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (الدرس 3-2)

10) $\cot^2\theta + 1 = \dfrac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

11) $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = 1$

12) $\dfrac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} = (1+\cos\theta)\sec\theta$

13) $\tan\theta(1-\sin\theta) = \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

14) **حاسوب:** تُصنّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 3-2)

a) أوجد قيمة h.

b) بيّن أن $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (الدرس 3-2)

15) $\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$

16) $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

17) $\cot\theta(1-\cos\theta) = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1+\cos\theta}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3-3)

18) $\cos 105°$

19) $\sin(-135°)$

20) $\tan 15°$

21) $\cot 75°$

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ ؟ (الدرس 3-3)

A $\sqrt{2}$ **C** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ **D** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) أثبت أن المعادلة الآتية تمثل متطابقة: (الدرس 3-3)

$\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta =$
$\sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية أو نصفها.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال 1 — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\sin\theta = \frac{2}{3}$
$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$	بالطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	متطابقة ضعف الزاوية
$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$	$\sin\theta = \frac{2}{3},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$	بالضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $0° < \theta < 90°$ ؛ $\sin \theta = \frac{2}{3}$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos \theta, \sin \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \sin \theta = \frac{2}{3}$$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan \theta$ ؛ كي نستعمل متطابقة ظل ضعف الزاوية $\tan 2\theta$.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \text{تعريف دالة الظل}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \qquad \sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{بالقسمة وإنطاق المقام}$$

الخطوة 2: $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \qquad \tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \qquad \text{بتربيع المقام}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \qquad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

✓ تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $90° < \theta < 180°$ ؛ $\cos \theta = -\frac{1}{3}$:

2A) $\cos 2\theta$ 2B) $\tan 2\theta$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin (A + B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ ، أو $\sin 2\theta$ ، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos (A + B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ ، أو $\cos 2\theta$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة ؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \qquad \cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \qquad \tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ باستعمال متطابقة فيثاغورس

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ بالطرح

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث ، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ بالتبسيط

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ و $270°$ ، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. إذن، $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $67.5°$ في الربع الأول ، فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$ بالطرح

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ بالضرب

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة

أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 4 من واقع الحياة — التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بتبسيط كل من البسط والمقام

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بالتبسيط

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلًّا مما يأتي:

4A) $\sin 135°$

4B) $\sin 15°\cos 15°$

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 — إثبات صحة المتطابقات

أثبت أن المعادلة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ تمثّل متطابقة.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ الطرف الأيمن

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ بضرب كل من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ بالضرب في $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ بالضرب

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ بالتبسيط

$$= \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \checkmark$$ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta;\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

وهو الطرف الأيسر؛ أي أن المعادلة تمثل متطابقة.

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

10) $\sin 75°$

11) $\tan 165°$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة إبتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2 ، وَ v تُمثِّل السرعة الإبتدائية المتجهة . (مثال 4)

a) بسِّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 5)

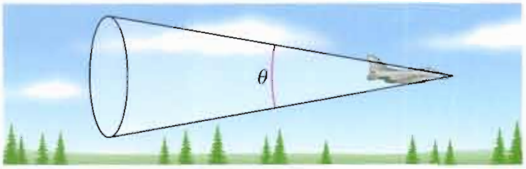
14) $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

17) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) بحسب العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل التعبير الذي وجدته في **a** لحساب قيمة عدد ماخ.

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تعطى بالصيغة: $P = {I_0}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة إبتدائية مقدارها 95 ft/s . برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° - A$, $\theta = 45° + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

22) $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

23) $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$

24) $\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

25) $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = 4\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (**a**) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(x)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(x) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (**c**) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(x)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ : $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

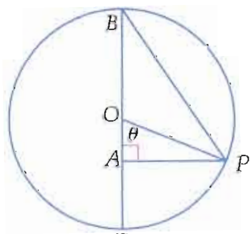
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\sin(45-30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

$$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\sin \frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$
$$= 0.5$$

28) **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها. لتبرهن أن:

$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$.



29) **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها، كي تستعمل كلًا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A+B)$ لاشتقاق صيغة لِـ $\sin 2\theta$، واستعمل الصيغة $\cos(A+B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$.

31) **تبرير:** اشتقّ متطابقات النسب المثلثية لنصف الزاوية من متطابقات النسب المثلثية لضعف الزاوية.

32) **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب قولف كرة عدة مرات بسرعة إبتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$. فسّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32\ ft/s^2)$

مراجعة تراكمية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (الدرس 3-2)

33) $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

34) $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

35) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-3)

36) $\sin 135°$

37) $\cos 105°$

38) $\sin 285°$

39) $\cos(-30°)$

40) $\sin(-240°)$

41) $\cos(-120°)$

42) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\text{coc}\ 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$. (الدرس 3-3)

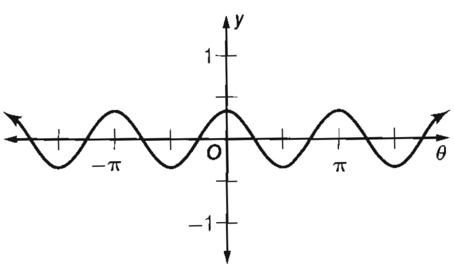
تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 < \theta < 90°$.

A $2-\sqrt{3}$ C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B $\sqrt{3}-2$ D $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :



A $y = 3\cos 2\theta$ C $y = 3\cos\frac{1}{2}\theta$

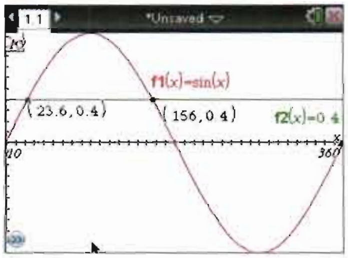
B $y = \frac{1}{3}\cos 2\theta$ D $y = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\theta$

معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية فإنك تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر جميعها التي تحقّق المعادلة. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كل من طرفي المعادلة كدالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1، أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1\,(x) = \sin x,\ f2\,(x) = 0.4$. ثم مثّل الدالتين بيانيًّا، ولأن الفترة معطاة بالدرجات. اضبط الحاسبة على نظام الدرجات.

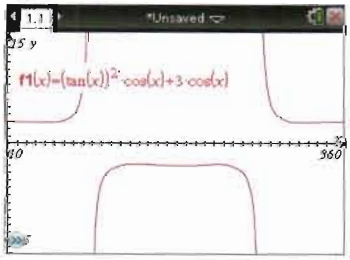
اضغط على المفاتيح:

on | 1 New Document | 2:Add Graphs | trig | sin | x | enter | tab | 0.4 | enter

الخطوة 2، أوجد قيم تقريبية للحلول بالاعتماد على التمثيل البياني، تستطيع أن ترى أنّه يوجد نقطتان يتقاطع عندهما التمثيلان البيانيان في الفترة $0° \le x < 360°$. استعمل ميزة Intersection ؛ لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.
فتكون الحلول هي $x \approx 23.6°$, $x \approx 156.0°$.

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1، أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين، $f1\,(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x,\ f2\,(x) = 0$.

ثم اضغط على المفاتيح:

on | 1 New Document | 2:Add Graphs | (| trig | tan | x | trig | cos | $x)$
^ | $2 + 3$ | trig | cos | x | enter | tab | 0 | enter

الخطوة 2، هاتان الدّالتان لا تتقاطعان.
لذلك ، ليس للمعادلة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كل منها:

1) $\sin x = 0.7 ;\ 0° \le x < 360°$

2) $\tan x = \cos x ;\ 0° \le x < 360°$

3) $3 \cos x + 4 = 0.5;\ 0° \le x < 360°$

4) $0.25 \cos x = 3.4 ;\ -720° \le x < 720°$

5) $\sin 2x = \sin x ;\ 0° \le x < 360°$

6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0 ;\ -360° \le x < 360°$

3-5

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية وهو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية هي معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس، سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ المعادلة $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ المعادلة الأصلية

$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ بالتحليل

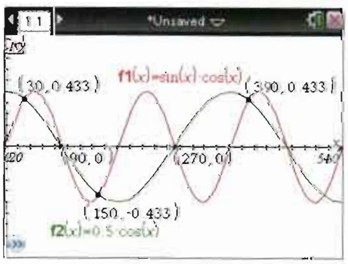
$\cos \theta = 0$ أو $\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$.

التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكل من: $y = \sin \theta \cos \theta,\ y = \frac{1}{2} \cos \theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلان البيانيان. بإمكانك أن تلاحظ بأنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم فقط بالنقط الموجودة في الفترة بين $0°$ و $180°$.



تحقق من فهمك

1) حُلّ المعادلة $\sin 2\theta = \cos \theta$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

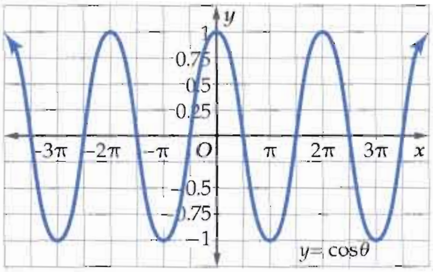
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر بين $0°$ وَ $360°$ أو بين 0 rad وَ 2π بالراديان. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. ولذلك ، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\ldots, \pi, 3\pi, 5\pi$ ، وكذلك $\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi$ ، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π . طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$ ، حيث k أي عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول كمضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π ، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تحقق من فهمك

2A) حُلّ المعادلة $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات.

2B) حُلّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حلّ مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	بتعويض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	بطرح 21 من كلا الطرفين.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	بقسمة كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	بأخذ معكوس جيب التمام

بما أن $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ ، k أي عدد صحيح.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ، $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ بقسمة كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة ، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

حلول دخيلة : بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل، لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع بين 1 و -1 ، بما فيها هذان العددان. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ بالتحليل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل، لأن كل قيمة من قيم النسبة المثلثية $\sin\theta$ يجب أن يقع بين 1 و -1 ، بما فيها هذان العددان

لذلك يكون للمعادلة حلان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

التحقق:

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

b) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ بالتربيع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ ، $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ بطرح $(1 - \cos^2\theta)$ من كلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ بالتحليل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 180° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \\ 0 &\stackrel{?}{=} 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 90° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 90° \\ 1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ 1 &= 1 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 270° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 270° \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ -1 &\ne 1 \times \end{aligned}$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4A) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$

4B) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

ارشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π أو 2π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
تذكر أن حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ ، $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ بجعل أحد الطرفين مساويا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ بالتحليل

خاصية الضرب الصفري

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = -1$ ، $\tan^2\theta = 3$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

$\theta = 60° + 180°k, \theta = -60° + 180°k$ ، حيث k هو أي عدد صحيح.

لذا، تكون الحلول هي $60° + 180°k, -60° + 180°k$.

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 ; 0° \le \theta \le 360°$

2) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0 ; 0° \le \theta \le 360°$

3) $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta ; 0° \le \theta \le 360°$

4) $\sin\theta + \cos\theta = 1 ; 0° \le \theta \le 360°$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

6) $2\cos^2\theta = 1$

7) $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

8) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$ ، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل؟ فسر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$

15) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

16) $\tan\theta = 1$

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}; 0° \le \theta \le 360°$

18) $2\sin^2\theta = 1; 90° < \theta < 270°$

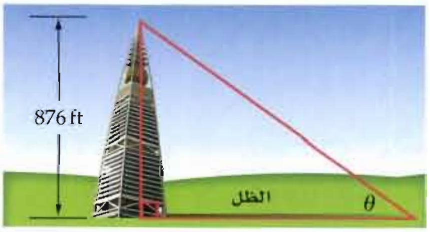
19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0$

22) $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft . أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$ ، عمق نهر خلال أحد الأيام ، حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ ، 0 تدل على الساعة الثانية عشر منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر ، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

26) $2\sin^2\theta + (\sqrt{2}-1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

27) $2\sin\theta = \sin 2\theta$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

29) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

30) **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ ، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1 ، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو $35°$ ، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًا ونقيًا أو لا .

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

ليلى	هلا
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$-\sin\theta = -\sin\theta$	$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$
$2\cos\theta = 0$	$2\cos\theta = 1$
$\cos\theta = 0$	$\cos\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = 90°, 270°$	$\theta = 60°, 300°$

32) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

34) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط ، بحيث تكون $0° \le \theta \le 360°$.

36) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\csc x = \sqrt{2}$, $\cot^2 x + 1 = 2$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-4)

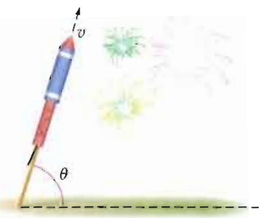
37) $\cos 165°$ 38) $\sin 22\frac{1}{2}°$ 39) $\sin\frac{7\pi}{8}$ 40) $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (الدرس 3-3)

41) $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ 42) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

43) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 44) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

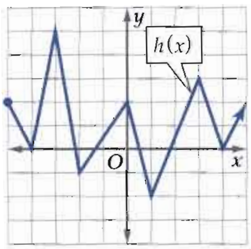
45) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي 9.8m/sec .



a) أثبت أن $\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}$ تمثل متطابقة .

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية $80°$ ، وسرعة ابتدائية مقدارها 110m/s ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه. (الدرس 3-2)

46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة)



تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ C $\frac{7\pi}{4}$ B 2π D $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A $30°$ أو $150°$ C $210°$ أو $330°$

B $60°$ أو $120°$ D $240°$ أو $300°$

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5–3 ,2–3 ,1–3)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4–3)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المفردات

المتطابقة (ص. 128)

المتطابقة المثلثية (ص. 128)

المتطابقات النسبية (ص. 128)

متطابقات المقلوب (ص. 128)

متطابقات فيثاغورس (ص. 128)

متطابقات الزاويتين المتتامتين (ص. 128)

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص. 128)

المعادلات المثلثية (ص. 149)

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية $75°$ إذا علم جيب وجيب تمام كل من الزاويتين $90°$ و $15°$.

2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على ________ .

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية $30°$.

5) تكون ________ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ مثالان على ________ .

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من $\cos 120°$, $\sin 120°$ إذا عُلم جيب، وجيب تمام كل من الزاويتين $30°$, $90°$.

9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على ________ .

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 132 - 128)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$

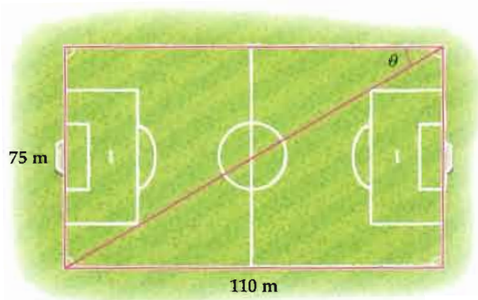
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$

14) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$، $270° < \theta < 360°$

15) **كرة قدم:** بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه أوجد جيب الزاوية θ.



بسّط كل عبارة مما يأتي:

16) $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$

17) $\tan\theta\csc\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$

19) $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ بطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ بتعويض $\frac{3}{4}$ بدلاً عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ بالتربيع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ بالطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \cot\theta$$

دليل الدراسة و المراجعة

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 136 - 133)

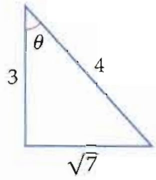
أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

20) $\tan\theta\cos\theta+\cot\theta\sin\theta=\sin\theta+\cos\theta$

21) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}=\sin\theta+\cos\theta$

22) $\sec^2\theta-1=\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

23) **هندسة:** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتحقّق من أن $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$



مثال 3

أثبت أن المعادلة $\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}=\cot\theta+\csc\theta$ تمثل متطابقة.

$\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}$ بالتبسيط

$=\cot\theta+\csc\theta$ ✓ بالتبسيط

= الطرف الأيمن

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 140 - 137)

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$

25) $\cos 15°$

26) $\sin 210°$

27) $\sin 105°$

28) $\tan 75°$

29) $\cos 105°$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

30) $\sin(\theta+90)=\cos\theta$

31) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

32) $\tan(\theta-\pi)=\tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استعمل المتطابقة $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

$$\sin 75°=\sin(30°+45°)$$
$$=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt6}{4}=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 142 - 147)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا علمت أن:

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع(b) .

مثال 5

أوجد القيمةالدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ بالطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ بالقسمة ، والتبسيط ، وانطاق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 149 - 153)

حل كل معادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ بالتحليل

$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

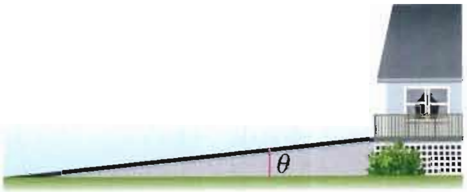
$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

دليل الدراسة و المراجعة

تطبيقات ومسائل

42) **إنشاءات:** يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل . (الدرس 1-3)

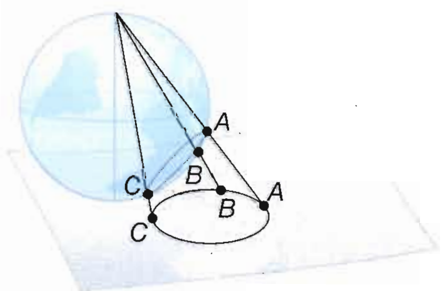


أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

43) **ضوء:** تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 1-3)

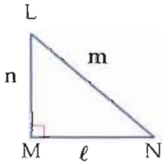
44) **خرائط:** يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة) بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 2-3)



45) **موجات:** يُسمى تداخل موجتين بنَّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين اللتين معادلتيهما :
$y_2 = 20\sin(3t + 45°)$ ، $y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ بنَّاء ؟
(الدرس 3-3)

46) **هندسة:** استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$. (الدرس 4-3)



أثبت أن كل من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة: (الدرس 4-3)

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) **مقذوفات:** إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$. أوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة ، إذا كانت $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثواني.
(الدرس 5-3)

اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$؟

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

أثبت أن كل من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$؟

A $\frac{5}{3}$ C $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ D $\frac{4}{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

5) $\cot\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270° < \theta < 360°$

6) $\tan\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$

7) $\sec\theta$، إذا كان $\csc\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$

8) $\sec\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0° < \theta < 90°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta \sec^2\theta$

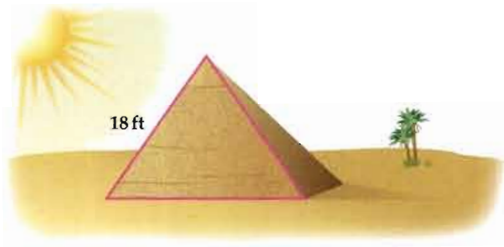
12) $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ C $1 - \sqrt{2}$

B $\sqrt{2} - 1$ D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افرض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$

16) $\sin 480°$

17) $\cos 75°$

18) $\sin 165°$

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذاكان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُلّ المعادلتين الآتيتين، حيث $0° \le \theta \le 360°$:

21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الفصل 4

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية
Conic Sections and Parametric Equations

فيما سبق:
درستُ حلَّ المعادلات المثلثية.

والآن:
- أُحَلُّ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثّلُها بيانيًا.
- أكتبُ معالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟
فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء. إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضية تشبه القطوع الناقصة، أمَا المذنَبات فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد ممَا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لكل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$
2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$
6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًّا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لهذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$
10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$
12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$
13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية لكل دالة مما يأتي:

14) $f(x) = \frac{x-2}{x+4}$
15) $h(x) = \frac{x^2-4}{x+5}$
16) $f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-3)}$
17) $g(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+5)}$
18) $h(x) = \frac{2x^2-5x-12}{x^2+4x}$
19) $f(x) = \frac{2x^2-13x+6}{x-4}$

20) **حيوانات برية:** يمكن تمثيل عدد الغزلان $D(x)$ بعد x سنة التي تعيش في محمية للحيوانات البرية بالدالة $D(x) = \frac{12x+50}{0.02x+4}$. حدِّد أكبر عدد لهذه الغزلان التي يمكن أن تعيش في المحمية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية (transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًّا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

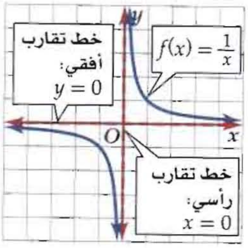
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

1) أوجد نصف معامل x؛ نصف b.
2) ربِّع الناتج في الخطوة (1).
3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $ax^2 + b$ واطرحه منها.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



4-1

القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أحللُ معادلات قطوع مكافئة، وأمثلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات:

القطع المخروطي
conic section

المحل الهندسي
locus

القطع المكافئ
parabola

البؤرة
focus

الدليل
directrix

محور التماثل
axis of symmetry

الرأس
vertex

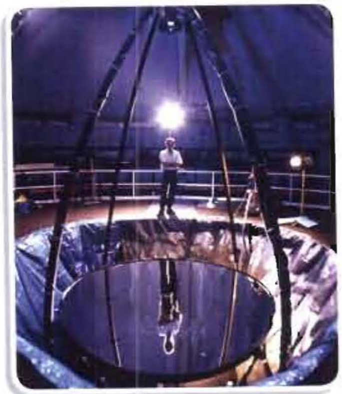
الوتر البؤري
latus rectum

www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

النقاط المستوية تذكر أن النقاط المستوية هي النقاط التي تقع في المستوى نفسه.

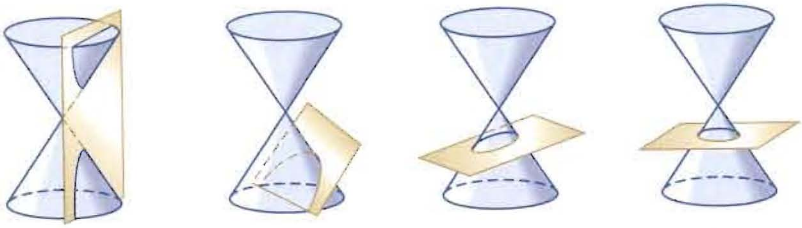
لماذا؟



استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

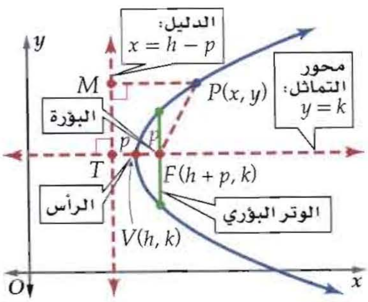
تحليل القطوع المخروطية وتمثيلها بيانيًا: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.



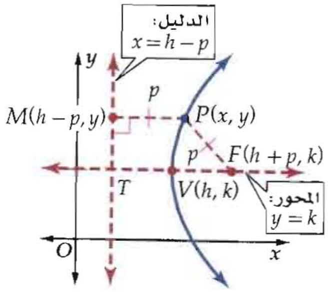
الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

المحل الهندسي هو مجموعة النقاط التي تحقّق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسّمى **البؤرة** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمّى **الدليل**.



والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتسمّى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ كمحل هندسي، لإيجاد المعادلة العامة للقطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل، أو إلى اليمين أو اليسار.



افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+p, k)$، حيث $FV = p$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = p$ فإن $VT = p$.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h-p, y)$، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$[x-(h+p)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-p)]^2+0^2$$ بتربيع الطرفين

$$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$$ بفك الأقواس

$$x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$$ بفك الأقواس

$$(y-k)^2 = 4xp-4hp$$ بالتبسيط

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$ بالتحليل

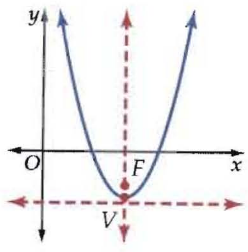
قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع
ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا إلى اليمين أو اليسار.

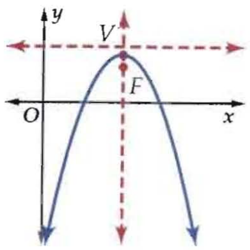
أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4p(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $p \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, p خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

مفهوم أساسي — خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$



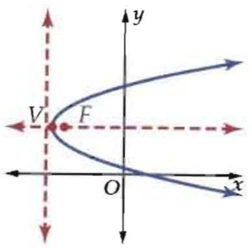
$p > 0$



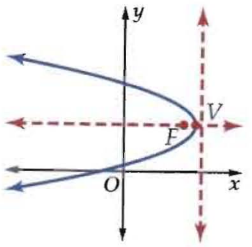
$p < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+p)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k-p$
طول الوتر البؤري:	$\lvert 4p \rvert$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$



$p > 0$



$p < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+p, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h-p$
طول الوتر البؤري:	$\lvert 4p \rvert$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

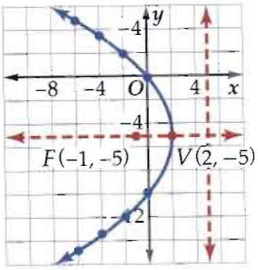
مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح. وبما أن $4p = -12$ فإن $p = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, p لتحديد **خصائص** القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h+p, k)$	
الدليل:	$x = 5$	$x = h - p$	
محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$	
طول الوتر البؤري:	12	$\lvert 4p \rvert$	

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



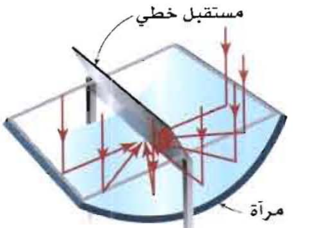
تحقق من فهمك

1A) $8(y+3) = (x-4)^2$

1B) $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية: **يتكون مجمّع شمسي من مرآة على شكل قطع مكافئ تعمل على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يمر في بؤرة القطع. ويمكن تمثيل المقطع العرضي للمرآة بالمعادلة $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار. أين يقع المستقبل الخطي في هذا المقطع؟**



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و p موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى الأعلى وتقع البؤرة عند $(h, k+p)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4p = 3.04$ فإن $p = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0+0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل **المقطع العرضي** هو $(0, 0.76)$.
فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل التلسكوب الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y-6)$ ، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فما أقصر مسافة بين سطح مرآة الزئبق وآلة التصوير؟

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ المعادلة الأصلية

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$ بإخراج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$ بإكمال المربع

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$ $\quad -\frac{1}{4}(-36) = 9$

$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$ بالتحليل

$-4(y - 15) = (x - 6)^2$ الصورة القياسية للقطع المكافئ

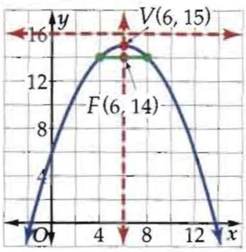
بما أن الحد التربيعي هو x و $p = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ $\quad (h, k)$ $\qquad$ الدليل: $y = 16$ $\quad y = k - p$

البؤرة: $(6, 14)$ $\quad (h, k + p)$ $\qquad$ محور التماثل: $x = 6$ $\quad x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $\quad |4p|$

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان بالإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًا. البؤرة هي $(h + p, k)$، لذا فإن قيمة p هي $3 - 1 = 2$. وبما أن p موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, p, k.

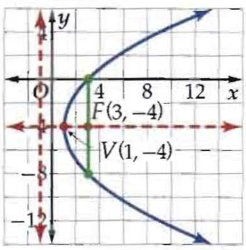
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ الصورة القياسية

$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$ $\quad p = 2, h = 1, k = -4$

$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$ بالتبسيط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثّل بيانيًا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

الاتجاه إذا اشترك الرأس والبؤرة في بالإحداثي x، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

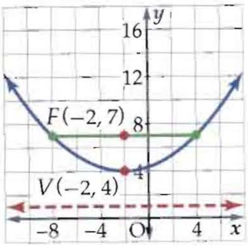
بما أن الدليل مستقيم أفقيًا فإن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد p.

$y = k - p$	معادلة الدليل
$1 = 4 - p$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -p$	بطرح 4 من الطرفين.
$3 = p$	بقسمة كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, p في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, p = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بالتبسيط

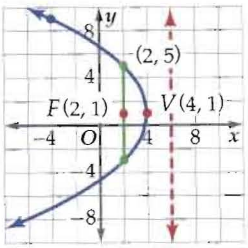


طول الوتر البؤري يساوي $|4p| = |4 \times 3| = 12$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، والبؤرة هي $(h + p, k) = (2, 1)$ والرأس (h, k) فإن الرأس هو $(2 - p, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد p.

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4p[2 - (2 - p)]$	$h = 2 - p, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4p(p)$	بالتبسيط
$4 = p^2$	بالتبسيط
$\pm 2 = p$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة p يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $p = -2$. والرأس هو $(4, 1)$.

$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$

طول الوتر البؤري يساوي $|4p| = |4 \times (-2)| = 8$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

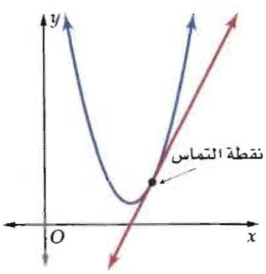
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماس لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



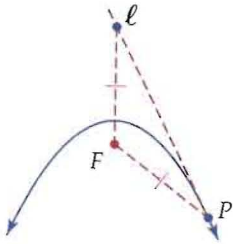
إرشادات للدراسة

الدليل
اتجاه الدليل معاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

مفهوم أساسي — مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P هو أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال 5 — كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

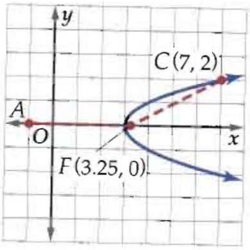
اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $C(7, 2)$.

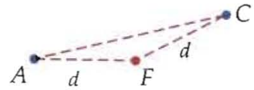
المنحنى مفتوح أفقيًا، حدد الرأس والبؤرة.

$$x = y^2 + 3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$1(x - 3) = (y - 0)^2 \quad \text{الصورة القياسية}$$

بما أن $4p = 1$ فإن $p = 0.25$. الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$. كما يظهر في الشكلين الآتيين فإننا نحتاج إلى تحديد d ، وهي المسافة بين البؤرة F ، ونقطة التماس C .





وتمثل d طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2} \quad (x_2, y_2) = (7, 2) \text{ و } (x_1, y_1) = (3.25, 0)$$

$$= 4.25 \quad \text{بالتبسيط}$$

استعمل d لتجد النقطة A وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل.

$A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

تقع النقطتان A, C على مماس منحنى القطع المكافئ. أوجد معادلة هذا المماس.

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4} \quad \text{صيغة الميل}$$

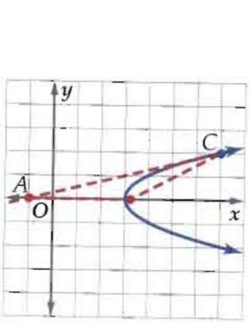
$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7) \quad m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{بجمع 2 إلى الطرفين}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ **عند** النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1



الشكل 4.1.1

✓ تحقق من فهمك

(5A $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

(5B $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$

2) $(x+1)^2 = -12(y-6)$

3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$

4) $-40(x+4) = (y-9)^2$

5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$

6) $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) **لوح تزلّج:** صمم بدر لوح تزلّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج من أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّله منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$

10) $y^2 + 33 = -8x - 23$

11) $3x^2 + 72 = -72y$

12) $60x - 80 = 3y^2 + 100$

13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$

14) $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15) البؤرة $(-7, -9)$ والرأس $(-4, -9)$

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

17) البؤرة $(-1, 2)$ والرأس $(-1, -4)$

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

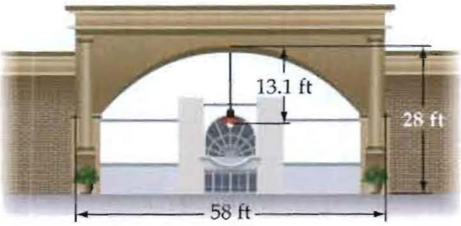
19) البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\,;(-5, -5)$

25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\,;(24, 2)$

26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\,;(0, 14)$

27) $-4x = (y+5)^2;(0, -5)$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

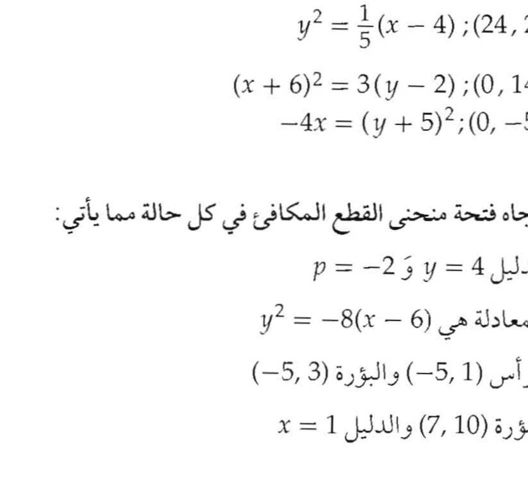
28) الدليل $y = 4$ و $p = -2$

29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل **قطع** مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

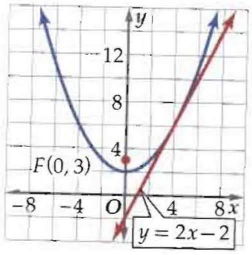


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثّل المحور x.

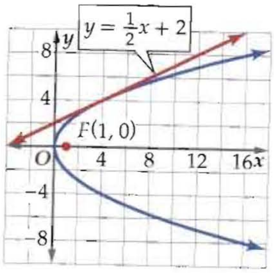
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، ويمس المستقيم المعطى منحناه في كل مما يأتي:

(33



(34



(35 **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ **ii)** $y^2 = 8(x-2)$ **iii)** $y^2 = 16(x-2)$

b) **بيانيًا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في فرع a بيانيًا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

d) **تحليليًا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

e) **تحليليًا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:

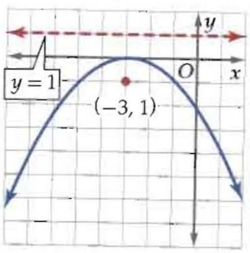
$x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$

ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًا.

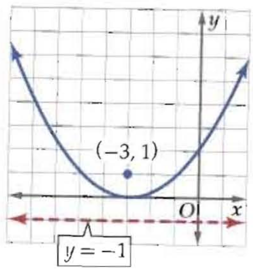
مسائل مهارات التفكير العليا

(36 **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

صفية



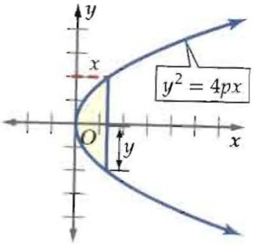
ميمونة



(37 **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

(38 **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسّر تبريرك.

(39 **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وارتفاعه 3 وحدات.



(40 **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أُعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-3)

(41 $\log_{16} 4$ **(42** $\log_4 16^x$ **(43** $\log_3 27^x$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (الدرسان 5-2, 2-2)

(44 $8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(45 $\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$

(46 $\log_3 x \leq -3$

(47 أوجد كل مما يأتي إذا كان: (الدرس 1-1)

$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$

b) $h(6x)$

c) $h(10-2c)$

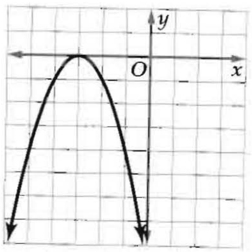
(48 إذا كان $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$، فأوجد $\sin\theta + \cos\theta$، حيث θ زاوية في الربع الأول. (الدرس 1-3)

تدريب على اختبار

(49 إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

F $x^{-\frac{1}{4}}$ **G** $\sqrt{x^3}$ **H** $x^{\frac{3}{4}}$ **J** $\sqrt{x^5}$

(50 ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y = x$

C $y = |x|$

B $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

4-2

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلُهما بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات:

القطع الناقص
ellipse

البؤرتان
foci

المحور الأكبر
major axis

المركز
center

المحور الأصغر
minor axis

الرأسان
vertices

الرأسان المرافقان
co-vertices

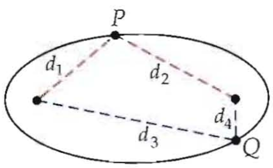
الاختلاف المركزي
eccentricity

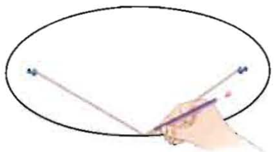
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

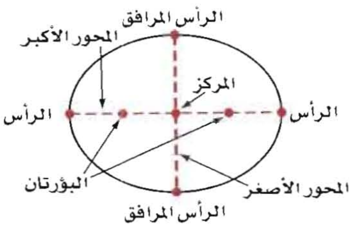
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكل قطع ناقص، بحيث تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط مستوية يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**. و لتوضيح هذا المفهوم تخيل وجود خيط مربوط من طرفيه عند البؤرتين، حيث يمكنك أن ترسم قطعًا ناقصًا باستعمال قلم على أن يبقى الخيط مشدودًا. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

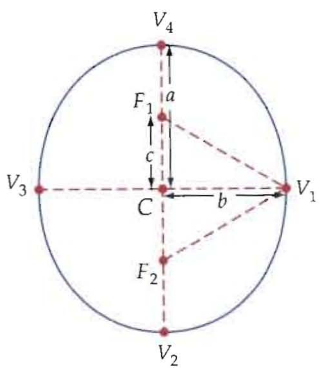




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر**، وتسمى نقطة منتصف المحور **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، ومتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. تُسّمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، وتسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.

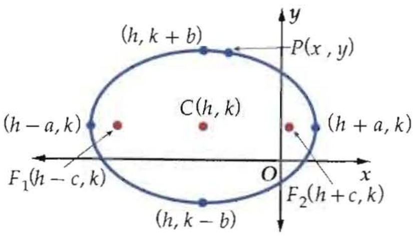


بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ حسب نظرية التطابق ساق–ساق في المثلث القائم الزاوية فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1 ، V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_2F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_4F_1$	$V_2F_2 = V_4F_1$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2V_4$	$V_2F_1 + V_4F_1 = V_2V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_2V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بالتبسيط
$V_1F_1 = a$	بالقسمة

بما أنّ $V_1F_1 = a$ وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $b^2 + c^2 = a^2$ حسب نظرية فيثاغورس.

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$ تعريف القطع الناقص

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$ صيغة المسافة

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=2a$$ الخاصية التجميعية

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$ بالطرح

$$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$ بتربيع الطرفين

$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$ بالتبسيط

$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$ بقسمة كلا الطرفين على 4

$$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$ بتربيع الطرفين

$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$ خاصية التوزيع

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$ بالتبسيط

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$ $a^2 - c^2 = b^2$

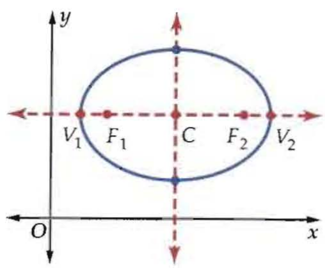
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ بقسمة الطرفين على a^2b^2

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

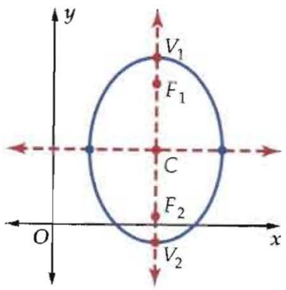
المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2k$

المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2h$

العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2h$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2k$

العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

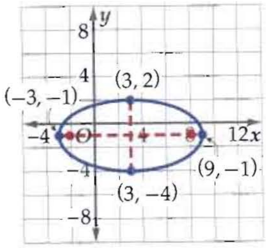
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث $h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(-3, -1)$ و $(9, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, -4)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$	$y=k$
المحور الأصغر:	$x=3$	$x=h$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

b) $4x^2+y^2-24x+4y+24=0$

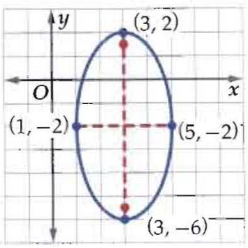
اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

$4x^2+y^2-24x+4y+24=0$	المعادلة الأصلية
$(4x^2-24x)+(y^2+4y)=-24$	بتجميع الحدود المتشابهة
$4(x^2-6x)+(y^2+4y)=-24$	بالتحليل
$4(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-24+4(9)+4$	بإكمال المربعين
$4(x-3)^2+(y+2)^2=16$	بالتحليل والتبسيط
$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$	بقسمة الطرفين على 16

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية حيث $h=3, k=-2, a=\sqrt{16}=4, b=\sqrt{4}=2, c=2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, -6)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(5, -2)$ و $(1, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x=3$	$x=h$
المحور الأصغر:	$y=-2$	$y=k$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

1B) $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

إرشادات للدراسة

المحور الأكبر

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(-6, 2)$, $(-6, -8)$، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a, b.

نصف طول المحور الأكبر

$$a = \frac{2-(-8)}{2} = 5$$

نصف طول المحور الأصغر

$$b = \frac{-3-(-9)}{2} = 3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر.

$$(h, k) = \left(\frac{-6+(-6)}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$= (-6, -3) \quad \text{بالتبسيط}$$

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

b) الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$a = 5 \quad \text{بالتبسيط}$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2} \quad \text{قانون المسافة}$$

$$c = 3 \quad \text{بالتبسيط}$$

أوجد قيمة b.

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad a, b, c \text{ العلاقة بين}$$

$$3^2 = 5^2 - b^2 \quad a = 5, c = 3$$

$$b = 4 \quad \text{بالتبسيط}$$

وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$= (1, 4) \quad \text{بالتبسيط}$$

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .

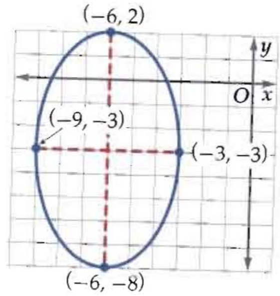
✓ تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

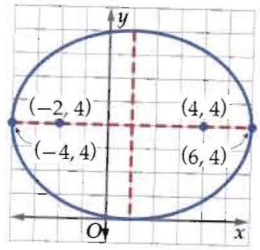
2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

إرشادات للدراسة

الاتجاه إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.



الشكل 4.2.1



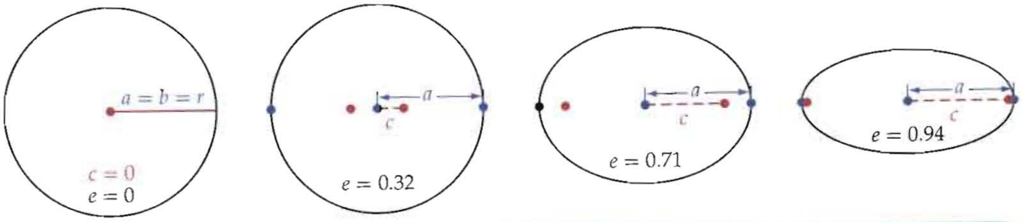
الشكل 4.2.2

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a. و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي — الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى فإن كلًّا من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 100 - 9$ $\quad a^2 = 100, b^2 = 9$

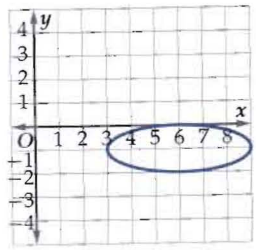
$c = \sqrt{91}$ بالتبسيط

نستعمل قيمتي a , c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $\quad a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

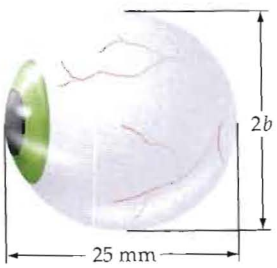
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $\quad e = 0.28, a = 12.5$

$c = 3.5$ بالضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $\quad c = 3.5, a = 12.5$

$b = 12$ بالحل

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون وجراحتها.

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad a = b \text{ عندما } e = 0$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad a^2 \text{ بضرب كلا الطرفين في}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{نصف قطر الدائرة } a$$

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ $\quad (h, k) = (-1, 2),\ r = \frac{8}{2} = 4$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(7, 6)$, $(-1, -8)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$(h, k) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2}\right)$ $\quad (x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (-1, -8)$

$= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$ بالجمع

$= (3, -1)$ بالتبسيط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-1 - 6)^2}$ $\quad (x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (3, -1)$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$ بالطرح

$= \sqrt{65}$ بالتبسيط

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2 = 65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 65$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(-3, 5)$, $(1, -3)$.

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

3) $x^2+9y^2-14x+36y+49=0$

4) $4x^2+y^2-64x-12y+276=0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5) الرأسان $(13, -3)$, $(-7, -3)$، والبؤرتان $(11, -3)$, $(-5, -3)$

6) الرأسان $(4, -9)$, $(4, 3)$، وطول المحور الأصغر 8 وحدات

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2)$, $(-13, 2)$، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0)$, $(-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3)$, $(-6, 9)$، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7)$, $(-13, 7)$، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

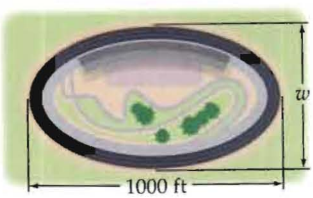
10) $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$

11) $\frac{(x+6)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$

12) $\frac{(x-8)^2}{14}+\frac{(y+3)^2}{57}=1$

13) $\frac{(x+8)^2}{27}+\frac{(y-7)^2}{33}=1$

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$

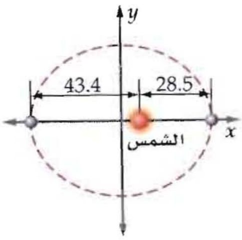
19) $(-4, -10)$, $(4, -10)$

20) $(5, -7)$, $(-2, -9)$

21) $(-6, 4)$, $(4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، إذا كان قطر الشمس 870000 ميل تقريبًا، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

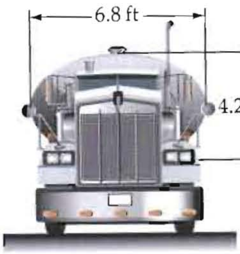
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

25) $9y^2-18y+25x^2+100x-116=0$

26) $65x^2+16y^2+130x-975=0$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي للخزان.

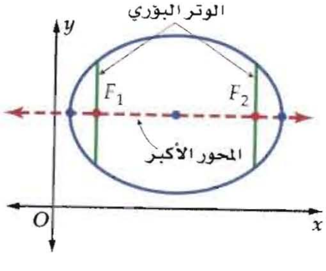
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0)$, $(-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

29) الرأسان المرافقان $(1, 6)$, $(1, 0)$، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4+2\sqrt{5})$، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(2, 3)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

32) **هندسة:** تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3,\ 2x + 3y = 7,\ 4x - 7y = 27$ لتشكل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

34) $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

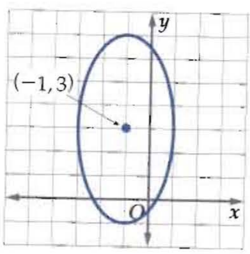
35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

36) $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

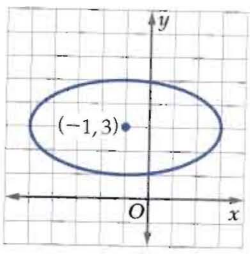
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلان أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد

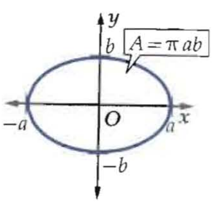


ياسر



38) **تبرير:** حدّد فيما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1,\ \frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$، حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضِّح إجابتك.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:



39) $b + a = 12,\ A = 35\pi$

40) $a - b = 5,\ A = 24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري وآخر بياني.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b.

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-1)

43) $y = 3x^2 - 24x + 50$

44) $y = -2x^2 + 5x - 10$

45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حُل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$. (الدرس 3-3)

46) $\sin\theta = \cos\theta$

47) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$

48) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدِّد مجالها.

49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

50) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

52) مثّل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانيًّا وحدِّد مداها. (الدرس 2-1)

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة B مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة A نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من B للدائرة، فما المسافة من B إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم الهدف؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$

C $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

D $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

4-3

القطوع الزائدة
Hyperbolas

فيما سبق:
درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًا.

والآن:
- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:
القطع الزائد
hyperbola

المحور القاطع
transverse axis

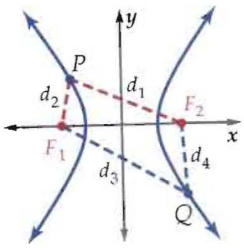
المحور المرافق
conjugate axis

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل الصاعقة؛ ليتم بعد ذلك تحديد موقعها باستعمال نظام تحديد المواقع العالمي GPS . فإذا رصد المجسّان صاعقة عند زمنين متقاربين، فإنهما يولدان نقطة على قطع زائد، بحيث يقع المجسان في البؤرتين، ويتناسب بعدها عن أي من المجسين طرديًا مع فرق زمن وصول الإشارة إليه.

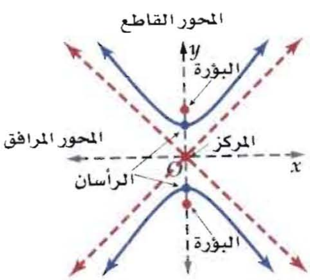
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

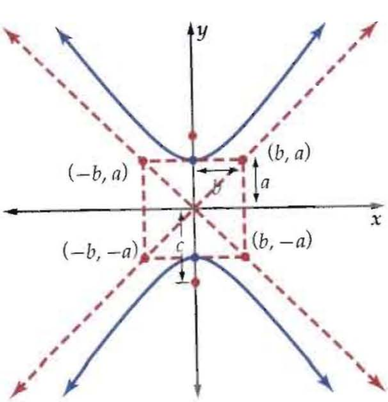


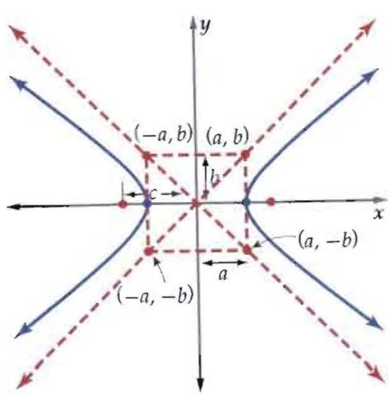
يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، ومركز القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، والرأسان هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** ويمر بالرأسين، و**المحور المرافق** وهو عمودي على المحور القاطع ويمر بالمركز.

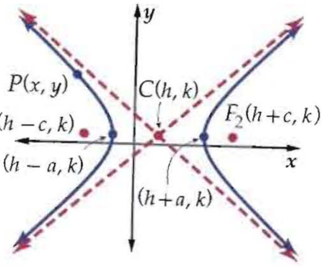


لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، بحيث $c^2 = a^2 + b^2$، وتختلف عمّا في القطع الناقص. بالإضافة إلى أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد والبؤرتين هو $2a$.





يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.



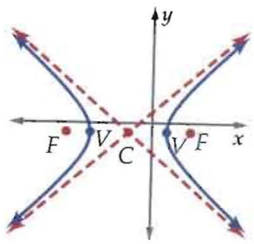
$PF_1 - PF_2 = 2a$	تعريف القطع الزائد
$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$	صيغة المسافة
$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$	الخاصية التجميعية
$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$	بالجمع
$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2+4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$	بتربيع الطرفين
$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2-4c(x-h)$	بالتبسيط
$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2+c(x-h)$	بقسمة الطرفين على -4.
$a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2] = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$	بتربيع الطرفين
$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2 = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$	الخاصية التوزيعية
$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^4-a^2c^2$	بالتبسيط
$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$	الخاصية التوزيعية
$-b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$	$a^2-c^2=-b^2$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	بقسمة الطرفين على $a^2(-b^2)$.

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًّا، وهي $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًّا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

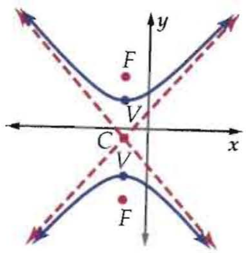
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه:	المحور القاطع أفقي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع:	$y = k$
المحور المرافق:	$x = h$
خطا التقارب:	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه:	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$x = h$
المحور المرافق:	$y = k$
خطا التقارب:	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

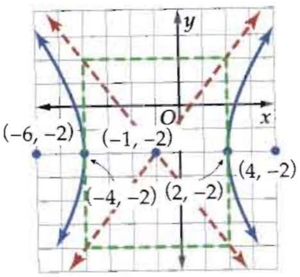
$$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2), (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2), (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y + 2 = \frac{4}{3}(x+1), y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1),$ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ومركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه $2c = 10$.

ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.

✓ تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد **خصائص** القطع.

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$	المعادلة الأصلية
$(25x^2 + 100x) - (16y^2 - 96y) = 444$	بتجميع الحدود المتشابهة
$25(x^2 + 4x) - 16(y^2 - 6y) = 444$	بالتحليل
$25(x^2 + 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	بإكمال المربع
$25(x+2)^2 - 16(y-3)^2 = 400$	بالتحليل والتبسيط
$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$	بقسمة كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

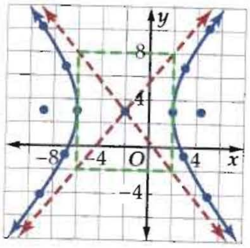
$$h = -2, k = 3, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4.$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

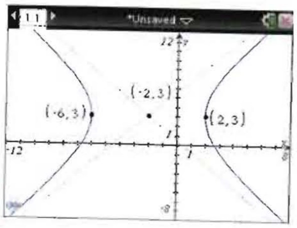
إرشادات للدراسة

الصورة القياسية تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x .
المركز:	$(-2, 3)$	(h, k)
الرأسان:	$(-6, 3), (2, 3)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(-8.4, 3), (4.4, 3)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y - 3 = -\frac{5}{4}(x+2), y - 3 = \frac{5}{4}(x+2)$ $y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}, y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$



عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ومركزه $(-2, 3)$ وأحد بعديه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كل من قطريه $2c = 12.8$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين إمتداد قطريه.



التحقق: حل المعادلة بالنسبة لـ y لتحصل على دالتين في x ،

$$y = 3 + \sqrt{-25 + \frac{25(x+2)^2}{16}}, y = 3 - \sqrt{-25 + \frac{25(x+2)^2}{16}}$$

مثّل المعادلتين باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire بيانيًّا على الشاشة نفسها مع خطي التقارب، وقارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط.

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (370-415 قبل الميلاد) كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولوينوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طور هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

تحقق من فهمك

2A) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 68$

2B) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

عندما تمثل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين، ويمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلومات كافية.

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا علمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$ ، $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$ ، $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد الرأس وقيم a, b, c .

المركز: $(-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين

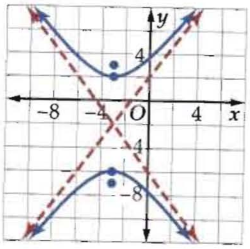
$a = 4$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$c = 5$ المسافة بين أي من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 . لذا، معادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12, y = -2x + 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $(-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

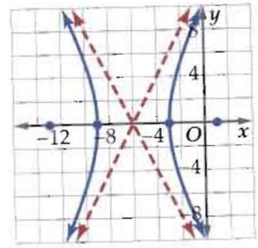
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $a = 3$

$b = 6$ بالتبسيط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B) البؤرتان $(-2, 12)$, $(-2, 2)$ ، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}, y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

وكذلك يمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لجميع القطوع المخروطية. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1، لكن قيمته أكبر من 1 دائمًا للقطع الزائد.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 48 + 36$ $a^2 = 48, b^2 = 36$

$c = \sqrt{84}$ بالتبسيط

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$ $a = \sqrt{48}$, $c = \sqrt{84}$

≈ 1.32 بالتبسيط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

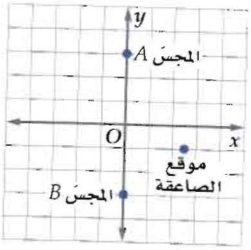
مثال 5 من واقع الحياة — تطبيقات على القطع الزائد

أرصاد: وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B. ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B.

🌍 **الربط مع الحياة**

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



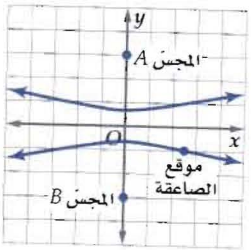
حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B، فإن $2a = 1.5$، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b.

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{العلاقة بين } a, b, c$$

$$3^2 = 0.75^2 + b^2 \qquad c = 3,\ a = 0.75$$

$$8.4375 = b^2 \qquad \text{بالتبسيط}$$



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة وأوجد y.

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1 \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1 \qquad x = 2.5$$

$$y \approx -0.99 \qquad \text{بالحل بالنسبة لـ } y$$

قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

☑ تحقق من فهمك

5) ملاحة بحرية: تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا.

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد إذا كانت المحطتان تقعان عند النقطتين $(100, 0)$، $(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{21} = 1$

4) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{14} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$

6) $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1)

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه، ومثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2)

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13) البؤرتان $(-1, 9)$, $(-1, -7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(7, 5)$, $(-5, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$, $(11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 9)$, $(-1, 3)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

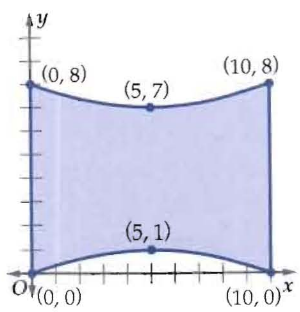
16) البؤرتان $(9, 7)$, $(-17, 7)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$ ، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$ ، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(2, 10)$, $(2, -2)$ ، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(13, -2)$, $(-1, -2)$.

20) **هندسة معمارية:** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 15 ft . فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

22) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

24) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

27) **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

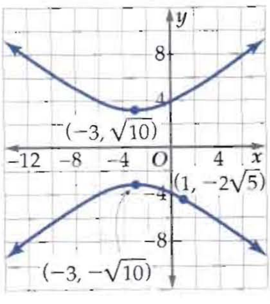
28) **هندسة معمارية:** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m ، فما معادلة القطع الزائد؟

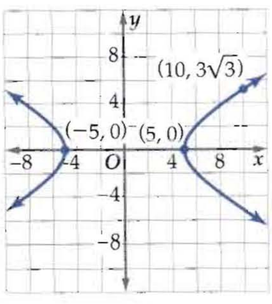
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)

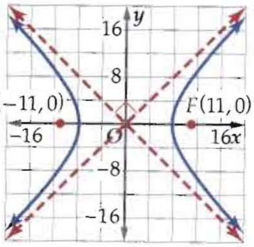


30)



31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec ، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec ، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

32) يتشكل القطع الزائد المتساوي الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًا أدناه.



33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًا:** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه .

b) **تحليليًا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

c) **تحليليًا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

d) **بيانيًا:** مثل منحنيي القطعين.

e) **لفظيًا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

35) **تبرير:** افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a) $rs = 0$ b) $rs > 0$

c) $r = s$ d) $rs < 0$

36) **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

37) **تحدٍّ:** قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$, $F_2(0, -9)$ ويمر بالنقطة P . يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2 . اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

38) **برهان:** يتشكل القطع الزائد المتساوي الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متساوي الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) **اكتب:** صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما يعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 2-4)

40) $(x-8)^2 + \frac{(y-2)^2}{81} = 1$

41) $\frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1$

42) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

43) **مقذوفات:** قذفت كرة رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية متجهة 80 ft/s بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 1-4)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ . (الدرس 5-3)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

F $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

H $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

G $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

J $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

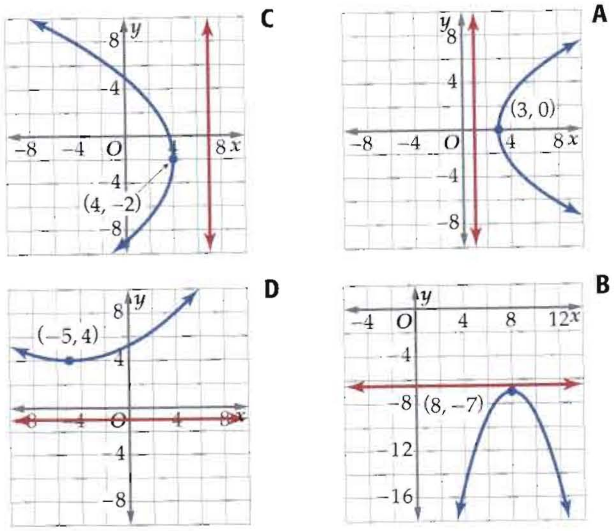
48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 4-1)

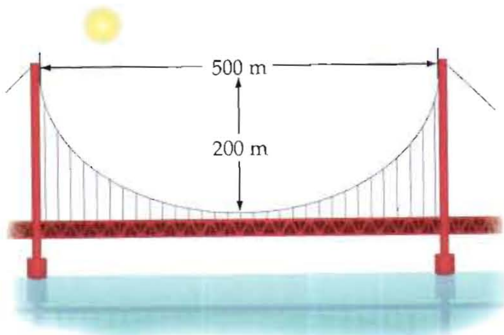
1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

2) البؤرة $(-5, -7)$، الرأس $(1, -7)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 4-1)



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 4-1)



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-2)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

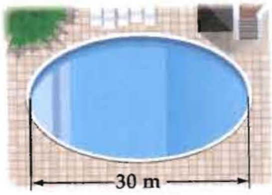
7) الرأسان $(-3, -3)$, $(-3, 9)$ ، والبؤرتان $(-3, -1)$, $(-3, 7)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$, $(3, 1)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$, $(1, -1)$ ، والرأسان المرافقان $(4, -7)$, $(-2, -7)$.

10) الرأسان $(-9, 8)$, $(5, 8)$ ، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

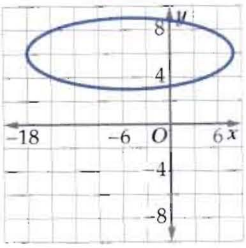
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68 . (الدرس 4-2)



a) ما أكبر عرض للبركة؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل اختلافًا مركزيًّا ممكنًا للقطع الناقص الممثل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 4-2)



A 0

B $\frac{1}{4}$

C 1

D $\frac{9}{5}$

مثّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

13) $\frac{x^2}{81} - \frac{(y+7)^2}{81} = 1$

14) $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 4-3)

15) الرأسان $(0, -5)$, $(0, 5)$ وطول المحور المرافق 6 وحدات.

16) البؤرتان $(-6, 0)$, $(10, 0)$ وطول المحور القاطع 4 وحدات.

17) الرأسان $(11, 0)$, $(-11, 0)$ والبؤرتان $(14, 0)$, $(-14, 0)$.

18) البؤرتان $(5, -9)$, $(5, 7)$ وطول المحور القاطع 10 وحدات.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها
Identifying Conic Sections and Rotations

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.
- أجد دوران المحورين لكتابة معادلات قطوع مخروطية بعد دورانها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

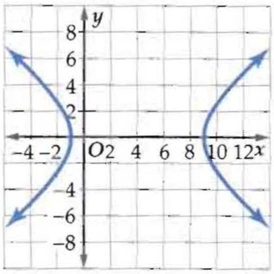
تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثل مركز الشمس بؤرة القطع.

الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع.

مثال 1

اكتب كل من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًّا:

a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$



المعادلة الأصلية $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

بفصل الحدود $16(x^2 - 8x + ■) - 25y^2 = 144 + 16(■)$

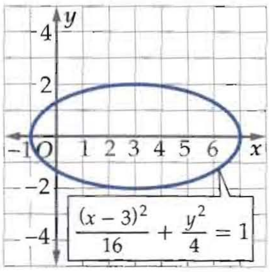
بإكمال المربع $16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$

مربع كامل $16(x - 4)^2 \pm\mp 25y^2 = 400$

بقسمة كل حدّ على 400 $\dfrac{(x-4)^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

المنحنى قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$



المعادلة الأصلية $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

بتجميع الحدود المتشابهة $(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$

بإكمال المربع $(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$

بالتحليل والتبسيط $(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$

بقسمة كلا الطرفين على 16 $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

بما أنّ المعادلة على الصورة $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ على الصورة القياسية. فعندما يكون الحد الذي يتضمّن xy موجودًا أي أن $(B \neq 0)$، يمكنك استعمال المميز B^2-4AC لتحديد نوع القطع وهو مميز للمعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

مراجعة المفردات

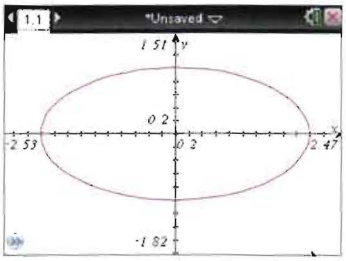
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية هو b^2-4ac.

مفهوم أساسي تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2-4AC=0$
قطع ناقص	$B^2-4AC<0,\ A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2-4AC<0,\ B=0,\ A=C$
قطع زائد	$B^2-4AC>0$

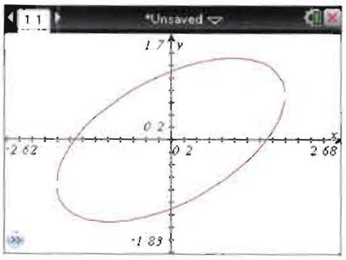
يكون القطع أفقيًا أو رأسيًا عندما $B=0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًا ولا رأسيًا.

قطع ناقص أفقي: $B=0$



$x^2+4y^2-4=0$

قطع ناقص ليس رأسيًا ولا أفقيًا : $B \neq 0$



$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

مثال 2 تحليل معادلة القطع المخروطي

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2+4x^2-3xy+4x-5y-8=0$

$A=4,\ B=-3,\ C=1$

المميز يساوي $(-3)^2-4(4)(1)=-7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثّل قطع ناقص.

b) $3x^2-6x+4y-5y^2+2xy-4=0$

$A=3,\ B=2,\ C=-5$

المميز يساوي $2^2-4(3)(-5)=64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2-8x+6y-14=0$

$A=0,\ B=0,\ C=4$

المميز يساوي $0^2-4(0)(4)=0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثّل قطع مكافئ.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

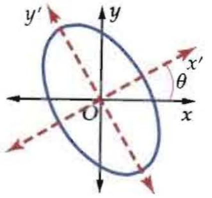
دوران القطوع المخروطية: تعلم أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسيًّا أو أفقيًّا فإن محوريه يوازيان المحورين الإحداثيين، وذلك عندما لا تحتوي معادلات هذه القطوع على الحد xy.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ محورا القطع المخروطي موازيان للمحورين الإحداثيين.

ستتعامل في هذا الدرس مع قطوع مخروطية دوِّرت محاورها بحيث لا تكون موازية للمحورين الإحداثيين، وتكون $B \neq 0$ في الصورة العامة لهذه القطوع الدورانية، لذا يظهر الحد xy في المعادلة.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ دُوِّر محورا القطع المخروطي على المحورين الإحداثيين.

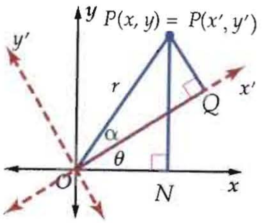
إذا حذف الحد xy فيمكن كتابة معادلة القطع المخروطي على الصورة القياسية بإكمال المربع. ولحذف هذا الحد نقوم بتدوير المحورين الإحداثيين حتى يصبحا موازيين لمحوري القطع المخروطي.



عندما يدوّر المحوران الإحداثيان بزاوية قياسها θ كما هو موضح تبقى نقطة الأصل ثابتة ويتشكّل محوران جديدان هما x', y' و فيما يأتي الصورة العامة لمعادلة القطع المخروطي في المستوى الإحداثي الجديد $x'y'$

$$A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$ معادلة القطع المخروطي في المستوى $x'y'$

يمكن استعمال حساب المثلثات لاشتقاق علاقات تربط بين النقطة $P(x, y)$ في مستوى xy والنقطة $P(x', y')$ في المستوى $x'y'$.



في المثلث PNO المجاور لاحظ أن:
$OP = r, ON = x, PN = y, m\angle NOP = \alpha + \theta$.
يمكنك باستعمال $\triangle PNO$ التوصل إلى العلاقات الآتية:

$x = r\cos(\alpha + \theta)$ نسبة جيب التمام

$= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$ متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

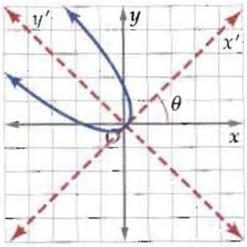
$y = r\sin(\alpha + \theta)$ نسبة الجيب

$= r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta$ متطابقة الجيب لمجموع زاويتين

وباستعمال المثلث القائم الزاوية POQ، حيث $OP = r, OQ = x', PQ = y', m\angle QOP = \alpha$ يمكنك التوصل إلى العلاقتين $x' = r\cos\alpha, y' = r\sin\alpha$. وبالتعويض في العلاقات السابقة ينتج أن

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad \text{و} \quad y = y'\cos\theta + x'\sin\theta$$

مفهوم أساسي　دوران محاور القطوع المخروطية



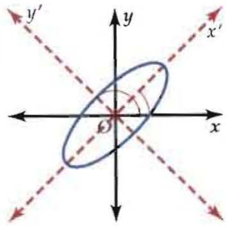
يمكن إعادة كتابة المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy على الصورة $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$ ، بزاوية دوران قياسها θ ، وذلك باستعمال صيغتي الدوران الآتيين:

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad , \quad x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

إرشادات للدراسة

زاوية الدوران

زاوية الدوران θ هي زاوية حادة؛ وذلك عائد إلى حقيقة أن المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. فمثلاً يمكن تدوير المستوى في الشكل أدناه $123°$ غير أن الدوران $33°$ هي الزاوية التي تحدد المحورين $x'y'$.



مثال 3　كتابة معادلة في مستوى $x'y'$

استعمل $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 35 = 0$ في المستوى $x'y'$ ، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

أوجد معادلتي x , y .

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \qquad\qquad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

صيغتا دوران x , y

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \qquad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

عوض في المعادلة الأصلية .

$$4x^2 \quad + \quad 6xy \quad + \quad 4y^2 \quad - 35 = 0$$

$$4\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 35 = 0$$

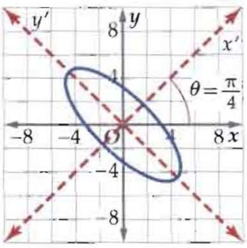
$$\frac{4[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{4[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} - 35 = 0$$

$$2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + 2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2 - 35 = 0$$

$$7(x')^2 + (y')^2 = 35$$

$$\frac{(x')^2}{5} + \frac{(y')^2}{35} = 1$$

فيكون القطع المخروطي قطعًا ناقصًا. والصورة القياسية له في مستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{5} + \frac{(y')^2}{35} = 1$ كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

3) استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$. ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

يمكن استعمال علاقتين أخريين تربطان x' , y' بـ x , y ؛ لإيجاد معادلة في مستوى xy لقطع مخروطي بعد دورانه.

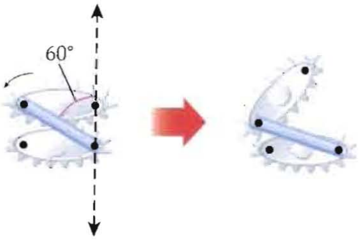
مفهوم أساسي دوران محاور القطوع المخروطية

إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي في المستوى $x'y'$ بزاوية دوران قياسها θ ، فإنه يمكن إيجاد المعادلة في المستوى xy باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

مثال 4 من واقع الحياة كتابة معادلة في مستوى xy

فيزياء: يمكن استعمال تُروس السرعة والتي تأخذ شكل قطع ناقص للحصول على سرعات متغيرة. فإذا كانت معادلة ترس بعد دورانه $60°$ في المستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ ، فاكتب معادلة هذا القطع الناقص في المستوى xy .



استعمل صيغتي الدوران لِـ x', y' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في مستوى xy .

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ صيغتا الدوران لِـ x', y' $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$

$= x\cos 60° + y\sin 60°$ $\theta = 60°$ $= y\cos 60° - x\sin 60°$

$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ $\sin 60° = \frac{1}{2}, \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

عوّض هذه القيم في المعادلة الأصلية.

$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ المعادلة الأصلية

$(x')^2 + 2(y')^2 = 36$ بضرب كلا الطرفين في 36

$\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36$ بالتعويض

$\frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4} + \frac{2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 6x^2}{4} = 36$ بالتبسيط

$\frac{7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2}{4} = 36$ بتجميع الحدود المتشابهة

$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144$ بضرب كلا الطرفين في 4

$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$ بطرح 144 من كلا الطرفين

معادلة القطع الناقص في المستوى xy هي: $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت معادلة الترس بعد دوران $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$ ، فاكتب معادلة الترس في المستوى xy .

الربط مع الحياة

تعتمد سرعة الدراجة الهوائية على قطر الترس؛ فكلما قلَّ قطر الترس، زادت السرعة.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًّا : (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11) $16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام. (مثال 2)

a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي التي تمثله: (مثال 3)

13) $x^2 - y^2 = 9; \theta = \frac{\pi}{3}$

14) $xy = -8; \theta = 45°$

15) $x^2 - 8y = 0; \theta = \frac{\pi}{2}$

16) $2x^2 + 2y^2 = 8; \theta = \frac{\pi}{6}$

17) $y^2 + 8x = 0; \theta = 30°$

18) $4x^2 + 9y^2 = 36; \theta = 30°$

اكتب معادلة القطع المخروطي لكل مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ : (مثال 4)

19) $(x')^2 + 3(y')^2 = 8 ; \theta = \frac{\pi}{4}$

20) $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1 ; \theta = \frac{\pi}{4}$

21) $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1 ; \theta = \frac{\pi}{3}$

22) $(x')^2 = 8y' ; \theta = 45°$

23) $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1 ; \theta = \frac{\pi}{6}$

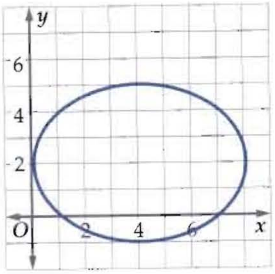
24) $4x' = (y')^2 ; \theta = 30°$

25) $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1 ; \theta = 45°$

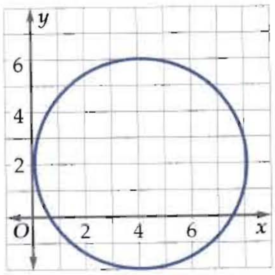
26) $(x')^2 = 5y' ; \theta = \frac{\pi}{3}$

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثل كل منها:

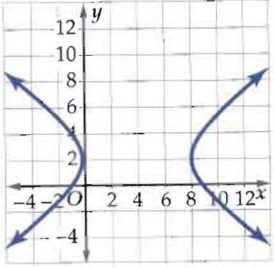
27)



28)



29)



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

30) ضوء: ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكّلًا قطعًا مخروطيًا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع، ومثّل منحناه بيانيًا.

قابل بين كل حالة في التمارين 31-34 مع المعادلة التي تمثلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

31) حاسوب: حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft.

32) لياقة: المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

33) اتصالات: موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

34) رياضة: ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

35) تمثيلات متعددة: افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًا.

d) **جبريًا:** استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص التي أوجدتها في **(b)** في المستوى $x'y'$.

e) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص الدوراني بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) تحدٍّ: بيّن أن منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ لا يتغير تحت تأثير أي دوران.

37) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا.
"عندما يكون القطع رأسيًا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

38) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثّل المعادلة قطعًا مكافئًا.

39) اكتب: اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

مراجعة تراكمية

40) فلك: افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذَنّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثل المعادلة بيانيًا. (الدرس 4-3)

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا: (الدرس 4-2)

41) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

42) $4x^2 + 8y^2 = 32$

43) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

44) فلك: أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على محور السينات. (الدرس 4-2)

حل كل معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-4)

45) $\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2$

46) $\log_9 9p + \log_9 (p + 8) = 2$

تدريب على اختبار

47) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

48) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

توسع 4-4

معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

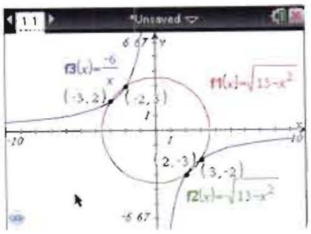
معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. تذكر أن الحاسبة البيانية TI−nspire ترسم دوالّ فقط. وعند استعمالها لحل أنظمة معادلات تتضمن معادلات قطوع مخروطية بيانيًا، فيجب أولًا كتابة المعادلات التي لا تمثل دوالّ على صورة تجمع من الدوال بدلالة y.

نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًا

حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًا:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$



الخطوة 1: اكتب كل معادلة بدلالة y.

$$y = \sqrt{13 - x^2},\ y = -\sqrt{13 - x^2},\ y = -\frac{6}{x}$$

الخطوة 2: مثّل جميع المعادلات بيانيًا على نفس الشاشة.

الخطوة 3: استعمل ميزة intersection من قائمة 7:Points & Lines لتجد نقاط التقاطع الأربع.

الحلول هي: (−3, 2), (−2, 3), (2, −3), (3, −2)

تمارين:

حلّ بيانيًا كل نظام معادلات فيما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$، $x^2 - y^2 = 3$

2) $49 = y^2 + x^2$، $x = 1$

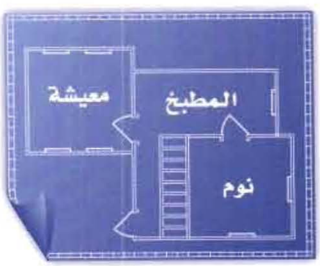
3) $x = 2 + y$، $x^2 + y^2 = 100$

4) $25 - 4x^2 = y^2$، $2x + y + 1 = 0$

5) $y^2 = 9 - 3x^2$، $x^2 = 10 - 2y^2$

6) $y = -1 - x$، $4 + x = (y - 1)^2$

7) **تحدٍّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم. المساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.



a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًا وقدّر طول كل غرفة.

يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية كذلك باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire. وقد مرّ معك في صف سابق أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًا.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

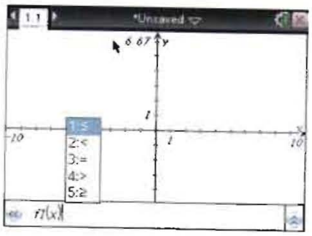
الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2, y \leq \sqrt{36 - x^2}, y \geq -\sqrt{36 - x^2}$$

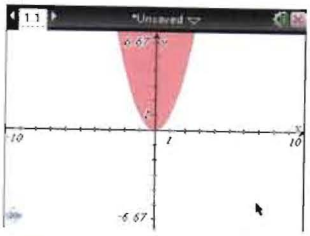
الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على (on) .

اختر من الشاشة الظاهرة 1 New Document

ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2:Add Graphs



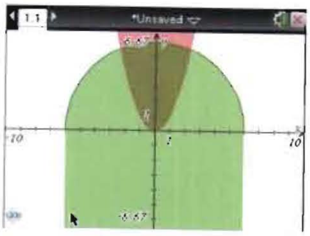
الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$ ، وذلك بالضغط على مفتاح (del) ، ثم اختر رمز التباين > مستعملًا الأسهم، فتظهر $y >$ ، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط (enter) .

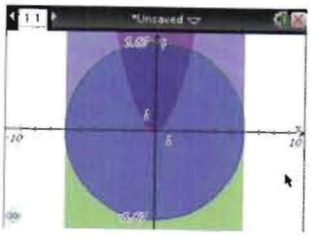


الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \leq \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح (tab) ثم المفتاح (del) ، ثم اختر رمز التباين ≤ مستعملًا الأسهم، فتظهر ≤ y، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter) ، ثم الضغط على المفتاح (tab) وتمثيل المتباينة $y \geq -\sqrt{36 - x^2}$ ، فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:

(on) 1 New Document 2:Add Graphs (del)
> x^2 (enter) (tab) (del) ≤ $\sqrt{36 - x^2}$ (enter) (tab)
(del) $\geq -\sqrt{36 - x^2}$ (enter)





لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$ ، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.
إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ ، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة $f2(x) = 7$ قم بالضغط على مفتاح (menu) ، ومنها اختر 4:Window/Zoom ثم اختر 6:Window Settings... لتمدد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7 . فمثلًا يمكن اختيار قيمة YMax: $= 10$

تمارين:

حل كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا:

(8 $2y^2 \leq 32 - 2x^2$
$x + 4 \geq y^2$

(9 $y + 5 \geq x^2$
$9y^2 \leq 36 + x^2$

(10 $x^2 + 4y^2 \leq 32$
$4x^2 + y^2 \leq 32$

4-5

المعادلات الوسيطية
Parametric Equations

فيما سبق:

درست تمثيل الحركة باستعمال دوال تربيعية.

والآن:

- أمثل المعادلات الوسيطية بيانيًا.
- أحل مسائل متعلقة بحركة المقذوفات.

المفردات:

المعادلة الوسيطية parametric equation

المتغير الوسيط parameter

اتجاه المنحنى orientation

المنحنى الوسيطي parametric curve

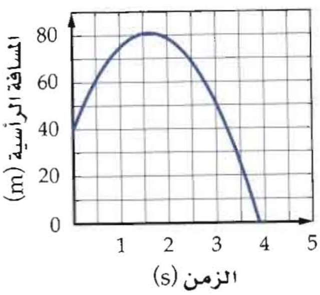
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

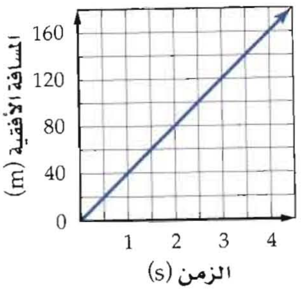
لقد استعملت الدوال التربيعية لتمثيل مسارات المقذوفات مثل كرة السلة. ويمكنك استعمال المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات وتحديد مداها وحساب قيمها.

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية: لقد مثلت في هذا الكتاب منحنيات في المستوى xy مستعملًا معادلة ذات متغيرين x, y. أما في هذا الدرس فإنك ستمثّل بعض هذه المنحنيات باستعمال معادلتين في متغير ثالث. لاحظ المنحنيات الثلاثة أدناه، يمثل كل منها ناحية مختلفة مما يحدث عندما يُقذف جسم في الهواء.

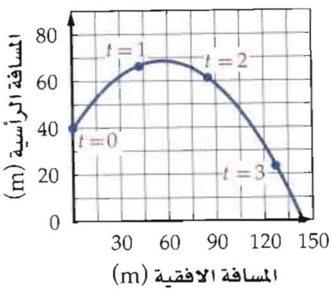
يظهر الشكل 4.5.1 المسافة الرأسية كدالة في الزمن. ويظهر الشكل 4.5.2 المسافة الأفقية على صورة دالة في الزمن، بينما يظهر الشكل 4.5.3 المسافة الرأسية على صورة دالة للمسافة الأفقية.



الشكل 4.5.1



الشكل 4.5.2



الشكل 4.5.3

تصف التمثيلات البيانية أعلاه ومعادلاتها جزءًا مما يحدث عند إطلاق قذيفة. ويمكننا استعمال **المعادلات الوسيطية** للتعبير عن موقع الجسم رأسيًا وأفقيًا. تمثّل المعادلات الآتية المنحنى المبين في الشكل 4.5.3 :

معادلة ديكارتية

$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

معادلات وسيطية

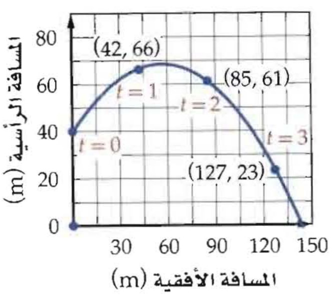
$$x = 30\sqrt{2}t \quad \text{المركبة الأفقية}$$

$$y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40 \quad \text{المركبة الرأسية}$$

يمكن تحديد موقع الجسم عند زمن معين باستعمال المعادلات الوسيطية بحساب المركبتين الأفقية والرأسية للزمن t . ومثال ذلك عندما كان الزمن $t = 0$ فإن موقع الجسم يكون عند $(0, 40)$. يسمى t **المتغير الوسيط**.

يوضّح الشكل تمثيل المنحنى على الفترة الزمنية $0 \le t \le 4$.

يُسمّى تمثيل النقاط مع ترتيب زيادة قيم t ورسم مسار المنحنى في اتجاه معين **اتجاه المنحنى**، ويُشار إليه بأسهم على المنحنى.



مفهوم أساسي — **المعادلات الوسيطية**

إذا كانت f و g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل منحنى وسيطيًا. المعادلتان:

$$x = f(t), y = g(t)$$

هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث t المتغير الوسيط و I الفترة الوسيطية.

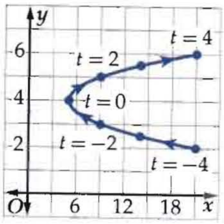
مثال 1 تمثيل منحنيات بدلالة معادلات وسيطية

مثّل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

a) $x = t^2 + 5;\ y = \frac{t}{2} + 4;\ -4 \le t \le 4$.

كوّن جدولًا من بعض قيم t في الفترة $-4 \le t \le 4$ ، ثم مثّل بيانيًا إحداثيات (x, y) الناتجة عن تعويض قيم t في المعادلتين الوسيطيتين، ثم صل بين النقاط بمنحنى.

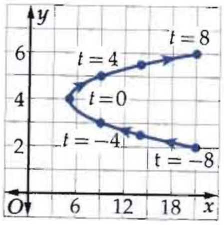
t	x	y	t	x	y
−4	21	2	1	6	4.5
−3	14	2.5	2	9	5
−2	9	3	3	14	5.5
−1	6	3.5	4	21	6
0	5	4			



تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من -4 إلى 4 .

b) $x = \frac{t^2}{4} + 5,\ y = \frac{t}{4} + 4;\ -8 \le t \le 8$.

t	x	y	t	x	y
−8	21	2	2	6	4.5
−6	14	2.5	4	9	5
−4	9	3	6	14	5.5
−2	6	3.5	8	21	6
0	5	4			



تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من -8 إلى 8 .

✓ تحقق من فهمك

1A) $x = 3t,\ y = \sqrt{t} + 6;\ 0 \le t \le 8$

1B) $x = t^2,\ y = 2t + 3;\ -10 \le t \le 10$

إرشادات للدراسة

منحنيات لا تمثل دوال
يمكن استعمال المعادلات الوسيطية لتمثيل منحنيات صورتها الجبرية لا تمثل دوالّ كما في مثال 1.

يمكنك تمثيل المنحنى نفسه بمعادلتين وسيطيتين مختلفتين، كما في مثال 1، ويكون الاختلاف الوحيد بين المنحنيين في سرعتيهما، إذ يسير الجسم **على** المنحنى في الجزء **a** بشكل أسرع من الجسم في الجزء **b** . وعوضًا عن تعيين النقاط لتحديد المنحنى، يمكنك تحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية بحذف المتغير الوسيط بطريقة التعويض.

مثال 2 كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = t^2 + 2,\ x = 3t - 1$ بالصورة الديكارتية.

$x = 3t - 1$ معادلة x الوسيطية

$\frac{x+1}{3} = t$ الحل بالنسبة لـ t

$y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2$ بتعويض $t = \frac{x+1}{3}$ في معادلة y الوسيطية

$= \frac{x^2 + 2x + 1}{9} + 2$ بتربيع $\frac{x+1}{3}$

$= \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$ بالتبسيط

فتكون المعادلة الديكارتية $y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$.

✓ تحقق من فهمك

2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 4t,\ x = t^2 - 5$ بالصورة الديكارتية.

إرشادات للدراسة

حذف المتغير الوسيط
عند حذف المتغير الوسيط، وذلك بتحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية، يمكن أن تحل أيّ من المعادلتين الوسيطيتين، وتجد قيمة t ، ثم يتم التعويض في المعادلة الأخرى

يجب أحيانًا وضع قيود على المجال بعد التحويل من الصورة الوسيطية إلى الصورة الديكارتية.

مثال 3 مجال الصورة الديكارتية للمعادلة الوسيطية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \frac{1}{\sqrt{t}}, y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدّد المجال.

$x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ المعادلة الأولى

$\sqrt{t} = \frac{1}{x}$ الحل بالنسبة لـ t

$t = \frac{1}{x^2}$ بتربيع الطرفين

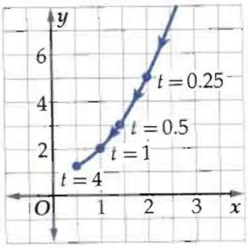
عوّض $\frac{1}{x^2}$ بدلًا من t في **المعادلة** الثانية.

$y = \frac{t+1}{t}$ المعادلة الثانية

$= \dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$ بتعويض $t = \frac{1}{x^2}$

$= \dfrac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ بالتبسيط

$= x^2 + 1$ بالتبسيط



على الرغم من أنّ الصورة الديكارتية هي $y = x^2 + 1$، فإن المنحنى معرّف فقط عند $t > 0$، وذلك لأن $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ معرفة فقط عندما $t > 0$. وكما يظهر في الشكل فإن مجال المعادلة الديكارتية يكون هو $\{x \mid x > 0\}$.

تحقق من فهمك

3) اكتب $y = \frac{1}{t}, x = \sqrt{t+4}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثل المنحنى بيانيًّا، وحدد المجال.

يمكن أن يكون المتغير الوسيط في المعادلة الوسيطية زاوية مثل θ.

مثال 4 الصورة الديكارتية عندما يكون المتغير الوسيط زاوية (θ)

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 4 \sin \theta$, $x = 2 \cos \theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا.

حلّ المعادلتين بالنسبة لِـ $\sin \theta$, $\cos \theta$ ثم استعمل متطابقة مثلثية.

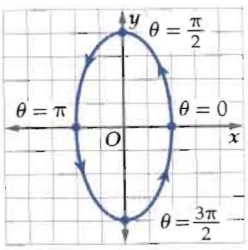
$y = 4 \sin \theta$ المعادلتان الوسيطيتان $x = 2 \cos \theta$

$\frac{y}{4} = \sin \theta$ الحل بالنسبة لـ $\sin \theta, \cos \theta$ $\frac{x}{2} = \cos \theta$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$ $\sin \theta = \frac{y}{4}, \cos \theta = \frac{x}{2}$

$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ بالتبسيط



تُمثّل المعادلتان الوسيطيتان قطعًا ناقصًا تمثيله البياني في الشكل المجاور.

إرشاد تقني

المتغيرات الوسيطية

عند تمثيل منحنيات معادلات وسيطية باستعمال الحاسبة البيانية، يستعمل المتغير t بدل θ

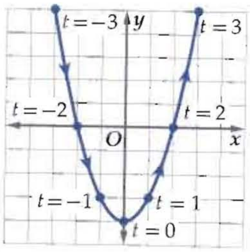
تحقق من فهمك

4) اكتب $y = 8 \cos \theta, x = 3 \sin \theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا.

يمكن وصف المنحنى نفسه باستعمال زوجين مختلفين أو أكثر من المعادلات الوسيطية. إذا كان الفرق فقط في السرعة أو الاتجاه أو كليهما. ويظهر الفرق في السرعة من خلال قيم المتغير الوسيط، ويُشار إلى الاتجاه بأسهم على المنحنى.

مثال 5 كتابة معادلات وسيطية من خلال التمثيل البياني

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 - 4$. ثم مثّل المنحنى بيانيًا موضحًا السرعة والاتجاه:

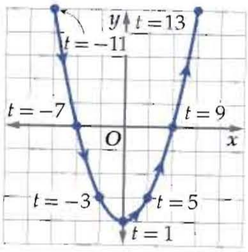


a) $t = x$

$y = x^2 - 4$ المعادلة الأصلية

$= t^2 - 4$ بتعويض x في المعادلة الأصلية.

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = t,\ y = t^2 - 4$ ، وتبين قيم t على التمثيل البياني المجاور السرعة، كما تبين الأسهم اتجاهات المنحنى.



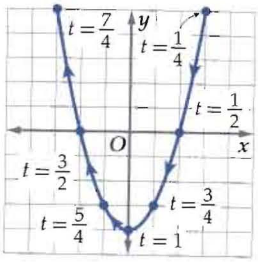
b) $t = 4x + 1$

$x = \frac{t-1}{4}$ الحل بالنسبة لـ x.

$y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4$ بتعويض x في المعادلة الأصلية.

$= \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ بالتبسيط

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = \frac{t-1}{4},\ y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$



c) $t = 1 - \frac{x}{4}$

$4 - 4t = x$ الحل بالنسبة لـ x.

$y = (4 - 4t)^2 - 4$ بتعويض x في المعادلة الأصلية.

$= 16t^2 - 32t + 12$ بالتبسيط

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = 4 - 4t,\ y = 16t^2 - 32t + 12$.

لاحظ أن السرعة هنا أكبر بكثير منها في **a**. أمّا الاتجاه فكما هو مشار إليه بالأسهم.

إرشادات للدراسة

اختيار المعادلة الوسيطية

أسهل طريقة لتحويل معادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة الوسيطية هي استعمال $x = t$. وباستعمال هذه الطريقة تكون المعادلة الوسيطية الأولى هي $x = t$، والثانية هي المعادلة الأصلية مع استبدال المتغير x بـ t

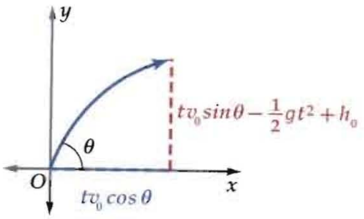
✓ تحقق من فهمك

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة الديكارتية $x = 6 - y^2$. ثم مثل المنحنى بيانيًا موضحًا السرعة والاتجاه:

5A) $t = x + 1$ 5B) $t = 3x$ 5C) $t = 4 - 2x$

حركة المقذوفات: تستعمل المعادلات الوسيطية عادةً في محاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوف يصنع زاوية غير قائمة مع الأفق بالمعادلتين الوسيطيتين الآتيتين:

مفهوم أساسي حركة المقذوفات



إذا قذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق، فإن:

المسافة الأفقية : $x = tv_0 \cos\theta$

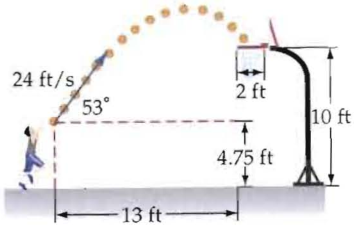
المسافة الرأسية : $y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، h_0 الارتفاع الابتدائي.

مثال 6 حركة المقذوفات

كرة سلة: يتدرب نواف على الضربات الحرة في كرة السلة، فقذف الكرة مرةً بسرعة ابتدائية مقدارها 24 ft/s ، وبزاوية تميل $53°$ على الأفق. المسافة الأفقية بين يده والحافة الأمامية لحلقة السلة هي 13 ft ، وارتفاع حلقة السلة عن الأرض 10 ft . وقطر الحلقة 1.5 ft . فإذا كان ارتفاع يده 4.75 ft عن الأرض، فهل سيحرز نواف هدفًا من هذه الرمية؟

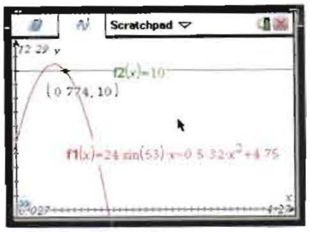
ارسم شكلًا يوضح الموقف.



لتحديد ما إذا كانت الرمية قد حقّقت هدفًا فلا بد من حساب المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة عندما كان ارتفاعها 10 ft. اكتب أولًا معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

$$y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$$= t(24)\sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$$ $v_0 = 24, \theta = 53°, g = 32, h_0 = 4.75$



مثّل منحنى معادلة موقع الكرة الرأسي والمستقيم $y = 10$ على نفس الشاشة. سيقطع المستقيم المنحنى في نقطتين. تمثل نقطة التقاطع الثانية الكرة وهي ساقطة باتجاه السلة. استعمل خاصية intersection من قائمة Analyze Graph في الحاسبة البيانية TI–nspire لإيجاد نقطة التقاطع الثانية مع المستقيم $y = 10$ ، وهي القيمة 0.77 ثانية تقريبًا.

حدّد موقع الكرة الأفقي عند الزمن 0.77 ثانية

$$x = tv_0 \cos\theta$$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الأفقي

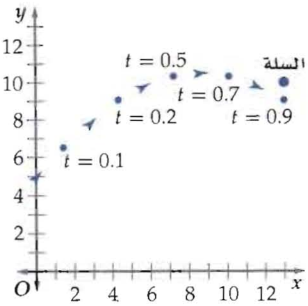
$$= 0.77(24)\cos 53$$ $v_0 = 24, \theta = 53°, t \approx 0.77$

$$\approx 11.1$$ باستعمال الحاسبة

بما أن الموقع الأفقي للكرة أقل من 13 ft عندما تصل الكرة إلى ارتفاع 10 ft وهي ساقطة، فإن الكرة لن تصل إلى السلة. لذا فإن نواف لم يحرز هدفًا من هذه الرمية.

التحقق: يمكنك تأكيد نتائج الحسابات بتمثيل منحنيي المعادلتين الوسيطيتين وتحديد مسار الكرة بالنسبة إلى السلة.

t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

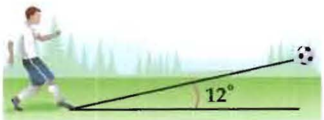


إرشادات للدراسة

ثابت الجاذبية الأرضية
يكون التسارع عند سطح الأرض بسبب جاذبيتها مساويًا $9.8\ m/s^2$ أو $32\ ft/s^2$. تأكد عند حل المسائل من أنك تستعمل القيمة الصحيحة للجاذبية بناءً على وحدات السرعة والمسافة المعطاة.

☑ تحقق من فهمك

6) **كرة قدم:** ركل أحمد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 56 m/s وبزاوية مقدارها $12°$ مع الأفق. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟



تدرب وحل المسائل

مثّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 1)

1) $x = t^2 + 3,\ y = \frac{t}{4} - 5;\ -5 \le t \le 5$

2) $x = \frac{t^2}{2},\ y = -4t;\ -4 \le t \le 4$

3) $x = -2t^2,\ y = \frac{t}{3} - 6;\ -5 \le t \le 5$

4) $x = \frac{t}{2},\ y = -\sqrt{t} + 5;\ 0 \le t \le 8$

5) $x = t^2 - 4,\ y = 3t - 8;\ -5 \le t \le 5$

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال: (المثالان 2, 3)

6) $y = t^2 - 7,\ x = 3t + 9$

7) $y = 5t,\ x = t^2 - 2$

8) $y = -4t + 3,\ x = t^2 + 1$

9) $y = 2t^2 + 8,\ x = 5t - 1$

10) $y = \frac{6t}{5} + 9,\ x = 4t^2$

11) $y = \frac{t^2}{6} - 7,\ x = \frac{t}{3} + 2$

12) **ألعاب بهلوانية:** قفز مهرج من على برج ممسكًا بحبل، فكان ارتفاعه بعد t ثانية ويُعطى بالمعادلة $y = \frac{45t - 1}{t}$، والمسافة الأفقية التي قطعها بعد t ثانية تُعطى بالمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{3t}}$، حيث x, y مقيسة بالأقدام. اكتب معادلة ديكارتية تمثل مسار قفز المهرج في الفترة الزمنية $0 \le t \le 5$. (مثال 3)

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا: (مثال 4)

13) $y = 5 \sin \theta,\ x = 3 \cos \theta$

14) $y = 2 \cos \theta,\ x = 7 \sin \theta$

15) $y = 4 \sin \theta,\ x = 6 \cos \theta$

16) $y = 3 \sin \theta,\ x = 3 \cos \theta$

17) $y = \cos \theta,\ x = 8 \sin \theta$

18) $y = 6 \sin \theta,\ x = 5 \cos \theta$

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة المعطاة، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه: (مثال 5)

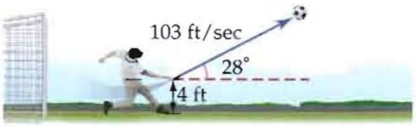
19) $t = 3x - 2,\ y = x^2 + 9$

20) $t = 2 - \frac{x}{3},\ y = \frac{x^2}{12}$

21) $t = \frac{x}{5} + 4,\ y = 10 - x^2$

22) $t = \frac{1 - x}{2},\ y = \frac{3 - x^2}{4}$

23) **كرة قدم:** رمى حارس مرمى كما في الشكل أدناه كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 37 ft/s لتصنع زاوية مع الأفق مقدارها 28°. حدّد المسافة التي قطعتها الكرة. (مثال 6)



اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال:

24) $x = \sqrt{t} + 4$, $y = 4t + 3$

25) $x = \log t$, $y = t + 3$

26) $x = \sqrt{t - 7}$, $y = -3t - 8$

27) $x = \log (t - 4)$, $y = t$

28) **كرة التنس:** ضرب جمال كرة تنس من على ارتفاع 55 cm عن الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 18 m/s، وتصنع زاوية مع الأفق قياسها 15°.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل مسار الكرة باستعمال معادلات وسيطية.

b) ما الزمن الذي تستغرقه الكرة في الهواء قبل أن تصطدم بالأرض؟

c) إذا كانت المسافة بين جمال والشبكة 10 أمتار، وارتفاع الشبكة 1.5 m عن سطح الأرض، فهل ستجتاز الكرة الشبكة؟ وإذا حدث ذلك فكم سيكون ارتفاع الكرة عن الشبكة؟ وإذا لم يحدث فكم تكون المسافة بين موقع سقوطها والشبكة؟

قابل بين كل زوج من المعادلات الوسيطية الآتية ومنحناها أدناه:

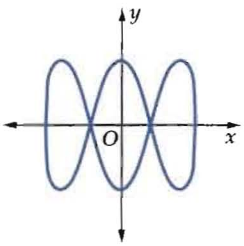
29) $x = \cos 2t,\ y = \sin 4t$

30) $x = \cos 3t,\ y = \sin t$

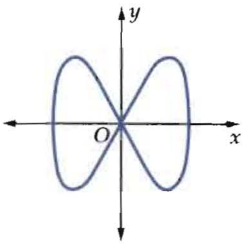
31) $x = \cos t,\ y = \sin 3t$

32) $x = \cos 4t,\ y = \sin 3t$

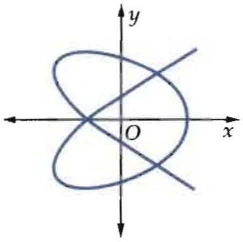
a)



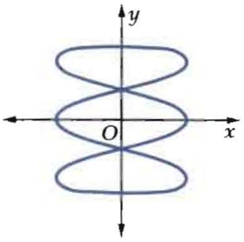
b)



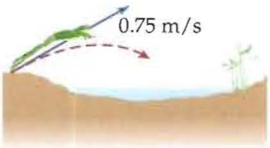
c)



d)



33) أحياء: يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية $0.75\,m/s$ ويصنع زاوية مع الأفق مقدارها $45°$. وينخفض سطح الجدول $0.3\,m$ عن الحافة التي قفز منها الضفدع. افترض أن g تساوي $9.8\,m/s^2$.



a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t مفترضًا أن سطح الماء يُمثَّل بالمستقيم $y = 0$

b) إذا كان عرض الجدول $0.5\,m$، فهل سيصل الضفدع إلى الضفة الأخرى؟ وإذا لم يصل إلى الضفة الأخرى فكم يكون بعده عنها عندما يصطدم بالماء؟

34) سباق: اشترك حسن وسعيد في سباق جري طوله $100\,m$، وعندما أطلقت صافرة البدء ركض حسن بسرعة $8.0\,m/s$ من النقطة $(0, 2)$ وبتأخير $0.1\,s$، بينما ركض سعيد بسرعة $8.1\,m/s$ من النقطة $(0, 5)$ وبتأخير $0.3\,s$.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع كل منهما باستعمال محور y كخط بداية ومفترضًا أنهما ركضا بموازاة محور x.

b) من منهما سيفوز بالسباق؟ وإذا كانت مسافة السباق $200\,m$ بدلًا من $100\,m$ فمن سيفوز؟ فسّر إجابتك.

35) تمثيلات متعددة: ستستقصي في هذه المسألة شكل المنحنى الناتج من مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على محور x.

a) بيانيًا: استعمل حاسبة بيانية لتمثيل منحنى المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$، حيث t مقيسة بالراديان.

b) تحليليًا: ما المسافة بين مقاطع x؟ صف ما تُمثِّله هذه المقاطع x وما تمثّله المسافة بين كل مقطعين.

c) تحليليًا: ما أكبر قيمة لِـ y؟ صف ما تمثله هذه القيمة وكيفية تغيرها مع تغير نصف قطر الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) تحدّ: المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم ℓ هما $x = 2 + 3t$, $y = -t + 5$. اكتب مجموعة معادلات وسيطية للمستقيم m العمودي على ℓ والمار بالنقطة $(4, 10)$.

37) اكتب: اشرح لماذا يوجد عدد لا نهائي من المعادلات الوسيطية تصف المستقيم نفسه في المستوى xy.

38) تبرير: حدّد ما إذا كان بالإمكان استعمال المعادلات الوسيطية لحركة المقذوفات لمحاكاة حركة الأجسام الساقطة بزاوية قياسها $90°$. وضّح تبريرك.

39) اكتب: بيّن ميّزات استعمال المعادلات الوسيطية على استعمال المعادلات الديكارتية عند تحليل المركبات الأفقية والرأسية للمنحنى.

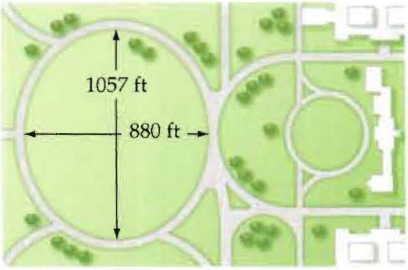
مراجعة تراكمية

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

40) الرأسان $(-8, 5)$, $(4, 5)$، وطول المحور المرافق 4 وحدات.

41) طول المحور القاطع 4 وحدات، والبؤرتان $(-1, 3)$, $(5, 3)$

42) اكتب معادلة تمثِّل القطع الناقص في الشكل أدناه مفترضًا أن نقطة الأصل عند مركز القطع. (الدرس 4-2)



بسّط كل عبارة من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3-1)

43) $\dfrac{\sin x}{\csc x - 1} + \dfrac{\sin x}{\csc x + 1}$

44) $\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x}$

تدريب على اختبار

45) يحتوي كل مربع غير مظلَّل في الشكل أدناه على مجموع العدد في المربع الذي فوقه مباشرة والعدد الذي إلى يساره. فمثلًا العدد 4 في المربع غير المظلَّل هو مجموع العدد 2 في المربع الذي فوقه والعدد 2 في المربع الذي إلى يساره. قيمة x؟

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

A 8   B 15   C 23   D 30

46) الصورة الديكارتية للمنحنى المعرّف بالمعادلتين: $x = 3\cos\theta - 1$, $y = 3\sin\theta + 4$، هي:

A $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$

B $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 3$

C $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

D $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 3$

توسع **4-5**

معمل الحاسبة البيانية: التمثيل بالمعادلات الوسيطية
Modeling with Parametric Equations

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل الدوال الوسيطية.

يمثّل المتغير المستقل t في بعض المعادلات الوسيطية الزمن، ويبين هذا المتغير السرعة في التمثيل البياني للمنحنى. فإذا أمكن تمثيل منحنى بشكل كامل في الفترة $0 \le t \le 5$ ، بينما أمكن تمثيل منحنى مطابق له وبشكل كامل في الفترة $0 \le t \le 10$ فإن المنحنى الأول أسرع.

نشاط: تمثيل القطوع المخروطية بيانيًا بالمعادلات الوسيطيّة

كرة قدم: وقف مشاري بجانب نواف، وركل كل منهما كرة في الوقت نفسه. فكانت السرعة الابتدائية المتجهة لكرة مشاري $35\,m/s$ ، وصنعت زاوية قياسها $60°$ مع الأفق. بينما كانت السرعة الابتدائية المتجهة لكرة نواف $30\,m/s$ ، وصنعت زاوية قياسها $45°$ مع الأفق. مثّل بيانيًا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire مفترضًا أن الكرتين كم ركلهما من سطح الأرض.

الخطوة 1: المعادلتان الوسيطيتان لكل رمية هما:

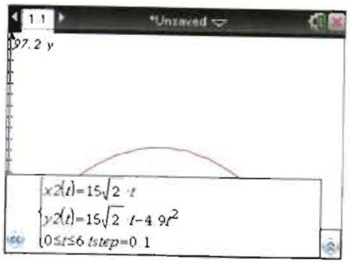
مشاري: $x = 35t\cos 60 = 17.5t$ ، $y = 35t\sin 60 - 4.9t^2 = 17.5\sqrt{3}t - 4.9t^2$

نواف: $x = 30t\cos 45 = 15\sqrt{2}\,t$ ، $y = 30t\sin 45 - 4.9t^2 = 15\sqrt{2}t - 4.9t^2$

الخطوة 2: رتّب وضعية الحاسبة بالضغط على المفاتيح:

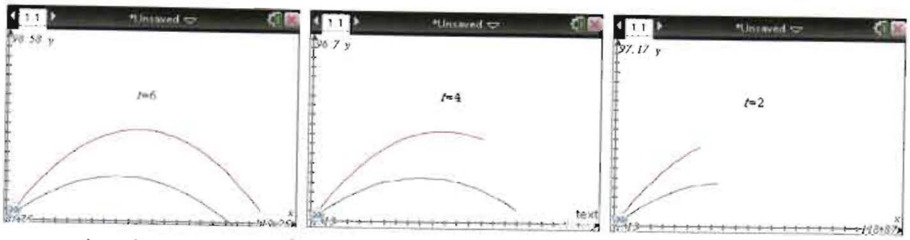
on | 1 New Document | 2:Add Graphs

2:Parametric ، مما يسمح لك بتمثيل المعادلات الوسيطيّة. أدخل المعادلات الوسيطية كما هو موضح.



الخطوة 3: حدّد مدى قيم t من 0 إلى 0.1 في tstep لملاحظة مساري الكرتين.

الخطوة 4: مثّل المعادلات بيانيًا.



مسار كرة مشاري أعلى من مسار كرة نواف، بينما تسقط كرة نواف أولًا، وتقطع مسافة أفقية أقل.

إرشادات للدراسة
تحديد المدى استعمل معطيات المسألة لتحديد مدى قيم x, y, t .

تمارين:

1) **كرة قدم:** ركل نواف كرة ثانية بسرعة ابتدائية متجهة $33\,m/s$ ، فصنعت زاوية قياسها $50°$ مع الأفق. وبعد ذلك بنصف ثانية ركل مشاري كرة أخرى بسرعة ابتدائية متجهة $45\,m/s$ ، فصنعت زاوية قياسها $40°$ مع الأفق. مثّل بيانيًا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية، وفسّر النتائج.

2) **كرة سلة:** رمى أحمد كرة نحو السلة بسرعة ابتدائية متجهة $43\,m/s$، فصنعت مع الأفق زاوية قياسها $87°$. وبعد ثانية رمى فيصل كرة نحو السلة بسرعة ابتدائية متجهة $60\,m/s$، فصنعت مع الأفق زاوية قياسها $20°$. مثّل بيانيًا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية، وفسّر النتائج مفترضًا أن أحمد وفيصل يقفان متجاورين، وأن الارتفاع الابتدائي للرميتين متر واحد.

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 1-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2=4p(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+p, k)$
$(x-h)^2=4p(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+p)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة .

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 2-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المحور الأكبر أفقي	$(h\pm a, k)$	$(h\pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k\pm a)$	$(h, k\pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e=\frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2-b^2=c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 3-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المحور القاطع أفقي	$(h\pm a, k)$	$(h\pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k\pm a)$	$(h, k\pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e=\frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2+b^2=c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.
- يمكن تحويل معادلة في مستوى xy إلى معادلة في مستوى $x'y'$ باستعمال

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

المعادلات الوسيطية (الدرس 5-4)

- تستعمل المعادلات الوسيطية لوصف المركبتين الأفقية والرأسية لمعادلة بصورة منفصلة، وبدلالة المتغير الوسيط t.
- عند قذف جسم بزاوية قياسها θ مع الأفق وبسرعة ابتدائية متجهة v_0 فإنّ المسافة الأفقية التي يقطعها الجسم تُعطى بالصيغة $x=tv_0\cos\theta$ ، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، والارتفاع الرأسي الذي يكون عنده الجسم بعد t ثانية يُعطى بالصيغة $y=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+h_0$ ، حيث h_0 الارتفاع الابتدائي.

المفردات

- القطع المخروطي ص 162
- المحل الهندسي ص 162
- القطع المكافئ ص 162
- البؤرة ص 162
- الدليل ص 162
- محور التماثل ص 162
- الرأس ص 162
- الوتر البؤري ص 162
- القطع الناقص ص 170
- البؤرتان ص 170
- المحور الأكبر ص 170
- المركز ص 170
- المحور الأصغر ص 170
- الرأسان ص 170
- الرأسان المرافقان ص 170
- الاختلاف المركزي ص 170
- القطع الزائد ص 178
- المحور القاطع ص 178
- المحور المرافق ص 178
- المعادلة الوسيطية ص 196
- المتغير الوسيط ص 196
- اتجاه المنحنى ص 196
- المنحنى الوسيطي ص 196

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ______ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

2) الدائرة هي ______ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

3) يكون ______ القطع المكافئ عموديًا على محور تماثله.

4) يقع الرأسان المرافقان في ______ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ______ يساوي مقدارًا ثابتًا .

6) ______ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

7) ______ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا.

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لِـ ______ الشيء نفسه، لكن له خطا تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين.

9) يمكن كتابة معادلة منحنى باستعمال المتغيرين x, y أو باستعمال معادلات ______ تستعمل على وجه العموم المتغير الوسيط t أو الزاوية θ .

10) منحنى $f(t)=(\sin t, \cos t)$ هو ______ على شكل دائرة مرسومة باتجاه عقارب الساعة.

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 169 - 162)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

11) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

12) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

13) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

14) $F(1, 1)\,,\, V(1, 5)$

15) $F(-3, 6)\,,\, V(7, 6)$

16) $F(-2, -3)\,,\, V(-2, 1)$

17) $F(3, -4)\,,\, V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

18) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

19) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

20) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k+p)$ لذلك فإن قيمة p هي $1 - (-3) = 4$. وبما أن p قيمة موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى الأعلى.

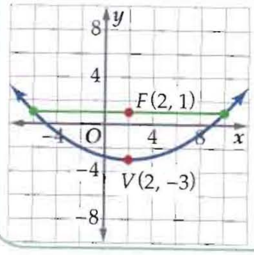
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k.

$4p(y-k) = (x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3) = (x-2)^2$ $p = 4, k = 3, h = 2$

$16(y+3) = (x-2)^2$ بالتبسيط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $16(y+3) = (x-2)^2$. مثِّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 177 - 170)

حددخصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

21) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

22) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

23) الرأسان $(-7, -3)\,,\,(3, -3)$ ، والبؤرتان $(-4, -3)\,,\,(6, -3)$

24) البؤرتان $(1, 2)\,,\,(9, 2)$ ، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات

25) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(-4, 4)\,,\,(6, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7)\,,\,(1, 1)$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

26) المركز $(-1, 6)$، وطول نصف القطر 3 وحدات

27) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0)\,,\,(5, 2)$

28) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-6, -2)\,,\,(-2, 4)$

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4)\,,\,(-9, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4)\,,\,(1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد $a\,,\,b$.

نصف طول المحور الأكبر

$a = \frac{11 - (-9)}{2} = 10$

نصف طول المحور الأصغر

$b = \frac{12 - (-4)}{2} = 8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{11 + (-9)}{2}, \frac{12 + (-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بالتبسيط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 185 - 178)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

29) $\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1$

30) $\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

31) $\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

32) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

33) الرأسان $(-7, 0)$, $(7, 0)$ ، طول المحور المرافق 8.

34) البؤرتان $(0, -5)$, $(0, 5)$ ، والرأسان $(0, -3)$, $(0, 3)$.

35) البؤرتان $(1, -5)$, $(1, 15)$ ، وطول المحور القاطع 16.

36) الرأسان $(-2, 0)$, $(2, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

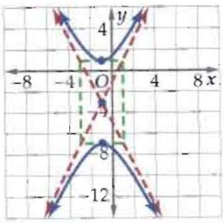
مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$
$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	راسي	
المركز:	$(-1, -3)$	(h, k)
الرأسان:	$(-1, 1), (-3, -7)$	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(-1, -3 + 2\sqrt{5})$ $(-1, -3 - 2\sqrt{5})$	$(h, k \pm c)$
خطا التقارب:	$y + 3 = 2(x + 1)$ وَ $y + 3 = -2(x + 1)$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها (الصفحات 193 - 187)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

37) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

38) $4y^2 - x - 40y + 107 = 0$

39) $9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0$

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$ ، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله.

40) $x^2 + y^2 = 4; \theta = \frac{\pi}{4}$

41) $x^2 - 2x + y = 5; \theta = \frac{\pi}{3}$

42) $x^2 - 4y^2 = 4; \theta = \frac{\pi}{2}$

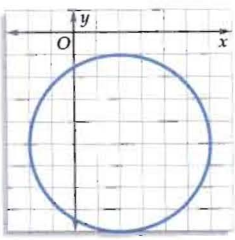
43) $9x^2 + 4y^2 = 36; \theta = 90°$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله، ومثّل منحناه بيانيًّا.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$
$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$
$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$
$$3(x-2)^2 + 3(y+5)^2 = 48$$
$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

في هذه المعادلة $A = 3, C = 3$.
وحيث إن كلًّا من A, C كمية موجبة، $A = C$ ، فإن المنحنى يمثّل دائرة
المركز $= (2, -5)$
وطول نصف القطر $= 4$.



4-5 المعادلات الوسيطية (الصفحات 202 - 196)

مثّل المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي بيانيًّا.

44) $x = \sqrt{t},\ y = 1 - t;\ 0 \le t \le 9$

45) $x = t + 2,\ y = t^2 - 4;\ -4 \le t \le 4$

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية ثم مثّل المنحنى بيانيًّا.

46) $x = t + 5,\ y = 2t - 6$

47) $x = 2t,\ y = t^2 - 2$

48) $x = t^2 + 3,\ y = t^2 - 4$

49) $x = t^2 - 1,\ y = 2t + 1$

مثال 5

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 5 \cos t,\ y = 9 \sin t$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا.

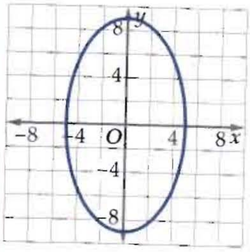
$$x = 5\cos t \qquad y = 9 \sin t$$

$$\cos t = \frac{x}{5} \qquad \sin t = \frac{y}{9}$$ الحل بالنسبة لـ $\sin t$ و $\cos t$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$$

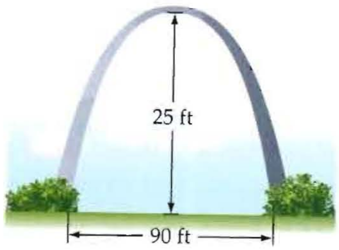
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$$



تمثّل المعادلتان الوسيطيتان منحنى قطع ناقص.

تطبيقات وحل المسألة

50) أقواس: يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة منتزه (الدرس 4-1)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

51) حركة الماء: أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 4-2)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$.
بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

52) طاقة: تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 4-3)

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

53) مجمّع شمسي: صمّم مجموعة من الطلاب مجمعًا شمسيًّا على شكل قطع مكافئ يعمل على تركيز الطاقة الشمسية عند بؤرته، ويمكن تدوير المجمع الشمسي بسهولة بحيث يتم الحصول على أكبر كمية من الطاقة الشمسية، وذلك عند توجيهه نحو أشعة الشمس مباشرة. بعد دوران القطع المكافئ $30°$ باتجاه أشعة الشمس، فإن معادلة القطع المكافيء الذي يمثّل المجمع الشمسي في المستوى $x'y'$ هي $y' = 0.25(x')^2$. أوجد معادلة القطع المكافئ في المستوى xy. (الدرس 4-4)

54) هندسة: افترض أن: $x_1(t) = 4 \cos t,\ y_1(t) = 4 \sin t$ و $x_2(t) = 4 \cos 2t,\ y_2(t) = 4 \sin 2t$. (الدرس 4-5)

a) قارن بين منحنيي مجموعتي المعادلات x_1, y_1 و x_2, y_2.

b) اكتب معادلتين وسيطيتين للدائرة التي نصف قطرها 6 وحدات، وتحتاج نصف زمن $x_1(t), y_1(t)$ لاكتمال منحناها.

c) اكتب المعادلتين في الفرع b بالصورة الديكارتية.

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

1) الرأسان $(-3, -4)$ ، $(7, -4)$ ، والبؤرتان $(-2, -4)$ ، $(6, -4)$.

2) البؤرتان $(-2, -9)$ ، $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) اختيار من متعدد: ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرةً؟

A -8 **C** 4

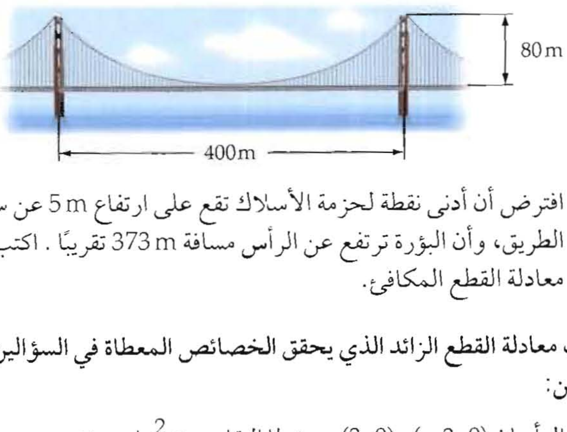
B -4 **D** 8

اكتب كل معادلتين وسيطيتين في السؤالين 5 ,4 بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا.

4) $x = t - 5,\ y = 3t - 4$

5) $x = t^2 - 1,\ y = 2t + 1$

6) جسور: يمثِّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا ، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة .



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5 m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373 m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

7) الرأسان $(-3, 0)$ ، $(3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$.

8) البؤرتان $(8, 8)$ ، $(8, 0)$ ، والرأسان $(8, 6)$ ، $(8, 2)$

اكتب معادلة كل قطع مخروطي في مستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ :

9) $7(x' - 3) = (y')^2,\ \theta = 60°$

10) $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{10} = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6}$

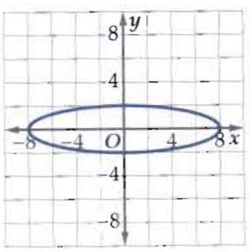
مثِّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 11 وَ 12:

11) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

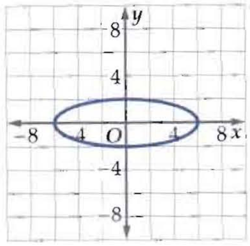
12) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

13) اختيار من متعدد: أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟

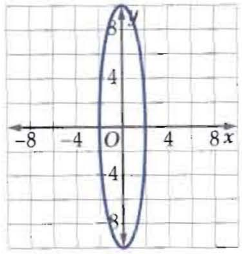
A



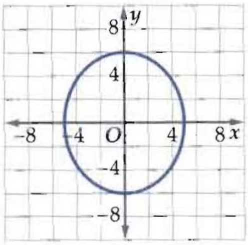
B



C



D



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثِّل منحنييهما بيانيًّا.

14) $F(2, 8),\ V(2, 10)$

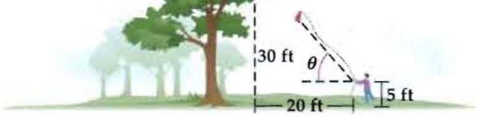
15) $F(2, 5),\ V(-1, 5)$

مثِّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

16) $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

17) $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

18) تخييم: يقوم المشاركون في المخيمات الكشفية أحيانًا بإجراءات لحماية الطعام والمؤن من الحيوانات الضالة. وإحدى طرق الحماية هي ربط حقيبة الطعام والمؤن بحبل ثم رميها فوق غصن شجرة عالية وربط الحبل بالشجرة. افترض أن ارتفاع غصن شجرة 30 ft عن الأرض، وأن شخصًا يبعد عن الشجرة 20 ft قد رمي حقيبة من ارتفاع 5 ft عن الأرض.



a) إذا رُميت الحقيبة بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft في الثانية، فصنعت زاوية قياسها 60° مع الأفق، فهل ستستقر فوق الغصن؟

b) إذا رُميت الحقيبة بسرعة ابتدائية مقدارها 45 ft في الثانية، وصنعت مع الأفق زاوية قياسها 75°، فهل ستستقر فوق الغصن؟

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل منحنى القطع المخروطي المعطاة معادلته فيما يأتي:

19) $x^2 - 6xy + y^2 - 4y - 8x = 0$

20) $x^2 + 4y^2 - 2xy + 3y - 6x + 5 = 0$

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

خاصية قوة اللوغاريتم	$\log_b x^p = p \log_b x$	الربح المركب	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
صيغة تغيير الأساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	خاصية الضرب في اللوغارتمات	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$		

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ أو $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ أو $x^2 + y^2 = r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الصيغة الدورانية	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$		

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$		$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$

الصيغ

الهندسة الإحداثية

المسافة $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

نقطة المنتصف $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

كثيرات الحدود

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$

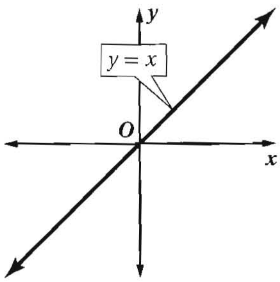
مربع الفرق $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

مربع المجموع $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

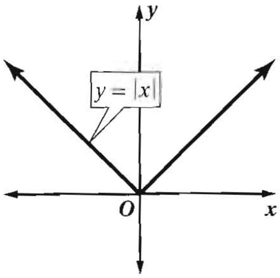
الفرق بين مربعين $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

التمثيل البياني للدوال الرئيسة (الأم)

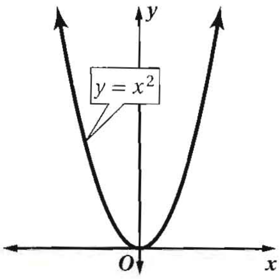
الدالة الخطية



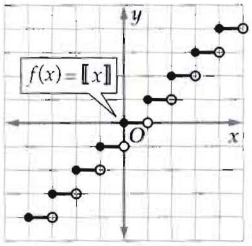
دالة القيمة المطلقة



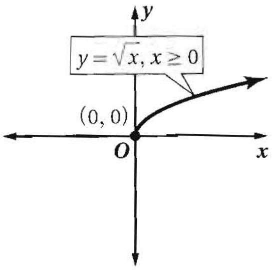
الدالة التربيعية



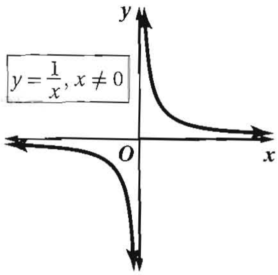
دالة أكبر عدد صحيح



دالة الجذر التربيعي



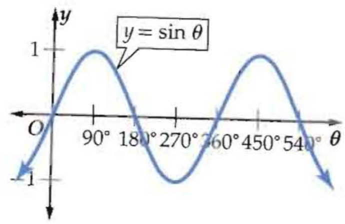
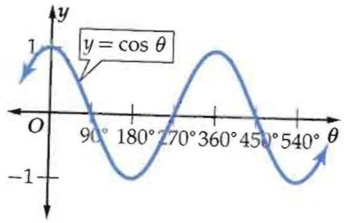
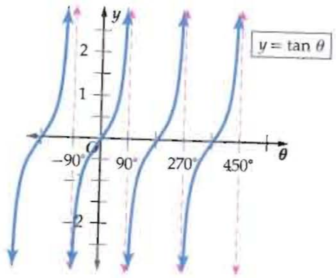
المقلوب والدالة النسبية



النسب المثلثية الأساسية للزوايا الخاصة

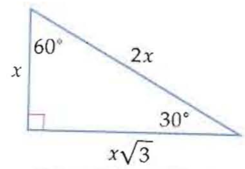
الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية

الدالة	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$	$y = \tan\theta$
التمثيل البياني			

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

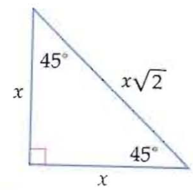
30°−60°−90°



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$

45°−45°−90°



$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$

الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
مصفوفة الوحدة	I
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
الحدث المتمم	A'
احتمال الحدث A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B\mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\mathrm{Cot}(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\mathrm{Csc}(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\mathrm{Sec}(x)$
معكوس دالة Sin	$\mathrm{Sin}^{-1} x$
معكوس دالة Cos	$\mathrm{Cos}^{-1} x$
معكوس دالة Tan	$\mathrm{Tan}^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة متعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [\![x]\!]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f وَ g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m\times n$	$\mathrm{A}_{m\times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	a_{ij}
محددة المصفوفة A	$\lvert \mathrm{A} \rvert$